

谱正Lévy过程下的Ratchet分红策略与Barrier策略的混合研究

刘海晓, 吕玉华

曲阜师范大学统计学院, 山东 曲阜

收稿日期: 2021年10月5日; 录用日期: 2021年10月26日; 发布日期: 2021年11月8日

摘要

本文主要研究谱正Lévy过程下的混合分红策略。对公司的盈余过程进行如下两种策略的混合: 首先让其执行Ratchet分红策略; 而后待盈余水平到达预先设置的高度界限时, 立即执行Barrier分红策略, 将所有投资收益全部分红给公司股东。文章主要结果是得出了这种混合策略下的累积折现期望分红值函数。

关键词

谱正Lévy过程, Ratchet策略, Barrier策略, 分红值函数, 分红率

Mixed Research on Ratchet Dividend Strategy and Barrier Strategy under Positive Lévy Process

Haixiao Liu, Yuhua Lyu

Statistics College, Qufu Normal University, Qufu Shandong

Received: Oct. 5th, 2021; accepted: Oct. 26th, 2021; published: Nov. 8th, 2021

Abstract

This paper mainly studies the mixed dividend strategy under the positive Lévy process. The earnings process of the company is a mix of the following two strategies: First let them execute the Ratchet dividend strategy. And then execute the Barrier dividend strategy immediately after the surplus level reaches the preset high limit. Distribute all investment income to the shareholders of the company. Finally, the cumulative discounted expected dividend value function under the

mixed strategy is obtained.

Keywords

Spectral Positive Lévy Process, Ratchet Strategy, The Barrier Strategy, Dividend Value Function, Dividend Rate

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

De Finetti 于 1957 年提出分红的概念, 此后 60 年, 风险理论中对于分红策略的研究一直是热门课题, 先后出现了 Barrier 分红策略、Threshold 分红策略[1], 后来学者们纷纷研究其最优性以及这两种策略的混合策略, 随后, 对 Lévy 过程研究的出现, 为风险理论提供了新的思路[2] [3] [4]。相较于经典风险模型, 其对偶模型可以很好地刻画主要从事发明或勘探业务的公司盈余状况。近些年, 随着精算学的发展, 很多学者开始关注对偶模型中的分红问题[5] [6] [7]。近几年 Albrecher 又提出了 Ratchet 分红策略[8]。

2. 新混合策略简介

在 Barrier 策略中, 要求在公司盈余过程首次超过给定的参数 b , 那么多出的部分全部拿走用来做分红资金[1], 盈余过程继续随时间变化, 若下一时刻的盈余水平未超过 b , 即没有出现新的峰值, 则不分红; 若出现了新的峰值, 继续将新增部分全部拿走用来分红。而 Ratchet 分红策略的分红模式为: 预先给定多个分红界, 待公司拿初始资金进行无风险投资后, 只要首次收益高于初始资金即将收益部分以固定分红率进行分红, 继续以初始资金二次投资, 待收益值再次高于投资值, 观察收益水平是否突破某一分红界, 突破则增加分红率, 未突破仍以之前分红率进行分红, 依此类推。这两种策略的分红模式启发我们想到, 是否可以给 Ratchet 策略一个上界 C , 让 Ratchet 策略分红率的不断增长的情况提前结束, 即分红率等于 1, 让收益值全部用来分红即可。下面对新分红模式展开具体分析。

3. 基础知识准备

首先, 假定在完备带流概率空间 $(\Omega, F, \{F_t\}, P)$ 中, 存在一谱正 Lévy 过程 $S = \{S_t, t \geq 0\}$, 其中 $S_0 = x(x \geq 0)$ 。此过程的拉普拉斯指数可表示为:

$$E[e^{-\theta S_t}] = e^{t\psi(\theta)}, \theta, t \geq 0,$$

其中,

$$\psi(\theta) = \gamma\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 + \int_0^\infty (e^{-z\theta} - 1 + z\theta 1_{\{0 < z < 1\}}) \Pi(dz), \gamma \in R, \sigma \geq 0,$$

其中 γ 为漂移系数, σ 为扩散系数, Π 是在 $(0, \infty)$ 上的有限测度且满足: $\int_0^\infty (1 \wedge z^2) \Pi(dz) < \infty$ [9]。

其次, 在此过程中定义分红策略 $\pi = \{L_t^\pi, t \geq 0\}$ 是由从 0 开始非降、右连续且 $\{F_t\}$ 适应的过程。用 $U^\pi = \{U_t^\pi, t \geq 0\}$ 表示修正盈余过程, $U_t^\pi = \{S_t - L_t^\pi, t \geq 0\}$, 由于本文研究的分红策略是连续的, 故 $dL_t^\pi = l^\pi(t)dt$, 且 $t, \xi \geq 0$ 时, $0 \leq l^\pi(t)d \leq \xi$, 其中 ξ 为安全负荷。下面定义分红策略 π 下的分红值函数:

$$V^\pi(x) = E \left[\int_0^\tau e^{-qt} L^\pi(t) dt \mid U_0 = x \right].$$

$V(x) = \sup V^\pi(x)$ 。最后我们用 $\tau_\pi = \inf \{t > 0 \mid U_t \leq 0\}$ 表示公司破产时刻, $\tau = \sup \tau_\pi$ [10]。

在 Lévy 过程波动理论中, 尺度函数具有重要意义, 下面我们给出过程 $S = \{S_t, t \geq 0\}$ 的第一类尺度函数 $W^{(q)}(x)$ 的定义:

$$\int_0^\infty e^{-\theta x} W^{(q)}(x) dx = \frac{1}{\psi(\theta) - q}, \theta > \Phi_q,$$

其中 $\Phi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $\Phi_q = \sup \{\theta \geq 0 \mid \psi(\theta) = q\}$, ψ 是右连续凸函数, $\psi_i(\theta) = \psi(\theta) - c_0\theta - c_1\theta - \dots - c_i\theta$, $\psi(\Phi_q) = q$, $q \geq 0$, $i = 1, 2, \dots$ 。过程 S 的第二类尺度函数 $Z^{(q)}(x)$ 为:

$$Z^{(q)}(x) = 1 + q \int_0^x W^{(q)}(y) dy, x \in R^+,$$

$$\Phi_i(q) = \sup \{\theta \geq 0 \mid \psi_i(\theta) = q\}, i = 1, 2, \dots, \Phi(q) = \Phi_q, [9] [11].$$

基于 2018 年 Albrecher 提出的 Ratchet 策略[1]我们了解到: 在盈余过程首次到达 b_1 水平之前($b_1 > 0$), 公司一直保持以固定的分红率 $c_0 \geq 0$ 对股东进行持续分红, 如果盈余过程达到了 b_1 水平, 公司将立即增加分红率, 以分红率为 $c_0 + c_1$ 进行分红, 其中 $c_1 > 0$, 依此类推, 根据前边介绍的新混合策略, 待盈余水平超过了 C , 立即进行 Barrier 分红策略, 将收益部分全部拿来股东分红。下面给出混合策略下盈余过程的随机微分方程:

$$dU_t = dL_t - c_0 1_{\{M_t < b_1\}} dt - (c_0 + c_1) 1_{\{M_t > b_1\}} dt - D(t) 1_{\{M_t > C\}} dt,$$

其中 $M_t = \sup_{0 \leq s \leq t} U_s$ 。混合策略下的分红值函数为:

$$V(x) = E \left[\int_0^\tau e^{-qt} \left(c_0 1_{\{M_t < b_1\}} + (c_0 + c_1) 1_{\{M_t > b_1\}} + D(t) 1_{\{M_t > C\}} \right) dt \mid L_0 = x \right],$$

其中,

$$D(t) = (M_t - C)_+ = \begin{cases} 0, & M_t \leq C \\ M_t - C, & M_t > C \end{cases}$$

此结果可参考文献[6]。下面给出谱正 Lévy 过程首中时的定义以及相关结果。对于 $\forall a, b \in R$, 记

$$\tau_b^+ = \inf \{t \geq 0 \mid U_t \geq b\}, \tau_a^- = \inf \{t \geq 0 \mid U_t \leq a\},$$

用 $\tau = \inf \{t > 0 \mid U_t \leq 0\}$ 表示破产时刻。

引理 3.1 对任意 $x \in (a, b), \delta \geq 0$, 我们有如下结论:

$$E_x \left[e^{-q\tau_a^-} 1_{\{\tau_a^- < \tau_b^+\}} \right] = \frac{W_i^{(q)}(b-x)}{W_i^{(q)}(b-a)};$$

$$E_x \left[e^{-q\tau_b^+} 1_{\{\tau_b^+ < \tau_a^-\}} \right] = Z_i^{(q)}(b-x) - W_i^{(q)}(b-x) \frac{Z_i^{(q)}(b)}{W_i^{(q)}(b)};$$

$$E_x \left[e^{-q\tau_0^-} 1_{\{\tau_0^- < \infty\}} \right] = e^{-\Phi_i(q)x}.$$

证明 此引理的证明可参考文献[12] [13]。

4. 主要结果

定理 4.1 对于 $C > b_1 > 0$, 谱正 Lévy 过程 $\{L_t, t \geq 0\}$ 先 Ratchet 后 Barrier 的混合策略的分红值函数为:

$$V(x) = \begin{cases} x - C, & x \geq C; \\ \frac{c_0 + c_1}{q} \left[1 - \frac{W_1^{(q)}(C-x)}{W_1^{(q)}(C)} \right] + \left(\frac{c_0 + c_1}{q} - V(C) \right) \cdot \left[-Z_1^{(q)}(C-x) + W_1^{(q)}(C-x) \frac{Z_1^{(q)}(C-b_1)}{W_1^{(q)}(C-b_1)} \right], & b_1 \leq x < C; \\ \frac{c_0}{q} \left[1 - \frac{W_0^{(q)}(C-x)}{W_0^{(q)}(C)} \right] + \left(\frac{c_0}{q} - V(b_1) \right) \cdot \left[-Z_0^{(q)}(C-x) + W_0^{(q)}(C-x) \frac{Z_0^{(q)}(C-b_1)}{W_0^{(q)}(C-b_1)} \right], & 0 \leq x < b_1. \end{cases}$$

证明 首先我们考虑 $x \geq C$ 的情形, 此时盈余过程从开始到破产发生, 将一直执行 Barrier 策略[1], 对高于 C 的部分全部拿来分红。分红值函数可表示为:

$$V(x) = E_x \left[\int_0^\tau e^{-qt} L^\pi(t) dt \right] = x - C.$$

其次, 对 $b_1 \leq x < C$ 情况, 此时需要考虑盈余过程 $\{U_t^{n-1}, t \geq 0\}$ 是否可以达到 C , 谱正 Lévy 过程达到更高水平的方式有“爬”和“跳”两种, 因此达到 C 水平时的状态是随机的。

对比谱负 Lévy 情况, 我们做以下处理:

$$\begin{aligned} V(x) &= E_x \left[\int_0^\tau e^{-qt} L^\pi(t) dt \right] \\ &= E_x \left[\int_0^\tau e^{-qt} L^\pi(t) dt; \tau < \tau_C^+ \right] + E_x \left[\int_0^\tau e^{-qt} L^\pi(t) dt; \tau_C^+ < \tau \right] \\ &= (c_0 + c_1) E_x \left[\int_0^\tau e^{-qt} dt; \tau < \tau_C^+ \right] + (c_0 + c_1) E_x \left[\int_0^{\tau_C^+} e^{-qt} dt; \tau > \tau_C^+ \right] \\ &\quad + E_x \left[e^{-q\tau_C^+} V(C); \tau > \tau_C^+ \right]. \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned} E_x \left[\int_0^\tau e^{-qt} dt; \tau < \tau_C^+ \right] &= E_x \left[\frac{1 - e^{-q\tau}}{q}; \tau < \tau_C^+ \right] \\ &= \frac{1}{q} E_x \left[\mathbf{1}_{(\tau < \tau_C^+)} - e^{-q\tau} \mathbf{1}_{(\tau < \tau_C^+)} \right] \\ &= \frac{1}{q} P_x(\tau < \tau_C^+) - \frac{1}{q} E_x \left[e^{-q\tau} \mathbf{1}_{(\tau < \tau_C^+)} \right]. \end{aligned}$$

同理,

$$E_x \left[\int_0^{\tau_C^+} e^{-qt} dt; \tau > \tau_C^+ \right] = \frac{1}{q} P_x(\tau > \tau_C^+) - \frac{1}{q} E_x \left[e^{-q\tau_C^+} \mathbf{1}_{(\tau > \tau_C^+)} \right].$$

$$\text{故 } V(x) = \frac{c_0 + c_1}{q} \left[1 - E_x \left(e^{-q\tau} \mathbf{1}_{(\tau < \tau_C^+)} \right) - E_x \left(e^{-q\tau_C^+} \mathbf{1}_{(\tau > \tau_C^+)} \right) \right] + E_x \left(e^{-q\tau_C^+} V(C); \tau > \tau_C^+ \right).$$

利用引理 2.1 的结果可知:

$$E_x \left[e^{-q\tau} \mathbf{1}_{\{\tau < \tau_c^+\}} \right] = \frac{W_1^{(q)}(C-x)}{W_1^{(q)}(C)};$$

$$E_x \left[e^{-q\tau_c^+} \mathbf{1}_{\{\tau > \tau_c^+\}} \right] = Z_1^{(q)}(C-x) - W_1^{(q)}(C-x) \frac{Z_1^{(q)}(C-b_1)}{W_1^{(q)}(C-b_1)};$$

$$E_x \left[e^{-q\tau_c^+} V(C); \tau_c^+ < \tau \right] = V(C) E_x \left[e^{-q\tau_c^+} \mathbf{1}_{\{\tau_c^+ < \tau\}} \right].$$

代入 $V(x)$ 表达式可得结果。

最后, 对 $0 \leq x < b_1$ 分析: 这里的 b_1 相当于最初设置的界限, 盈余过程超过此水平, 就开始改变分红率, 增加至 $c_0 + c_1$, 未超出直接使用分红率 c_0 来分红。下面给出此部分的价值函数解析式:

类似于上述方法, 我们考虑:

$$V(x) = E_x \left[\int_0^\tau e^{-qt} l^\pi(t) dt \right]$$

$$= E_x \left[\int_0^\tau e^{-qt} l^\pi(t) dt; \tau < \tau_{b_1}^+ \right] + E_x \left[\int_0^\tau e^{-qt} l^\pi(t) dt; \tau_{b_1}^+ < \tau \right]$$

$$= c_0 E_x \left[\int_0^\tau e^{-qt} dt; \tau < \tau_{b_1}^+ \right] + c_0 E_x \left[\int_0^{\tau_{b_1}^+} e^{-qt} dt; \tau_{b_1}^+ < \tau \right] + E_x \left[e^{-q\tau_{b_1}^+} V(b_1); \tau_{b_1}^+ < \tau \right]$$

$$= \frac{c_0}{q} \left[1 - E_x \left(e^{-q\tau} \mathbf{1}_{\{\tau < \tau_c^+\}} \right) - E_x \left(e^{-q\tau_c^+} \mathbf{1}_{\{\tau > \tau_c^+\}} \right) \right] + E_x \left(e^{-q\tau_c^+} V(b_1); \tau > \tau_c^+ \right),$$

其中, $E_x \left[e^{-q\tau_c^+} V(b_1); \tau_c^+ < \tau \right] = E_x \left[e^{-q\tau_c^+} \mathbf{1}_{\{\tau_c^+ < \tau\}} \right] V(b_1)$, $V(b_1)$ 可由上一种情况代入计算得到。类似上一种情况使用引理 2.1 的结果代入可得表达式。

5. 图像分析

令 $c_0 = 0.1, c_1 = 0.2, q = 10, \mu = 5, \sigma = 2$, 得到定理 4.1 中尺度函数 $Z_1^{(q)}(x)$ 图像以及定理的第二部分价值函数图像, 分别见图 1、图 2 所示:

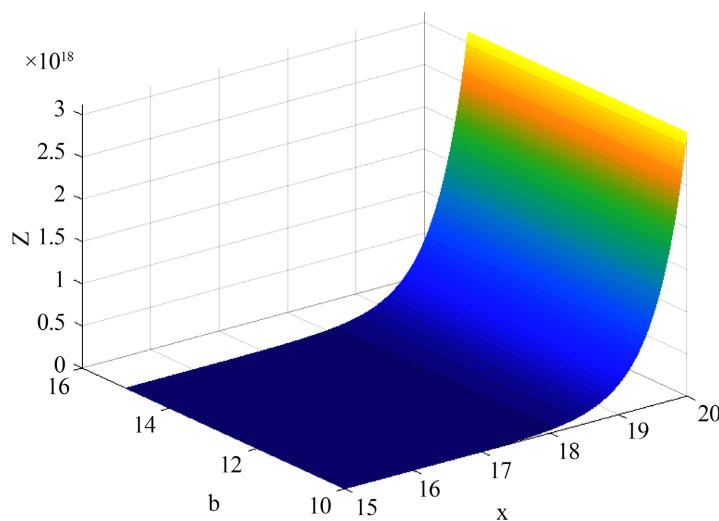


Figure 1. The q -scale function $Z_1^{(q)}(x)$

图 1. 尺度函数 $Z_1^{(q)}(x)$

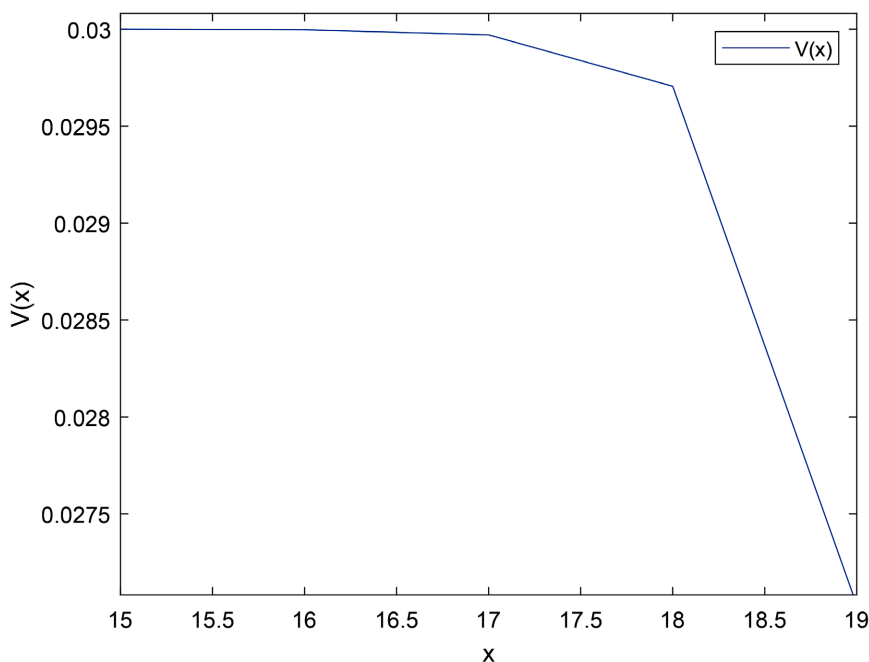


Figure 2. The value function $V(x)$

图 2. 值函数 $V(x)$

参考文献

- [1] Gerber, H.U. and Shiu, E.S.W. (2004) Optimal Dividends: Analysis with Brownian Motion. *North American Actuarial Journal*, **8**, 1-20. <https://doi.org/10.1080/10920277.2004.10596125>
- [2] Klüppelberg, C., Kyprianou, A. and Maller, R. (2004) Ruin Probabilities and Overshoots for General Lévy Insurance Risk Process. *The Annals of Applied Probability*, **14**, 1766-1801. <https://doi.org/10.1214/105051604000000927>
- [3] Péreza, J. and Yamazaki, K. (2017) On the Optimality of Periodic Barrier Strategies for a Spectrally Positive Lévy Process. *Insurance: Mathematics and Economics*, **77**, 1-13. <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2017.08.001>
- [4] Zhao, Y.X. and Chen, P. (2017) Optimal Periodic Dividend and Capital Injection Problem for Spectrally Positive Lévy Processes. *Insurance: Mathematics and Economics*, **74**, 135-146. <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2017.03.006>
- [5] Afonso, L.B., Cardoso, R.M.R. and Egidio dos Reis, A.D. (2013) Dividend Problems in the Dual Risk Model. *Insurance: Mathematics and Economics*, **53**, 906-918. <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2013.10.003>
- [6] Bayraktar, E., Kyprianou, A. and Yamazaki, K. (2013) On Optimal Dividends in the Dual Model. *Astin Bulletin*, **43**, 359-372. <https://doi.org/10.1017/asb.2013.17>
- [7] Bayraktar, E., Kyprianou, A. and Yamazaki, K. (2013) Optimal Dividends in the Dual Model under Transaction Costs. arXiv:1301.7525v2 [math.PR] <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2013.11.007>
- [8] Albrecher, H., Bäuerle, N. and Bladt, M. (2018) Dividends: From Refracting to Ratcheting. *Insurance: Mathematics and Economics*, **83**, 47-58. <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2018.09.003>
- [9] Landriault, D., Li, B. and Lkabous, M.A. (2020) On Occupation Times in the Red of Lévy Risk Models. *Insurance: Mathematics and Economics*, **92**, 17-26. <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2020.02.011>
- [10] Avanzi, B., Lau, H. and Wong, B. (2020) Optimal Periodic Dividend Strategies for Spectrally Positive Lévy Risk Processes with Fixed Transaction Costs. *Insurance: Mathematics and Economics*, **93**, 315-332. <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2020.05.012>
- [11] Kuznetsov, A., Kyprianou, A.E. and Rivero, V. (2013) The Theory of Scale Functions for Spectrally Negative Lévy Processes. Springer Verlag, Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-31407-0_2
- [12] Yin, C.C. and Wen, Y.Z. (2013) Optimal Dividend Problem with a Terminal Value for Spectrally Positive Lévy Processes. *Insurance: Mathematics and Economics*, **53**, 769-773. <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2013.09.019>
- [13] Yin, C.C., Wen, Y.Z. and Zhao, Y.X. (2014) On the Optimal Dividend Problem for a Spectrally Positive Lévy Processes. *Astin Bulletin*, **44**, 635-651. <https://doi.org/10.1017/asb.2014.12>