Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2020, 9(6), 947-958**
Published Online June 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2020.96112

Hans汉斯

Multiple Solutions for a Class of Fractional Advection-Dispersion Equation with Dirichlet Boundary Conditions

Yi Wang

Department of Mathematics, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing Jiangsu
Email: wy182270@nuaa.edu.cn

Received: Jun. 8th, 2020; accepted: Jun. 23rd, 2020; published: Jun. 30th, 2020

Abstract

This article concerns multiple solutions for a coupled system of fractional advection-dispersion equation with Dirichlet boundary conditions. Using variational methods and a three-critical point theorem, we obtain that the fractional system has at least three solutions.

Keywords

Fractional Advection-Dispersion Equation, Coupled System, Variational Methods, Multiple Solutions

一类带有Dirichlet边界条件的分数阶对流弥散方程解的多重性

王　怡

南京航空航天大学数学系，江苏　南京
Email: wy182270@nuaa.edu.cn

收稿日期：2020年6月8日；录用日期：2020年6月23日；发布日期：2020年6月30日

摘　要

本文研究了带有**Dirichlet**边界条件的分数阶对流弥散方程耦合系统的多解问题。基于变分方法和一个三临界点定理，我们得到了该分数阶系统至少有三个解的结果。

文章引用：王怡. 一类带有 Dirichlet 边界条件的分数阶对流弥散方程解的多重性[J]. 应用数学进展，2020，9(6): 947-958. DOI: 10.12677/aam.2020.96112

关键词

分数阶对流弥散方程，耦合系统，变分方法，多重解

1. 引言

本文将研究如下带有两个参数的分数阶对流弥散方程耦合系统的多重解问题。

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}{}_0D_t^{-\beta}\left(u'(t)\right)+\frac{1}{2}{}_tD_T^{-\beta}\left(u'(t)\right)\right)+\lambda F_u\left(t,u(t),v(t)\right)+\mu G_u\left(t,u(t),v(t)\right)=0, & a.e.\ t\in[0,T] \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}{}_0D_t^{-\eta}\left(v'(t)\right)+\frac{1}{2}{}_tD_T^{-\eta}\left(v'(t)\right)\right)+\lambda F_v\left(t,u(t),v(t)\right)+\mu G_v\left(t,u(t),v(t)\right)=0, & a.e.\ t\in[0,T] \\ u(0)=u(T)=0, v(0)=v(T)=0, \end{cases} \tag{1}$$

其中，${}_0D_t^{-\kappa}$ 和 ${}_tD_T^{-\kappa}$ 分别是 $0\le\kappa<1$ 阶的左、右 Riemann-Liouville 分数阶积分，λ 和 μ 是两个正的实参数，$F(t,x,y)$，$G(t,x,y):[0,T]\times R^2\to R$，特别地，在 $t\in[0,T]$ 上，对每一个 $(x,y)\in R^2$，$F(\cdot,x,y)$ 和 $G(\cdot,x,y)$ 是连续函数，且在 R^2 上，对任意的 $t\in[0,T]$，$F(t,\cdot,\cdot)$ 和 $G(t,\cdot,\cdot)$ 是 C^1 函数，且 $F(t,0,0)=G(t,0,0)=0$，F_s，G_s 分别表示 F，G 对 s 的偏导数。

近几年，关于非线性分数阶微分方程解的存在性和多重性问题被广泛的研究，目前，解决此类问题的一些主要方法包括不动点定理，重合度理论，上下解法，单调迭代法等[1] [2] [3] [4]。除上述经典方法之外，变分方法和临界点理论已经成功地应用于研究非线性分数阶边值问题解的存在性和多重性问题，此方法对于研究一些复杂的分数阶微分方程具体重大的意义。然而，由于分数阶边值问题的临界点理论往往很难建立一个合适的空间和变分泛函，因此，迄今为止，变分方法和临界点理论应用于分数阶边值问题解的研究还很少[5] [6] [7] [8] [9]。

在文献[10]中，作者研究了如下带有 p-Laplacian 算子的分数阶微分方程的边界值问题。

$$\begin{cases} {}_tD_b^{\alpha}\left(\frac{1}{a(t)^{p-2}}\varphi\left(a(t)\,{}_aD_t^{\alpha}u(t)\right)\right)=\lambda\left(f_u\left(t,u(t),v(t)\right)+g_u\left(t,u(t),v(t)\right)\right), & t\in[a,b] \\ {}_tD_b^{\beta}\left(\frac{1}{a(t)^{p-2}}\varphi\left(a(t)\,{}_aD_t^{\beta}v(t)\right)\right)=\lambda\left(f_v\left(t,u(t),v(t)\right)+g_v\left(t,u(t),v(t)\right)\right), & t\in[a,b] \\ u(a)=u(b)=0, v(a)=v(b)=0 \end{cases} \tag{2}$$

其中，$[a,b]$ 是任意有界区间，λ 是一个非负的实参数，${}_aD_t^{\alpha}$，${}_aD_T^{\beta}$，${}_tD_b^{\alpha}$ 和 ${}_tD_b^{\beta}$ 分别为 $0<\alpha,\beta\le1$ 阶的左、右 Riemann-Liouville 分数阶导数，函数 $a(t)$，$b(t)\in L^{\infty}([a,b])$，满足 $a_0=\operatorname{ess}\inf_{[a,b]}a(t)>0$，$a^0=\operatorname{ess}\sup_{[a,b]}a(t)>0$，$b_0=\operatorname{ess}\inf_{[a,b]}b(t)>0$，$b^0=\operatorname{ess}\sup_{[a,b]}b(t)>0$，$\varphi_p(s)=|s|^{p-2}s$，$p>1$，且 $f(t,u(t),v(t))$，

$g(t,u(t),v(t)):[a,b]\times R^2\to R$ 为 C^1 函数，f_s，g_s 分别为 f，g 关于 s 的偏导数。首先在 A-R 条件下，作者证明了系统(2)存在无穷多个解，此外，在没有 A-R 条件的情况下，作者得出了系统(2)至少有一个非平凡解存在的结果。

在上述文献的启发之下，本文将利用变分法及一个三临界点定理研究系统(1)的多重解问题，为此，下文将会建立一个合适的函数空间以及系统(1)的变分结构。

2. 预备知识

在本文中 $\alpha=1-\frac{\beta}{2}\in\left(\frac{1}{2},1\right]$，$\delta=1-\frac{\eta}{2}\in\left(\frac{1}{2},1\right]$。

定义 1 令 $0<\tau\le 1$，$1<p<\infty$，分数阶导数空间 S_0^τ 是空间 $C_0^\infty([0,T],R)$ 的闭包，其范数定义如下

$$\|w\|_\tau=\left(\int_0^T|w(t)|^p\mathrm{d}t+\int_0^T\left|{}_0^cD_t^\tau w(t)\right|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}},\forall w\in S_0^\tau$$

显然，如果 $w\in S_0^\tau$，那么 w，${}_0^cD_t^\tau w\in L^p([0,T],R)$，$w(0)=w(T)=0$，$S_0^\tau$ 是一个自反可分空间。

命题 2 ([11])令 $0<\tau\le 1$，$1\le p<\infty$。对所有的 $w\in S_0^\tau$，有

$$\|w\|_{L^p}\le\frac{T^\tau}{\Gamma(\tau+1)}\left\|{}_0^cD_t^\tau w\right\|_{L^p}\tag{3}$$

此外，如果 $\tau>\frac{1}{p}$，且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，那么

$$\|w\|_\infty\le\frac{T^{\tau-\frac{1}{p}}}{\Gamma(\tau)\left((\tau-1)q+1\right)^{\frac{1}{q}}}\left\|{}_0^cD_t^\tau w\right\|_{L^p}\tag{4}$$

由(4)可知，关于空间 S_0^τ 的范数有下面等式成立

$$\|w\|_\tau=\left\|{}_0^cD_t^\tau w\right\|_{L^p}=\left(\int_0^T\left|{}_0^cD_t^\tau w\right|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\tag{5}$$

命题 3 ([11])对于任意的 $w\in S_0^\tau$，则有

$$\begin{aligned}|\cos(\pi\tau)|\int_0^T\left|{}_0^cD_t^\tau w(t)\right|^2\mathrm{d}t&\le-\int_0^T\left({}_0^cD_t^\tau w(t),{}_t^cD_T^\tau w(t)\right)\mathrm{d}t\\&\le\frac{1}{|\cos(\pi\tau)|}\int_0^T\left|{}_0^cD_t^\tau w(t)\right|^2\mathrm{d}t\end{aligned}\tag{6}$$

命题 4 ([11])令 $0<\tau\le 1$，$1<p<\infty$。设 $\tau>\frac{1}{p}$，当序列 $\{w_k\}$ 在空间 S_0^τ 上弱收敛 w，那么在空间 $C_0^\infty([0,T],R)$ 中，$\{w_k\}$ 强收敛到 w，即 $\|w_k-w\|_\infty\to 0$，当 $k\to\infty$。

因此，对于任意的 $u\in S_0^\alpha$，$v\in S_0^\delta$，定义空间 S 表示空间 $S_0^\alpha\times S_0^\delta$，其范数定义为

$$\|(u,v)\|_S=\|u\|_\alpha+\|v\|_\delta$$

显然空间 S 是一个自反可分的 Banach 空间，且紧嵌入到空间 $X=C^0([0,T],R)\times C^0([0,T],R)$ 中。

我们考虑泛函 $T_\lambda:S\to R$，其定义为

$$T_\lambda(u,v)=\Phi(u,v)-\lambda\Psi(u,v)$$

其中：

$$\Phi(u,v):=-\frac{1}{2}\int_0^T\left({}_0^cD_t^{\alpha}u(t),{}_t^cD_T^{\alpha}u(t)\right)\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int_0^T\left({}_0^cD_t^{\delta}v(t),{}_t^cD_T^{\delta}v(t)\right)\mathrm{d}t \tag{7}$$

$$\Psi(u,v):=\int_0^T F\left(t,u(t),v(t)\right)+\frac{\mu}{\lambda}G\left(t,u(t),v(t)\right)\mathrm{d}t \tag{8}$$

显然，Φ，Ψ 是 Gâteaux 可微泛函，则对任意 $(x,y)\in S$，其在点 $(u,v)\in S$ 处的导数 $\Phi'(u,v)$，$\Psi'(u,v)\in S^*$ 分别为

$$\begin{aligned}\Phi'(u,v)(x,y)=&-\frac{1}{2}\int_0^T\left({}_0^cD_t^{\alpha}u(t),{}_t^cD_T^{\alpha}x(t)\right)+\left({}_t^cD_T^{\alpha}u(t),{}_0^cD_t^{\alpha}x(t)\right)\mathrm{d}t\\&-\frac{1}{2}\int_0^T\left({}_0^cD_t^{\delta}v(t),{}_t^cD_T^{\delta}y(t)\right)+\left({}_t^cD_T^{\delta}v(t),{}_0^cD_t^{\delta}y(t)\right)\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\Psi'(u,v)(x,y)=&\int_0^T F_u\left(t,u(t),v(t)\right)\cdot x(t)+F_v\left(t,u(t),v(t)\right)\cdot y(t)\\&+\frac{\mu}{\lambda}\left(G_u\left(t,u(t),v(t)\right)\cdot x(t)+G_v\left(t,u(t),v(t)\right)\cdot y(t)\right)\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{10}$$

因此，如果 $(u,v)\in S$ 是等式 $T_\lambda'(u,v):=\Phi'(u,v)-\lambda\Psi'(u,v)$ 的解，那么 (u,v) 是问题(1)的弱解。

定理 5 [12]令 E 是一个自反可分的实 Banach 空间，在其上定义一个单调、强制、半连续算子 $A:E\to E^*$，则下面的结果成立：

a) 如果算子 A 严格单调，那么其存在可逆算子 $A^{-1}:E^*\to E$，且 A^{-1} 是严格单调、半连续、有界算子。

b) 如果算子 A 强单调，那么 A^{-1} Lipschitz 连续。

定理 6 [13]令 E 是一个自反可分的实 Banach 空间，$\Phi:E\to R$ 为序列弱下半连续、强制、连续 Gâteaux 可微算子，它的 Gâteaux 导数在空间 E^* 上存在一个连续的逆算子，$\Psi:E\to R$ 是连续 Gâteaux 可微泛函，其 Gâteaux 导数是紧的，且 $\Phi(0)=\Psi(0)$。设存在 $\rho>0$，$\tilde{x}\in E$，使得 $\rho<\Phi(\tilde{x})$，那么

i) $\sup\limits_{\Phi(x)\le\rho}\Psi(x)<\rho\dfrac{\Psi(\tilde{x})}{\Phi(\tilde{x})}$；

ii) 对每个 $\lambda\in\Lambda_\rho:=\left(\dfrac{\Phi(\tilde{x})}{\Psi(\tilde{x})},\dfrac{\rho}{\sup\limits_{\Phi(x)\le\rho}\Psi(x)}\right)$，泛函 $T_\lambda=\Phi-\lambda\Psi$ 是强制的，则对每个 $\lambda\in\Lambda_\rho$，泛函 $T_\lambda=\Phi-\lambda\Psi$ 在 E 上至少有三个不同的临界点。

3. 主要结果

引理 7 令 $\frac{1}{2}<\alpha,\delta\le 1$，$(u,v)\in S$。函数 Φ，Ψ 分别定义为式(7)，(8)，则 $\Phi:S\to R$ 是一个序列弱下半连续，强制，连续 Gâteaux 泛函可微，它的 Gâteaux 导数在空间 S^* 上有一个连续的逆，$\Psi:S\to R$ 是一个连续的 Gâteaux 可微泛函，它的 Gâteaux 导数是紧的。

证明：事实上，由于 S 紧嵌入到 X 中，因此 Φ 是一个 Gâteaux 可微泛函，它在点 $(u,v)\in S$ 处的 Gâteaux 导数为 $\Phi'(u,v)\in S^*$，可见式(9)。此外，从式(6)可知，当 $\|u\|\to+\infty$，$\|v\|\to+\infty$ 时，得

$$\Phi(u,v)\ge\frac{1}{2}\left|\cos(\pi\alpha)\right|\|u\|_\alpha^2+\frac{1}{2}\left|\cos(\pi\delta)\right|\|v\|_\delta^2\to+\infty$$

从而可知泛函 Φ 是强制的。下面，我们将证明 Φ' 在 S^* 上有一个连续的逆，令 $U=(u,v)$，$V=(x,y)$，根据式(9)，得

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \Phi'(U)-\Phi'(V),U-V\right\rangle \\
&=-\int_0^T\left({}_0^cD_t^\alpha\left(u(t)-x(t)\right),{}_t^cD_T^\alpha\left(u(t)-x(t)\right)\right)\mathrm{d}t-\int_0^T\left({}_0^cD_t^\delta\left(v(t)-y(t)\right),{}_t^cD_T^\delta\left(v(t)-y(t)\right)\right)\mathrm{d}t \\
&\ge\left|\cos(\pi\alpha)\right|\left\|u(t)-x(t)\right\|_\alpha^2+\left|\cos(\pi\delta)\right|\left\|v(t)-y(t)\right\|_\delta^2 \\
&>0
\end{aligned}
$$

这表明Φ'是严格单调的，又考虑到S是自反的，且在空间S中，当$n\to\infty$时，$(u_n,v_n)\to(u,v)$，则在空间S^*中，当$n\to\infty$时，$\Phi'(u_n,v_n)$弱收敛到$\Phi'(u,v)$，则Φ'是半连续的，通过定理5，得到$(\Phi')^{-1}$存在且连续。此外，因为Φ是下半连续和凸的，那么它是序列弱下半连续泛函([14]定理1.2)。

考虑泛函Ψ，显然，由式(8)，(10)可知，Ψ是连续的Gâteaux可微泛函，它的导数为$\Psi':S\to S^*$。此外，对于固定的$(u,v)\in S$，设$\{(u_n,v_n)\}\subset S$，当$n\to+\infty$时，在空间S中，(u_n,v_n)弱收敛到(u,v)，那么(u_n,v_n)一致收敛到(u,v)，即

$$
\begin{aligned}
\limsup_{n\to+\infty}\Psi(u_n,v_n)&\le\int_0^T\limsup_{n\to+\infty}\left(F(t,u_n,v_n)+\frac{\mu}{\lambda}G(t,u_n,v_n)\right)\mathrm{d}t \\
&=\int_0^T F(t,u,v)+\frac{\mu}{\lambda}G(t,u,v)\mathrm{d}t \\
&=\Psi(u,v)
\end{aligned}
\tag{11}
$$

式(11)表明Ψ是序列弱上半连续。另一方面，在R^2上，对所有的$t\in[0,T]$，由于$F(t,\cdot,\cdot)$，$G(t,\cdot,\cdot)$是C^1函数，那么它是连续函数，则当$n\to+\infty$时，$F(t,u_n,v_n)\to F(t,u,v)$，$G(t,u_n,v_n)\to G(t,u,v)$，利用Lebesgue控制收敛定理，$\Psi'(u_n,v_n)$强收敛到$\Psi'(u,v)$，则Ψ'在S上是强连续的，则Ψ'是紧算子，因此引理7得证。

我们给出了一些符号，这些符号将在后面的证明中使用。

$$
M:=\max\left\{\frac{T^{2\alpha-1}}{\left|\cos(\pi\alpha)\right|\Gamma^2(\alpha)(2\alpha-1)},\frac{T^{2\delta-1}}{\left|\cos(\pi\delta)\right|\Gamma^2(\delta)(2\delta-1)}\right\}
$$

$$
c:=\min\left\{\left|\cos(\pi\alpha)\right|,\left|\cos(\pi\delta)\right|\right\}
$$

$$
\varpi_{\alpha,\delta}:=\frac{\|\omega_1\|_\alpha^2}{2\left|\cos(\pi\alpha)\right|}+\frac{\|\omega_2\|_\delta^2}{2\left|\cos(\pi\delta)\right|}
$$

$$
\xi(k):=\left\{(\sigma,\varsigma)\in R^2:\frac{1}{2}\sigma^2+\frac{1}{2}\varsigma^2\le k\right\}
$$

$$
\vartheta_1:=\min\left\{\frac{k-M\lambda\int_0^T\max_{(\sigma,\varsigma)\in\xi(k)}F(t,\sigma,\varsigma)\mathrm{d}t}{MG^k},\frac{\varpi_{\alpha,\delta}-\lambda\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}}F(t,d_1,d_2)\mathrm{d}t}{TG_d}\right\}
$$

定理8 设存在正常数k和一个函数$\omega=(\omega_1,\omega_2)$满足

$$
k<\frac{M}{2}c\left(\|\omega_1\|_\alpha^2+\|\omega_2\|_\delta^2\right)
\tag{12}
$$

且

(H1)对每一个$(t,\sigma,\varsigma)\in[0,T]\times[0,d_1]\times[0,d_2]$，$F(t,\sigma,\varsigma)\ge0$；

(H2) $\dfrac{\int_0^T \max\limits_{(\sigma,\varsigma)\in\xi(k)} F(t,\sigma,\varsigma)\mathrm{d}t}{k} < \dfrac{\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} F(t,d_1,d_2)\mathrm{d}t}{M\varpi_{\alpha,\delta}}$

(H3) $\limsup\limits_{|\sigma|\to+\infty,|\varsigma|\to+\infty} \dfrac{\sup\limits_{t\in[0,T]} F(t,\sigma,\varsigma)}{\sigma^2+\varsigma^2} < \dfrac{\int_0^T \max\limits_{(\sigma,\varsigma)\in\xi(k)} F(t,\sigma,\varsigma)\mathrm{d}t}{4kT}\min\left\{2|\cos(\pi\alpha)|-c,2|\cos(\pi\delta)|-c\right\}$

则，对任意的 $\lambda\in\Lambda:=(\lambda_1,\lambda_2)$，对每一个连续函数 $G:[0,T]\times R\times R\to R$，

$$\limsup_{|\sigma|\to+\infty,|\varsigma|\to+\infty} \frac{\sup\limits_{t\in[0,T]} G(t,\sigma,\varsigma)}{\sigma^2+\varsigma^2} < +\infty$$

存在 $\vartheta>0$，对任意的 $\mu\in[0,\vartheta)$，系统(1)至少存在三个解。其中：令 $\frac{z}{0}=+\infty$，且

$$\lambda_1:=\frac{\varpi_{\alpha,\delta}}{\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} F(t,d_1,d_2)\mathrm{d}t},\quad \lambda_2:=\frac{k}{M\int_0^T \max\limits_{(\sigma,\varsigma)\in\xi(k)} F(t,\sigma,\varsigma)\mathrm{d}t}$$

$$\vartheta:=\min\left\{\vartheta_1,\frac{1}{\max\left\{0,\frac{4TM}{c}\limsup\limits_{|\sigma|\to+\infty,|\varsigma|\to+\infty}\frac{\sup\limits_{t\in[0,T]} G(t,\sigma,\varsigma)}{\sigma^2+\varsigma^2}\right\}}\right\}$$

证明：考虑到引理 7，为了证明问题(1)存在多重解，我们只需要证明定理 6 的条件 i)和 ii)成立。令 $(u_0,v_0)=(0,0)$，则根据式(7)及(8)可知，$\Phi(0,0)=0$，$\Psi(0,0)=0$。

令 $\omega=(\omega_1(t),\omega_2(t))$，且

$$\omega_1(t)=\begin{cases}\frac{4d_1}{T}t, & t\in\left[0,\frac{T}{4}\right),\\ d_1, & t\in\left[\frac{T}{4},\frac{3T}{4}\right],\\ \frac{4d_1}{T}(T-t), & t\in\left(\frac{3T}{4},T\right],\end{cases}\quad \omega_2(t)=\begin{cases}\frac{4d_2}{T}t, & t\in\left[0,\frac{T}{4}\right)\\ d_2, & t\in\left[\frac{T}{4},\frac{3T}{4}\right]\\ \frac{4d_2}{T}(T-t), & t\in\left(\frac{3T}{4},T\right]\end{cases}$$

不难发现 $\omega_i(0)=\omega_i(T)=0$，$\omega_i\in L^2([0,T])$，$i=1,2$。

通过计算，有

$${}_0^cD_t^\alpha\omega_1(t)=\begin{cases}\frac{4d_1}{T\Gamma(2-\alpha)}t^{1-\alpha}, & t\in\left[0,\frac{T}{4}\right)\\ \frac{4d_1}{T\Gamma(2-\alpha)}\left[t^{1-\alpha}-\left(t-\frac{T}{4}\right)^{1-\alpha}\right], & t\in\left[\frac{T}{4},\frac{3T}{4}\right]\\ \frac{4d_1}{T\Gamma(2-\alpha)}\left[t^{1-\alpha}-\left(t-\frac{T}{4}\right)^{1-\alpha}+\left(t-\frac{3T}{4}\right)^{1-\alpha}\right], & t\in\left(\frac{3T}{4},T\right]\end{cases}$$

$$
{}_0^cD_t^{\delta}\omega_2(t)=\begin{cases}\dfrac{4d_2}{T\Gamma(2-\delta)}t^{1-\delta}, & t\in\left[0,\dfrac{T}{4}\right)\\ \dfrac{4d_2}{T\Gamma(2-\delta)}\left[t^{1-\delta}-\left(t-\dfrac{T}{4}\right)^{1-\delta}\right], & t\in\left[\dfrac{T}{4},\dfrac{3T}{4}\right]\\ \dfrac{4d_2}{T\Gamma(2-\delta)}\left[t^{1-\delta}-\left(t-\dfrac{T}{4}\right)^{1-\delta}+\left(t-\dfrac{3T}{4}\right)^{1-\delta}\right], & t\in\left(\dfrac{3T}{4},T\right]\end{cases}
$$

显然，在$t\in[0,T]$上，${}_0^cD_t^{\alpha}\omega_1(t)$，${}_0^cD_t^{\delta}\omega_2(t)$是连续的，且

$$
\begin{aligned}\|\omega_1\|_\alpha^2=\frac{16d_1^2}{T^2\Gamma^2(2-\alpha)}&\left\{\int_0^{\frac{T}{4}}t^{2-2\alpha}\mathrm{d}t+\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}}\left[t^{1-\alpha}-\left(t-\frac{T}{4}\right)^{1-\alpha}\right]^2\mathrm{d}t\right.\\&\left.+\int_{\frac{3T}{4}}^{T}\left[t^{1-\alpha}-\left(t-\frac{T}{4}\right)^{1-\alpha}+\left(t-\frac{3T}{4}\right)^{1-\alpha}\right]^2\mathrm{d}t\right\}\end{aligned}\tag{13}
$$

$$
\begin{aligned}\|\omega_2\|_\delta^2=\frac{16d_2^2}{T^2\Gamma^2(2-\delta)}&\left\{\int_0^{\frac{T}{4}}t^{2-2\delta}\mathrm{d}t+\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}}\left[t^{1-\delta}-\left(t-\frac{T}{4}\right)^{1-\delta}\right]^2\mathrm{d}t\right.\\&\left.+\int_{\frac{3T}{4}}^{T}\left[t^{1-\delta}-\left(t-\frac{T}{4}\right)^{1-\delta}+\left(t-\frac{3T}{4}\right)^{1-\delta}\right]^2\mathrm{d}t\right\}\end{aligned}\tag{14}
$$

令$\rho=\dfrac{k}{M}$，则根据式(6)，(7)，(12)得

$$
\Phi(\omega_1,\omega_2)\ge\frac{1}{2}|\cos(\pi\alpha)|\|\omega_1\|_\alpha^2+\frac{1}{2}|\cos(\pi\delta)|\|\omega_2\|_\delta^2>\frac{1}{2}c\left(\|\omega_1\|_\alpha^2+\|\omega_2\|_\delta^2\right)>\rho
$$

接下来，证明定理6的条件i)成立。通过使用定理8的条件(H1)，以及$0\le\omega_i(t)\le d_i$，$i=1,2$，得

$$
\begin{aligned}\Psi(\omega_1,\omega_2)&=\int_0^T F(t,\omega_1,\omega_2)+\frac{\mu}{\lambda}G(t,\omega_1,\omega_2)\mathrm{d}t\\&\ge\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}}F(t,d_1,d_2)+\frac{\mu}{\lambda}\int_0^T G(t,\omega_1,\omega_2)\mathrm{d}t\\&\ge\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}}F(t,d_1,d_2)\mathrm{d}t+\frac{\mu}{\lambda}TG_d\end{aligned}\tag{15}
$$

其中，$G_d:=\inf\limits_{[0,T]\times[0,d_1]\times[0,d_2]}G$，对于所有的$d_1,d_2>0$，显然$G_d\le0$。

根据式(4)，(6)，(7)得

$$
\begin{aligned}&\{(u,v)\in X:\Phi(u,v)\le\rho\}\\&=\left\{(u,v)\in X:-\frac{1}{2}\int_0^T\left({}_0^cD_t^{\alpha}u(t),{}_t^cD_T^{\alpha}u(t)\right)\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int_0^T\left({}_0^cD_t^{\delta}v(t),{}_t^cD_T^{\delta}v(t)\right)\mathrm{d}t\le\rho\right\}\\&\subseteq\left\{(u,v)\in X:\frac{|\cos(\pi\alpha)|\Gamma^2(\alpha)(2\alpha-1)}{2\mathrm{T}^{2\alpha-1}}\|u\|_\infty^2+\frac{|\cos(\pi\delta)|\Gamma^2(\delta)(2\delta-1)}{2\mathrm{T}^{2\delta-1}}\|v\|_\infty^2\le\rho\right\}\\&\subseteq\left\{(u,v)\in X:\frac{|u(t)|^2}{2}+\frac{|v(t)|^2}{2}\le M\rho=k,\forall t\in[0,T]\right\}\end{aligned}
$$

因此，有

$$\frac{\sup\limits_{\Phi(u,v)\le\rho}\Psi(u,v)}{\rho}\le\frac{\int_0^T\max\limits_{(\sigma,\varsigma)\in\xi(k)}F(t,\sigma,\varsigma)\mathrm{d}t+\frac{\mu}{\lambda}\int_0^T\max\limits_{(\sigma,\varsigma)\in\xi(k)}G(t,\sigma,\varsigma)\mathrm{d}t}{\frac{k}{M}}$$
$$=\frac{M}{k}\left(\int_0^T\max\limits_{(\sigma,\varsigma)\in\xi(k)}F(t,\sigma,\varsigma)\mathrm{d}t+\frac{\mu}{\lambda}G^k\right)$$

其中，$G^k:=\int_0^T\max\limits_{(\sigma,\varsigma)\in\xi(k)}G(t,\sigma,\varsigma)\mathrm{d}t$，对 $\forall k>0$，$G^k\ge 0$。

如果 $G^k=0$，得

$$\frac{\sup\limits_{\Phi(u,v)\le\rho}\Psi(u,v)}{\rho}<\frac{1}{\lambda}\tag{16}$$

如果 $G^k>0$，为了使式(16)仍然成立，得

$$\mu<\frac{k-M\lambda\int_0^T\max\limits_{(\sigma,\varsigma)\in\xi(k)}F(t,\sigma,\varsigma)\mathrm{d}t}{MG^k}$$

另一方面，根据式(6)，(7)，显然

$$\Phi(\omega_1,\omega_2)\le\frac{\|\omega_1\|_\alpha^2}{2|\cos(\pi\alpha)|}+\frac{\|\omega_2\|_\beta^2}{2|\cos(\pi\beta)|}=\varpi_{\alpha,\delta}\tag{17}$$

则由式(15)，(17)可知，

$$\frac{\Psi(\omega)}{\Phi(\omega)}\ge\frac{\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}}F(t,d_1,d_2)\mathrm{d}t+\frac{\mu}{\lambda}TG_d}{\varpi_{\alpha,\delta}}$$

如果 $G_d=0$，得

$$\frac{\Psi(\omega)}{\Phi(\omega)}\ge\frac{1}{\lambda}\tag{18}$$

如果 $G_d<0$，为了使式(18)成立，得

$$\mu<\frac{\varpi_{\alpha,\delta}-\lambda\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}}F(t,d_1,d_2)\mathrm{d}t}{TG_d}$$

因此，由式(16)，(18)可知，定理 6 的条件 i)得证。

现在，我们验证定理 6 的条件 ii)。为了证明泛函 T_λ 的强制性，我们假设

$$\limsup_{|\sigma|\to+\infty,|\varsigma|\to+\infty}\frac{\sup\limits_{t\in[0,T]}F(t,\sigma,\varsigma)}{\sigma^2+\varsigma^2}\ge 0$$

固定一个 ε，使得下列不等式成立

$$\limsup_{|\sigma|\to+\infty,|\varsigma|\to+\infty}\frac{\sup\limits_{t\in[0,T]}F(t,\sigma,\varsigma)}{\sigma^2+\varsigma^2}<\varepsilon<\frac{\int_0^T\max\limits_{(\sigma,\varsigma)\in\xi(k)}F(t,\sigma,\varsigma)\mathrm{d}t}{4kT}\min\left\{2|\cos(\pi\alpha)|-c,2|\cos(\pi\delta)|-c\right\}$$

则存在一个函数 $\phi_\varepsilon(t)\in L^1([0,T])$ 使得

$$F(t,\sigma,\varsigma)\le\varepsilon(\sigma^2+\varsigma^2)+\phi_\varepsilon(t)$$

其中 $t\in[0,T]$，$\sigma,\varsigma\in R$。那么由 λ 的范围以及上式，对于每一个 $(u,v)\in S$，得

$$\begin{aligned}\lambda\int_0^T F(t,u(t),v(t))\mathrm{d}t&\le\lambda\left(\varepsilon\int_0^T\left(u^2(t)+v^2(t)\right)\mathrm{d}t+\int_0^T\phi_\varepsilon(t)\mathrm{d}t\right)\\&<\frac{k}{M\int_0^T\max\limits_{(\sigma,\varsigma)\in\xi(k)}F(t,\sigma,\varsigma)\mathrm{d}t}\left(\varepsilon MT\left(\|u\|_\alpha^2+\|v\|_\delta^2\right)+\|\phi_\varepsilon\|_{L^1([0,T])}\right)\end{aligned}\tag{19}$$

由于 $\mu<\vartheta$，则有

$$\limsup_{|\sigma|\to+\infty,|\varsigma|\to+\infty}\frac{\sup\limits_{t\in[0,T]}G(t,\sigma,\varsigma)}{\sigma^2+\varsigma^2}<\frac{c}{4T\mu M}$$

那么存在一个函数 $\phi_\mu\in L^1([0,T])$，使得对每一个 $t\in[0,T]$，$\sigma,\varsigma\in R$，有

$$G(t,\sigma,\varsigma)\le\frac{c}{4T\mu M}(\sigma^2+\varsigma^2)+\phi_\mu(t)$$

因此，我们有

$$\int_0^T G(t,u(t),v(t))\mathrm{d}t\le\frac{c}{4T\mu M}\int_0^T u^2(t)+v^2(t)\mathrm{d}t+\int_0^T\phi_\mu(t)\mathrm{d}t\le\frac{c}{4\mu}\left(\|u\|_\alpha^2+\|v\|_\delta^2\right)+\|\phi_\mu\|_{L^1([0,T])}\tag{20}$$

则根据式(6)，(7)，(8)，(19)，(20)，当 $\|(u,v)\|_S\to+\infty$ 时，得

$$\begin{aligned}T_\lambda(u,v)&\ge\frac{|\cos(\pi\alpha)|}{2}\|u\|_\alpha^2+\frac{|\cos(\pi\delta)|}{2}\|v\|_\delta^2\\&\quad-\frac{k}{M\int_0^T\max\limits_{(\sigma,\varsigma)\in\xi(k)}F(t,\sigma,\varsigma)\mathrm{d}t}\left(\varepsilon MT\left(\|u\|_\alpha^2+\|v\|_\delta^2\right)+\|\phi_\varepsilon\|_{L^1([0,T])}\right)\\&\quad-\frac{c}{4}\left(\|u\|_\alpha^2+\|v\|_\delta^2\right)-\mu\|\phi_\mu\|_{L^1([0,T])}\\&\ge\left(\frac{1}{2}|\cos(\pi\alpha)|-\frac{k\varepsilon T}{\int_0^T\max\limits_{(\sigma,\varsigma)\in\xi(k)}F(t,\sigma,\varsigma)\mathrm{d}t}-\frac{c}{4}\right)\|u\|_\alpha^2\\&\quad+\left(\frac{1}{2}|\cos(\pi\delta)|-\frac{k\varepsilon T}{\int_0^T\max\limits_{(\sigma,\varsigma)\in\xi(k)}F(t,\sigma,\varsigma)\mathrm{d}t}-\frac{c}{4}\right)\|u\|_\delta^2\\&\quad-\frac{k}{M\int_0^T\max\limits_{(\sigma,\varsigma)\in\xi(k)}F(t,\sigma,\varsigma)\mathrm{d}t}\|\phi_\varepsilon\|_{L^1([0,T])}-\mu\|\phi_\mu\|_{L^1([0,T])}\\&\to+\infty\end{aligned}$$

即泛函 $T_\lambda(u,v)=\Phi(u,v)-\lambda\Psi(u,v)$ 是强制的。

另一方面，如果

$$\limsup_{|\sigma|\to+\infty,|\varsigma|\to+\infty}\frac{\sup\limits_{t\in[0,T]}F(t,\sigma,\varsigma)}{\sigma^2+\varsigma^2}<0$$

那么存在一个函数 $\phi_\varepsilon \in L^1([0,T])$，满足 $F(t,\sigma,\varsigma) \le \phi_\varepsilon(t)$，对于每一个 $t \in [0,T]$，$\sigma,\varsigma \in R$。和前面证明过程相似，当 $\|(u,v)\|_S \to +\infty$，我们可得到

$$\begin{aligned}T_\lambda(u,v) &= \Phi(u,v) - \lambda\Psi(u,v)\\ &\ge \left(\frac{|\cos(\pi\alpha)|}{2} - \frac{c}{4}\right)\|u\|_\alpha^2 + \left(\frac{|\cos(\pi\delta)|}{2} - \frac{c}{4}\right)\|v\|_\delta^2\\ &\quad - \frac{k}{M\int_0^T \max\limits_{(\sigma,\varsigma)\in\xi(k)} F(t,\sigma,\varsigma)\mathrm{d}t}\|\phi_\varepsilon\|_{L^1([0,T])} - \mu\|\phi_\mu\|_{L^1([0,T])}\\ &\to +\infty\end{aligned}$$

在上述两种情况中，$T_\lambda(u,v)$ 的强制性成立，则定理 6 的条件 ii)得证。

根据式(16)，(18)可知

$$\lambda \in \Lambda \subseteq \left(\frac{\Phi(\omega)}{\Psi(\omega)}, \frac{\rho}{\sup\limits_{\Phi(u,v)\le\rho}\Psi(u,v)}\right)$$

则根据定理 6，泛函 $T_\lambda(u,v)$ 至少存在三个临界点，证明完成。

例子： 令 $\beta = 0.8$，$\eta = 0.4$，$T = 1$，则系统(1)变成下面的形式

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}\,{}_0D_t^{-0.8}(u'(t)) + \dfrac{1}{2}\,{}_tD_1^{-0.8}(u'(t))\right) + \lambda F_u(t,u(t),v(t)) + \mu G_u(t,u(t),v(t)) = 0, & a.e.\, t\in[0,1]\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{2}\,{}_0D_t^{-0.4}(v'(t)) + \dfrac{1}{2}\,{}_tD_1^{-0.4}(v'(t))\right) + \lambda F_v(t,u(t),v(t)) + \mu G_v(t,u(t),v(t)) = 0, & a.e.\, t\in[0,1]\\ u(0) = u(1) = 0, v(0) = v(1) = 0\end{cases} \quad (21)$$

其中：$F(t,u,v) = (1+t)H(u,v)$，$G(t,u,v) = (1+t^2)K(u,v)$，

$$H(u,v) := \begin{cases}(u^2+v^2)^2, & u^2+v^2 \le 1,\\ 8(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}} - 5(u^2+v^2)^{\frac{1}{3}}, & u^2+v^2 > 1.\end{cases}$$

$$K(u,v) := \begin{cases}(u^2+v^2)^3, & u^2+v^2 \le 1,\\ \dfrac{1}{2}(u^2+v^2)^{\frac{1}{3}} + \dfrac{1}{16}(u^2+v^2)^{\frac{1}{4}}, & u^2+v^2 > 1.\end{cases}$$

显然，对所有的 $t \in [0,1]$，$F(t,0,0) = 0$，$G(t,0,0) = 0$，计算可得

$$M = \max\left\{\frac{1}{|\cos(0.6\pi)|\Gamma^2(0.6)\times 0.2}, \frac{1}{|\cos(0.8\pi)|\Gamma^2(0.8)\times 0.6}\right\} \approx 7.296$$

$$c = \min\{|\cos(0.6\pi)|, |\cos(0.8\pi)|\} \approx 0.309$$

令

$$\omega_1 := \begin{cases} t, & t \in \left[0, \frac{1}{4}\right), \\ \frac{1}{4}, & t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right], \\ 1-t, & t \in \left(\frac{3}{4}, 1\right]. \end{cases} \quad \omega_2 := \begin{cases} 2t, & t \in \left[0, \frac{1}{4}\right), \\ \frac{1}{2}, & t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right], \\ 2(1-t), & t \in \left(\frac{3}{4}, 1\right]. \end{cases}$$

则有 $\|\omega_1\|_{0.6}^2 \approx 0.183$，$\|\omega_2\|_{0.8}^2 \approx 1.131$，$\varpi_{\alpha,\delta} \approx 0.995$，取 $\rho = 1\times 10^{-4}$，则 $k = \rho \times M \approx 7.296\times 10^{-4}$，得

$$\frac{M}{2} c\left(\|\omega_1\|_{0.6}^2 + \|\omega_2\|_{0.8}^2\right) \approx 1.481 > k$$

显然，对每一个 $(t,\sigma,\varsigma) \in [0,1] \times \left[0, \frac{1}{4}\right] \times \left[0, \frac{1}{2}\right]$，$F(t,\sigma,\varsigma) \ge 0$，

且

$$0.004 \approx \frac{\int_0^1 \max_{(\sigma,\varsigma)\in\xi(k)} F(t,\sigma,\varsigma)\,\mathrm{d}t}{k} < \frac{\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} F(t,d_1,d_2)\,\mathrm{d}t}{M\varpi_{\alpha,\delta}} \approx 0.01$$

$$\begin{aligned} 0 &= \limsup_{|\sigma|\to+\infty, |\varsigma|\to+\infty} \frac{\sup_{t\in[0,1]} F(t,\sigma,\varsigma)}{\sigma^2 + \varsigma^2} \\ &< \frac{\int_0^1 \max_{(\sigma,\varsigma)\in\xi(k)} F(t,\sigma,\varsigma)\,\mathrm{d}t}{4k} \min\left\{2\left|\cos(0.6\pi)\right| - c, 2\left|\cos(0.8\pi)\right| - c\right\} \\ &\approx 3.38\times 10^{-4} \end{aligned}$$

$$\limsup_{|\sigma|\to+\infty, |\varsigma|\to+\infty} \frac{\sup_{t\in[0,1]} G(t,\sigma,\varsigma)}{\sigma^2 + \varsigma^2} = 0 < +\infty$$

则定理 8 的所有条件成立，即对任意的 $\lambda \in (13.585, 31.31)$，这里取 $\lambda = 25$，则对任意的 $\mu \in [0, 4865.819)$，系统(21)在空间 S 中至少有三个解。

致　谢

感谢导师陈芳启教授的悉心指导！

基金项目

国家自然科学基金(11872201)。

参考文献

[1] Ahmad, B., Ntouyas, S.K. and Alsaedi, A. (2016) On a Coupled System of Fractional Differential Equations with Coupled Nonlocal and Integral Boundary Conditions. *Chaos Solitons Fractals*, **83**, 234-241. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2015.12.014

[2] Peng, L. and Zhou, Y. (2015) Bifurcation from Interval and Positive Solutions of the Three-Point Boundary Value Problem for Fractional Differential Equations. *Applied Mathematics and Computation*, **257**, 458-466. https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.11.092

[3] Jia, M. and Liu, X. (2014) Multiplicity of Solutions for Integral Boundary Value Problems of Fractional Differential Equations with Upper and Lower Solutions. *Applied Mathematics and Computation*, **232**, 313-323. https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.01.073

[4] Zhang, S. (2011) Existence of ASolution for the Fractional Differential Equation with Nonlinear Boundary Conditions. *Computational &Applied Mathematics*, **61**, 1202-1208. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2010.12.071

[5] Ferrara, M. and Hadjian, A. (2015) Variational Approach to Fractional Boundary Value Problems with Two Control Parameters. *Electronic Journal of Differential Equations*, **2015**, 1-15.

[6] Rodríguez-López, R. and Tersian, S. (2014) Multiple Solutions to Boundary Value Problem for Impulsive Fractional Differential Equations. *Fractional Calculus & Applied Analysis*, **17**, 1016-1038. https://doi.org/10.2478/s13540-014-0212-2

[7] Hu, Z., Liu, W. and Chen, T. (2016) The Existence of a Ground State Solution for a Class of Fractional Differential Equation with p-Laplacian Operator. *Boundary Value Problem*, **2016**, 1-12. https://doi.org/10.1186/s13661-016-0557-z

[8] Zhao, Y. and Tang, L. (2017) Multiplicity Results for Impulsive Fractional Differential Equations with p-Laplacian via Variational Methods. *Boundary Value Problem*, **2017**, 1-15. https://doi.org/10.1186/s13661-017-0855-0

[9] Zhao, Y., Chen, H. and Zhang, Q. (2015) Infinitely Many Solutions for Fractional Differential System via Variational Method. *Journal of Applied Mathematics and Computation*, **50**, 589-609. https://doi.org/10.1007/s12190-015-0886-6

[10] Li, D., Chen, F. and An, Y. (2018) Existence and Multiplicity of Nontrivial Solutions for Nonlinear Fractional Differential Systems with p-Laplacian via Critical Point Theory. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **41**, 3197-3212. https://doi.org/10.1002/mma.4810

[11] Jiao, F. and Zhou, Y. (2011) Existence of Solutions for a Class of Fractional Boundary Value Problems via Critical Point Theory. *Computers & Mathematics with Applications*, **62**, 1181-1199. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2011.03.086

[12] Zeidler, E. (1985) Nonlinear Functional Analysis and Its Applications. Vol. II, Springer, Berlin-Heidelberg-New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5020-3

[13] Bonanno, G. and Marano, S.A. (2010) On the Structure of the Critical Set of Non-Differentiable Functions with a Weak Compactness Condition. *Applicable Analysis*, **89**, 1-10. https://doi.org/10.1080/00036810903397438

[14] Mawhin, J. and Willem, M. (1989) Critical Point Theory and Hamiltonian Systems. Springer, Berlin. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-2061-7