Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2020, 9(5), 682-687
Published Online May 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2020.95081

Humble Opinion on Limiting

Qi Wang, Weiling You*, Zhiming Tan

Department of Public Teaching, Guangdong Open University, Guangzhou Guangdong
Email: *675349028@qq.com

Received: Apr. 23rd, 2020; accepted: May 8th, 2020; published: May 15th, 2020

Abstract

The thought of limit is an important thought in modern mathematics, which runs through calculus and occupies an important position in calculus teaching. Finding the limit of function is a knowledge point that must be mastered in calculus. It is of great significance to learn advanced mathematics to master the limit operation method and operation skill of function correctly. In this paper, the types of limit of function in calculus are summarized, the calculation methods of each type are given, and the specific application methods of each limit type are clarified through the explanation of the representative real questions in the past years.

Keywords

The Limit, Determined Type, Undetermined Type, Power Exponential Function, L'Hospital Rule

求极限刍议

王　琦，尤卫玲*，谭志明

广东开放大学公共教学部，广东　广州
Email: *675349028@qq.com

收稿日期：2020年4月23日；录用日期：2020年5月8日；发布日期：2020年5月15日

摘　要

极限思想是近代数学的一种重要思想，它贯穿微积分的始终，在微积分教学中占有重要的地位。求函数的极限是微积分中必须掌握的一个知识点，正确掌握函数的极限运算方法和运算技巧，对学习好高等数学具有重要意义。本文对微积分中求函数极限遇到的类型进行归纳总结，给出每种类型的计算方法，并通过讲解历年具有代表性的考研真题对方法运用加以阐明。

*通讯作者。

文章引用: 王琦, 尤卫玲, 谭志明. 求极限刍议[J]. 应用数学进展, 2020, 9(5): 682-687.
DOI: 10.12677/aam.2020.95081

关键词

极限，确定型，待定型，幂指函数，洛必达法则

1. 引言

极限思想是社会实践的产物，其来源可以追溯到古代。战国时代哲学家庄周所著的《庄子・天下篇》中就有最初的极限思想。而随着生产力的极大发展，生产和技术中涌现出的大量问题依靠初等数学的方法已无法解决，这就促进了极限的发展，这也是微积分建立的社会背景。高等数学中一系列重要概念，如函数的连续性、导数以及定积分等都是借助于极限来定义的。可以说高等数学就是一门用极限思想来研究函数的学科。由此可见，极限在高等数学中占有重要的地位。通过对近十年考研真题分析发现，几乎每年都有一道求极限的题目，从中可见其重要性。文献[1] [2] [3] [4]及相关文献中基本没有阐明如何求极限以及对极限类型如何进行归类，本文将介绍如何判断极限的类型，以及系统介绍每种极限类型的计算方法。

2. 求极限归纳

依据函数来分，可将求极限分为一元函数的极限和多元函数的极限，本文我们将着重对一元函数求极限的方法做一个探讨。

依据在高等数学中所遇到的求极限类型，我们将之分为两大类，即确定型和待定型。

2.1. 确定型

常见的确定型极限有以下几种：

1) 利用函数的连续性求极限

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，则

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)。$$

初等函数在其定义区间内都是连续的，换言之，若初等函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续。

例 1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^{\sqrt{1-\cos^2 x}}$ 。

解：因为函数 $f(x)=\mathrm{e}^{\sqrt{1-\cos^2 x}}$ 在点 $x=0$ 处连续，所以

$$\lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{\sqrt{1-\cos^2 x}}=\mathrm{e}^{\sqrt{1-\cos^2 0}}=1。$$

2) 利用有界变量与无穷小的积仍是无穷小这一性质求极限

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$， $g(x)$ 在 x_0 的某去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$ 内有界，则

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)g(x)\right)=0。$$

注：1) 对于 $x \to *$ 的情形类似，其中 $*$ 表示 x_0，x_0^+，x_0^-，∞，$+\infty$，$-\infty$ 中的一种，下同；

2) 求极限时，当所求极限函数的其中一部分极限不存在时，可考虑利用这一性质求极限。

例 2. 求极限 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\arctan x}{x}$。

【分析】极限 $\lim\limits_{x \to \infty} \arctan x$ 是不存在的，因而考虑是否可以利用有界变量与无穷小的积仍是无穷小这一性质。

解：因为 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0$，而 $|\arctan x| < \dfrac{\pi}{2}$，所以

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \arctan x \right) = 0\text{。}$$

2.2. 待定型

确定极限类型是求极限的关键，因为只有确定了所求极限的类型，才能按照具体的类型方法进行计算。为叙述方便，将无穷大符号 ∞ 引入代数运算中，并做如下规定：

1) $(\pm\infty) \pm a = \pm\infty$；

2) $(\pm\infty) \cdot a = \begin{cases} \pm\infty, & a > 0 \\ \mp\infty, & a < 0 \end{cases}$；

3) $\infty \cdot \infty = \infty$；

4) $\dfrac{1}{0} = \infty$，$\dfrac{1}{\infty} = 0$。

这里“0”表示非零无穷小量，而非数字“0”。有了这些运算，我们可以很快判断出所求极限类型，一般地常见待定型有以下三种。

1. $\dfrac{0}{0}$ 型和 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型，简称为“商型”

1) 若 $\lim\limits_{x \to *} f(x) = 0$，$\lim\limits_{x \to *} g(x) = 0$，则极限 $\lim\limits_{x \to *} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ 称为 $\dfrac{0}{0}$ 型；

2) 若 $\lim\limits_{x \to *} f(x) = \infty$，$\lim\limits_{x \to *} g(x) = \infty$，则极限 $\lim\limits_{x \to *} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ 称为 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型。

$\dfrac{0}{0}$ 型和 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型常运用洛必达法则，在利用洛必达法则时，要注意以下几点。

1) $\dfrac{0}{0}$ 型常结合等价无穷小的代换、第一重要极限等先简化计算，且利用等价无穷小代换时，一般用在乘积因子，作和作差因子一般不要用；

2) 在利用洛必达法则时，要抓住“0”和“∞”因子求导，与之无关的放外面，这样会大大简化计算。

例 3. (2016 年考研数一)求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\int_0^x t \ln(1 + t \sin t) \mathrm{d}t}{1 - \cos x^2}$。

【分析】因为 $x \to 0$，将 $x = 0$ 代入函数可得 $\dfrac{\int_0^0 t \ln(1 + t \sin t) \mathrm{d}t}{1 - \cos 0^2} = \dfrac{0}{0}$(这里代入仅为判断极限类型，无实际意义，下同)，即极限属于 $\dfrac{0}{0}$ 型，分母先利用等价无穷小代换 $1 - \cos x^2 \sim \dfrac{x^4}{2} \ (x \to 0)$ 以简化计算，利用洛必达法则后，分子中部分因子利用等价无穷小代换 $\ln(1 + x \sin x) \sim x \sin x \ (x \to 0)$，最后利用第一重要极限。

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)\mathrm{d}t}{1-\cos x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)\mathrm{d}t}{\frac{x^4}{2}}\overset{L'}{=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x\sin x)}{2x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x\sin x)}{2x^3}=\dfrac{1}{2}$。

例 4. (2008 年考研数一)求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$。

【分析】因为 $x\to 0$，将 $x=0$ 代入函数可得 $\dfrac{[\sin 0-\sin(\sin 0)]\sin 0}{0^4}=\dfrac{0}{0}$，即极限属于 $\dfrac{0}{0}$ 型，分子中一部分先利用等价无穷小代换 $\sin x\sim x\,(x\to 0)$，化简利用洛必达法则后，将不为“0”的因子单独分离出来求极限，剩余部分利用等价无穷小代换 $1-\cos(\sin x)\sim\dfrac{\sin^2 x}{2}\,(x\to 0)$，最后利用第一重要极限。

解：

$$\lim_{x\to 0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}$$

$$\overset{L'}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos(\sin x)\cdot\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(\sin x)}{3x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\cos x=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin^2 x}{2}}{3x^2}=\frac{1}{6}.$$

2. $0\cdot\infty$ 型和 $\infty-\infty$ 型，简称为“积差型”

1) 若 $\lim\limits_{x\to *}f(x)=0$， $\lim\limits_{x\to *}g(x)=\infty$，则极限 $\lim\limits_{x\to *}(f(x)g(x))$ 称为 $0\cdot\infty$ 型；

2) 若 $\lim\limits_{x\to *}f(x)=\infty$， $\lim\limits_{x\to *}g(x)=\infty$，则极限 $\lim\limits_{x\to *}(f(x)-g(x))$ 称为 $\infty-\infty$ 型。

计算“积差型”极限的主要思想是先将之转化为“商型”，然后再按“商型”进行计算，常利用转化方式为

1) $0\cdot\infty\Leftrightarrow\dfrac{0}{\frac{1}{\infty}}\Leftrightarrow\dfrac{0}{0}$ 或 $0\cdot\infty\Leftrightarrow\dfrac{\infty}{\frac{1}{0}}\Leftrightarrow\dfrac{\infty}{\infty}$；

2) $\infty-\infty$ 型常利用分子有理化、通分、变量代换等方法转化为“商型”。

例 5. (2014 年考研数一)求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left(t^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right)\mathrm{d}t}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$。

【分析】该极限属于 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型，分母中一部分先利用等价无穷小代换 $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\sim\dfrac{1}{x}\,(x\to+\infty)$，化简利用洛必达法则后，极限变为 $\infty-\infty$ 型，再利用变量代换，转化为 $\dfrac{0}{0}$ 型，最后利用洛必达法则。

解：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left(t^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right)\mathrm{d}t}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left(t^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right)\mathrm{d}t}{x^2\cdot\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\int_1^x\left(t^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right)\mathrm{d}t\right)'}{(x)'}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(x^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1\right)-x\right)\overset{t=\frac{1}{x}}{=\!=\!=}\lim_{t\to 0^+}\frac{\mathrm{e}^t-1-t}{t^2}\overset{L'}{=\!=}\lim_{t\to 0^+}\frac{\mathrm{e}^t-1}{2t}=\frac{1}{2}.$$

例 6. (2020 年考研数一)求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{e^x-1}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right]$。

【分析】因为 $x\to 0$，将 $x=0$ 代入函数可得 $\dfrac{1}{e^0-1}-\dfrac{1}{\ln(1+0)}=\dfrac{1}{0}-\dfrac{1}{0}=\infty-\infty$，即极限属于 $\infty-\infty$ 型，先通分转化为 $\dfrac{0}{0}$ 型，分母利用等价无穷小的代换 $e^x\sim 1,\ln(1+x)\sim x\ (x\to 0)$，再利用洛必达法则，整理后把不为“0”的因子剔出来单独求极限，剩余的利用洛必达法则。

解：

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-e^x+1}{(e^x-1)\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-e^x+1}{x\cdot x}\overset{L'}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-e^x}{2x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x(1+x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-e^x(1+x)\right)'}{x'}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(e^x(2+x)\right)=-1.$$

3. 1^∞ 型、0^0 和 ∞^0 型，简称为“幂指型”

1) 若 $\lim\limits_{x\to *}f(x)=1$， $\lim\limits_{x\to *}g(x)=\infty$，则极限 $\lim\limits_{x\to *}f(x)^{g(x)}$ 称为 1^∞ 型；

2) 若 $\lim\limits_{x\to *}f(x)=0$， $\lim\limits_{x\to *}g(x)=0$，则极限 $\lim\limits_{x\to *}f(x)^{g(x)}$ 称为 0^0 型；

3) 若 $\lim\limits_{x\to *}f(x)=\infty$， $\lim\limits_{x\to *}g(x)=0$，则极限 $\lim\limits_{x\to *}f(x)^{g(x)}$ 称为 ∞^0 型。

计算“幂指型”的主要思想是利用指数函数与对数函数的性质，即 $u^v=e^{\ln u^v}=e^{v\ln u}$，将“幂指型”先转化为“积差型”或一步到位转化为“商型”再进行计算，常利用转化方式为

1) $1^\infty\Leftrightarrow e^{\ln 1^\infty}\Leftrightarrow e^{\infty\cdot\ln 1}\Leftrightarrow e^{\infty\cdot 0}$；

2) $\infty^0\Leftrightarrow e^{\ln\infty^0}\Leftrightarrow e^{0\cdot\ln\infty}\Leftrightarrow e^{0\cdot\infty}$，其中 ∞ 指 $+\infty$；

3) $0^0\Leftrightarrow e^{\ln 0^0}\Leftrightarrow e^{0\cdot\ln 0}\Leftrightarrow e^{0\cdot\infty}$，其中 0^0 中幂处的 0 指右极限。

特别地，对于 1^∞ 型，还可以利用第二重要极限的推广进行计算，即下列结论进行计算。

定理：若 $\lim\limits_{x\to *}u(x)=0$， $\lim\limits_{x\to *}v(x)=\infty$，则

$$\lim_{x\to *}\left(1+u(x)\right)^{v(x)}=e^{\lim\limits_{x\to *}(u(x)v(x))}。$$

证明：根据连续函数的性质，当极限 $\lim\limits_{x\to *}f(x)^{g(x)}$ 不是“幂指型”中的任何一种时

$$\lim_{x\to *}f(x)^{g(x)}=\left(\lim_{x\to *}f(x)\right)^{\left(\lim\limits_{x\to *}g(x)\right)},$$

因而若 $\lim\limits_{x\to *}u(x)=0$， $\lim\limits_{x\to *}v(x)=\infty$，则

$$\lim_{x\to *}\left(1+u(x)\right)^{v(x)}=\lim_{x\to *}\left(1+u(x)\right)^{\frac{1}{u(x)}u(x)v(x)}=\lim_{x\to *}\left[\left(1+u(x)\right)^{\frac{1}{u(x)}}\right]^{(u(x)v(x))}$$

$$=\lim_{x\to *}\left[\left(1+u(x)\right)^{\frac{1}{u(x)}}\right]^{\lim\limits_{x\to *}(u(x)v(x))}=e^{\lim\limits_{x\to *}(u(x)v(x))},$$

即 $\lim\limits_{x\to *}\left(1+u(x)\right)^{v(x)}=e^{\lim\limits_{x\to *}(u(x)v(x))}$。

例 7. (2003 年考研数一) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=$ ______ 。

【分析】该极限属于1^∞型，可考虑利用第二重要极限的推广进行计算。

解：$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}} = \lim\limits_{x\to 0}(1+(\cos x-1))^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\ln(1+x^2)}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$。

例 8. (2018 年考研数一)若$\lim\limits_{x\to 0}(e^x+ax^2+bx)^{\frac{1}{x^2}}=1$，则(　　)。

A. $a=\frac{1}{2},b=-1$ B. $a=-\frac{1}{2},b=-1$ C. $a=\frac{1}{2},b=1$ D. $a=-\frac{1}{2},b=1$

【分析】该极限属于1^∞型，可考虑转化为“商型”进行计算。

解：注意到

$$\lim_{x\to 0}(e^x+ax^2+bx)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} e^{\ln(e^x+ax^2+bx)^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(e^x+ax^2+bx)}{x^2}},$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+e^x+ax^2+bx-1)}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+ax^2+bx-1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+2ax+b}{2x}}$$

这里利用了当$x\to 0$时，$\ln(1+e^x+ax^2+bx-1)\sim e^x+ax^2+bx-1$以及洛必达法则。因为已知极限为 1，故$\lim\limits_{x\to 0}(e^x+2ax+b)=1+b=0$，从而$b=-1$，代入上面的极限得

$$\lim_{x\to 0}(e^x+ax^2+bx)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+2ax-1}{2x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+2a}{2}} = 1,$$

所以$a=-\frac{1}{2}$。综合以上讨论知，答案为 B。

3. 结论

对于求极限问题，首先要判断所求极限的类型，若属于确定型，就按确定型中具体类型进行计算；若属于待定型，则看属于待定型中的“商型”、“积差型”还是“幂指型”，其中“商型”是最基础的待定型，“积差型”和“幂指型”都要经过转化最终转化为“商型”进行计算，其中，1^∞型除了可以转化为“商型”进行计算外，还可以利用第二重要极限的推广进行计算。确定所求极限的类型至关重要，只有知道所求极限的类型了，才可以按照相应类型的方法进行计算。

基金项目

2018 年度广西高校中青年教师基础能力提升项目(离散系统理论及应用研究，No. 2018KY0327)，广东理工职业学院 2020 年“创新强校工程”项目(创新创业教育背景下的《高等数学》在线开放课程建设，No. 2020LGCQ03-01)，广东开放大学基金项目(离散系统动力学研究，No. RC1926)。

参考文献

[1] 白杰, 刘薇. 微积分中常用的函数极限计算方法及解析[J]. 长春大学学报, 2012, 22(2): 182-184.
[2] 王洪英, 车军领. 微积分学中极限教学法探讨[J]. 山东师范大学学报(自然科学版), 2008, 23(1): 143-144.
[3] 孙聪, 王千. 洛必达法则在求极限中的方法[J]. 高等继续教育学报, 2011, 24(3): 57.
[4] 刘虹. 对求极限方法的总结[J]. 安徽教育学院学报(自然科学版), 1999(1): 50-51.