Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2021, 10(11), 3969-3982
Published Online November 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.1011422

Hans汉斯

α-稳定模型驱动的线性自吸引扩散过程中参数的最小二乘估计

陈香小，陆允生，闫理坦

东华大学理学院统计系，上海

收稿日期：2021年10月23日；录用日期：2021年11月13日；发布日期：2021年11月24日

摘 要

设 M^{α} 为一维 α -稳定模型且 $1<\alpha<2$，本文考虑线性自吸引扩散 $X_t^{\alpha}=M_t^{\alpha}-\theta\int_0^t\int_0^s\left(X_s^{\alpha}-X_u^{\alpha}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}s+\nu t$，其中 θ、ν 是两个实参数且 $\theta>0$。本文的主要目的是在离散观测下，建立 θ 和 ν 的最小二乘估计并讨论其相合性与渐近分布。

关键词

自吸引扩散，渐近分布，最小二乘估计，α-稳定模型

Least Squares Estimation for the Linear Self-Attracting Diffusion Driven by α-Stable Motions

Xiangxiao Chen, Yunsheng Lu, Litan Yan

Department of Statistics, College of Science, Donghua University, Shanghai

Received: Oct. 23rd, 2021; accepted: Nov. 13th, 2021; published: Nov. 24th, 2021

Abstract

Let M^{α} be an α-stable motion of dimension one with $1<\alpha<2$. In this paper, we consider the self-attracting diffusion of the forms $X_t^{\alpha}=M_t^{\alpha}-\theta\int_0^t\int_0^s\left(X_s^{\alpha}-X_u^{\alpha}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}s+\nu t$ where $\theta>0$ and $\nu\in\mathbb{R}$ are two unknown parameters. The main object of this paper is to study the least squares estima-

文章引用: 陈香小, 陆允生, 闫理坦. α-稳定模型驱动的线性自吸引扩散过程中参数的最小二乘估计[J]. 应用数学进展, 2021, 10(11): 3969-3982. DOI: 10.12677/aam.2021.1011422

tion of θ and ν under the discrete observation and discuss the consistency and asymptotic distributions of the two estimators.

Keywords

Self-Attracting Diffusion, Asymptotic Distribution, Least Squares Estimation, α-Stable Motion

1. 引言

近几十年来，对生物种群和物质物理形成过程的数学模型的研究越来越广泛和深入。1986 年，Coppersmith 和 Diaconi [1]提出了一类边缘(顶点)自交互随机游走模型。该模型指出，一种物质的未来状态与它的过去状态密切相关，许多基于这一概念的物理模型也被引入数学领域进行了讨论。在 1992 年，Durrett 和 Rogers [2]提出了如下的一类随机微分方程

$$X_t = X_0 + B_t + \int_0^t \mathrm{d}s \int_0^s f\left(X_s - X_u\right)\mathrm{d}u. \tag{1.1}$$

该方程描述了一种增长聚合物，且 X_t 就代表了聚合物在时刻 t 的位置，其中 $B=\{B_t, t\ge 0\}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 上的布朗运动且 $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ 是 Lipschitz 连续的。当 $f(x)=g(x)x/\|x\|$，$g(x)\ge 0$ 时，X_t 就是由 Diaconis 和 Pemantle [3]所提出的过程的一个连续类似物。设 $\mathcal{L}^X(t,x)$ 是解过程 X 的局部时。则有

$$X_t = X_0 + B_t + \int_0^t \mathrm{d}s \int_{\mathbb{R}} f(-x)\mathcal{L}^X\left(s, X_s + x\right)\mathrm{d}x,$$

其中 $t\ge 0$。该方程清楚地展现了 X 是如何与它的占位测度相互作用的。在函数 f 不作任何假设的情况下，随机微分方程(1.1)定义了一个自交互扩散，自交互扩散在研究自组织和学习行为方面是非常有用的。如果对所有的 $x\in\mathbb{R}^d$ 均有 $x\cdot f(x)\le 0$ （或 $x\cdot f(x)\ge 0$），则称这个解为自吸引(或自排斥)扩散。对 f 的不同限制导致了 X 的不同性质。在 1995 年，Cranston 和 Le Jan [4]考虑了线性与常自交互情形，并建立了在长时间范围下的渐近行为(也参看文献[5])。在 2002 年，Benaïm 等人在文献[6]从另外角度研究了这类过程，他们考虑的模型是如下依赖于(卷积)经验测度的自交互扩散

$$\mathrm{d}X_t = \sqrt{2}\mathrm{d}B_t - \left(\frac{1}{t}\int_0^t \nabla W\left(X_t - X_s\right)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t,$$

其中 W 是一个交互位势函数。该自交互扩散与布朗聚合物之间的一个很大的区别是其漂移项除以了 t。值得注意的是，在许多情形下的 W，其相互作用势具有足够的吸引力，使得自交互扩散可以近似等同为 O-U 过程，这使得其遍历行为是有可能存在的，这使得研究其遍历行为是必要的。更多的研究参见 Benaïm 等人[7] [8] [9]，Cranston-Mountford [10]，Chambeu 和 Kurtzmann [11]，Gauthier [12]，Herrmann-Roynette [13]，Herrmann-Scheutzow [14]，Mountford-Tarr [15]，Kleptsyny-Kurtzmann [16]，Kurtzmann-Zhi [17]，Sun-Yan [18] [19]，以及文内的其余参考文献。

但上述所有情形都是由布朗运动驱动的自交互扩散，现实生活中的问题要复杂得多，因此有必要研究不同过程驱动的自交互扩散。但是目前此类研究很少。部分由 α -稳定过程驱动的自交互扩散的问题已有研究，例如线性自交互扩散，强大数定律，以及参数估计。最近 Gan-Yan [20]研究了由分数布朗运动

驱动的线性自排斥扩散的最小二乘估计。受 Y. Hu-H. Long [21]和 Cranston-Le Jan [4]的启发，我们考虑了如下自交互扩散

$$X_t^\alpha = M_t^\alpha - \theta\int_0^t\int_0^s \left(X_s^\alpha - X_u^\alpha\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}s + vt,\ t \ge 0,\ \theta > 0, \tag{1.2}$$

其中 M_t^α 为一维 α -稳定过程且 $1<\alpha<2$ 的。当 $\theta > 0$ 时，(1.2)是自吸引扩散。实际上，从(1.2)的微分形式可以看出，(1.2)是由改变 Gan-Yan [20]中的分数布朗运动所得到。因此，我们可以用与文献[21]相同方法得到(1.2)的两个参数 θ 和 v 的最小二乘估计。此外，Sun-Yan [18]已指出(1.2)的解是几乎处处收敛的。记

$$Y_t = \int_0^t \left(X_t - X_s\right)\mathrm{d}s,\ t \ge 0,$$

则方程(1.2)可以化简成

$$X_t = M_t - \theta\int_0^t Y_s \mathrm{d}s + vt,\ t \ge 0.$$

现在，我们用 Y 来表示 X，旨在将参数的最小二乘估计的研究转换为对 Y 的研究。若能得到 Y 的显式解，我们就能进一步得到关于参数估计量的一些结论，幸运的是这样的显式解是存在的。得益于显式解，我们能进一步研究 $\hat{\theta}$ 与 θ 的相合性以及 $\hat{v}$ 与 v 的相合性。$\hat{\theta}$ 与 $\hat{v}$ 的渐近分布则需要结合解的具体形式进一步讨论。由于布朗运动是 α -稳定过程的一种特殊情形，Durrett 等人的研究[2]可以进一步推广。用 M_t 替换(1.1)中的 B_t，在 f 满足一定条件的情况下，如下方程

$$X_t = M_t + \int_0^t \mathrm{d}s\int_0^s \mathrm{d}u\, f\left(X_s - X_u\right). \tag{1.3}$$

存在一些有用的结论。我们将在另一篇文章中对(1.3)进行讨论。事实上，若 f 是 Lipschitz 连续的，则(1.3)有一个唯一的强解(可参看文献[22])。

本文第二节回顾了一些与 α -稳定过程相关的定义、性质以及公式定理。第三节研究了参数的最小二乘估计。第四节研究了参数估计量的渐近分布。第五节做了一些技术总结与前瞻。

2. 预备知识

在这一部分，我们给出 α -稳定过程相关的定义与性质。

定义 2.1 (α -稳定随机变量)

设参数 α,λ,β,μ 满足

$$\alpha \in (0,2],\ \sigma \in (0,\infty),\ \beta \in [-1,1],\ \mu \in (-\infty,+\infty),$$

并且记

$$\phi_\alpha(u) = \begin{cases} -\sigma^\alpha |u|^\alpha \left(1 - i\beta\,\mathrm{sgn}(u)\tan\dfrac{\alpha\pi}{2}\right) + i\mu u, & \text{当}\alpha \ne 1, \\ -\sigma|u|\left(1 + i\beta\dfrac{2}{\pi}\mathrm{sgn}(u)\log|u|\right) + i\mu u, & \text{当}\alpha = 1, \end{cases}$$

其中 $u \in (-\infty,+\infty)$ 且 $i^2 = -1$。我们称一个变量 η 具有稳定分布(记为 $\eta \sim S_\alpha(\sigma,\beta,\mu)$)是指其具有特征函数形如

$$Ee^{iu\eta} = \mathrm{e}^{\phi_\alpha(u)}.$$

当 $\mu = 0$ 时，我们称 η 是严格 α -稳定的。此外，若 $\beta = 0$，则称 η 是对称 α -稳定的。

定义 2.2 (α -稳定过程)

设 $\alpha \in (0,2]$ 且 $M^\alpha = \left\{M_t^\alpha, t \ge 0\right\}$ 是一个 $\{\mathcal{F}_t\}$ -适应过程。如果对任意 $t > s > 0$ 有

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{iu\left(M_t^\alpha-M_s^\alpha\right)}\mid\mathcal{F}_s\right]=\mathrm{e}^{(t-s)\phi_\alpha(u)},$$

则称 M^α 是一个 $\alpha\in(0,2]$ 的 α -稳定过程。

不失一般性的，我们假定(1.2)中的 M^α 满足 $\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{iuM_t^\alpha}\right)=\mathrm{e}^{\phi_\alpha(u)}$，$\phi_\alpha(u)=-|u|^\alpha$，即是 $\sigma=1$，$\beta=0$，$\mu=0$。除非特别说明，在下文中，我们都默认 $1<\alpha<2$，并将 M_t^α 简写为 M^α。

3. θ 与 v 的最小二乘估计量及相合性

方便起见，我们将角标 α 省略不写。假设 X 在某些离散时间 $\{t_i=ih,i=0,1,2,\cdots\}$ 是可观测的，记

$$Y_{t_i}=\int_0^{t_i}\left(X_{t_i}-X_s\right)\mathrm{d}s\simeq\sum_{k=1}^{i}\left(X_{ih}-X_{(k-1)h}\right)h,\ i\geq 0,$$

则有

$$X_{t_i}=M_{t_i}-\theta\int_0^{t_i}Y_s\mathrm{d}s+vt_i\simeq M_{t_i}-\theta\sum_{l=1}^{i}\left[\sum_{k=1}^{l-1}\left(X_{ih}-X_{(k-1)h}\right)h\right]h+vt_i,$$

其中 $i\geq 0$。可以得到 X 在相邻观测时间的差分如

$$X_{t_i}-X_{t_{i-1}}=-\left(\theta Y_{t_{i-1}}-v\right)h+\left(M_{t_i}-M_{t_{i-1}}\right),\tag{3.1}$$

其中 $i\geq 0$。根据文献[21]的原理，θ 和 v 的最小二乘估计量可以由以下比较函数的最小值求出：

$$\rho_n(\theta,v)=\sum_{i=1}^{n}\left|X_{t_i}-X_{t_{i-1}}+\left(\theta Y_{t_{i-1}}-v\right)h\right|^2,\ \theta>0.$$

利用(3.1)，我们可以得到 θ 的最小二乘估计量

$$\begin{aligned}\hat{\theta}&=\frac{\sum_{i=1}^{n}Y_{t_{i-1}}\sum_{i=1}^{n}\left(X_{ih}-X_{(i-1)h}\right)-n\sum_{i=1}^{n}\left(X_{ih}-X_{(i-1)h}\right)Y_{t_{i-1}}}{nh\sum_{i=1}^{n}\left(Y_{t_{i-1}}\right)^2-h\left(\sum_{i=1}^{n}Y_{t_{i-1}}\right)^2}\\&=\theta-\frac{n\sum_{i=1}^{n}\left(M_{ih}-M_{(i-1)h}\right)Y_{t_{i-1}}}{nh\sum_{i=1}^{n}\left(Y_{t_{i-1}}\right)^2-h\left(\sum_{i=1}^{n}Y_{t_{i-1}}\right)^2}+\frac{M_{nh}\sum_{i=1}^{n}Y_{t_{i-1}}}{nh\sum_{i=1}^{n}\left(Y_{t_{i-1}}\right)^2-h\left(\sum_{i=1}^{n}Y_{t_{i-1}}\right)^2}\\&=\theta-\frac{n\sum_{i=1}^{n}\left(M_{ih}-M_{(i-1)h}\right)\sum_{k=1}^{i-1}\left(X_{ih}-X_{(k-1)h}\right)h}{nh\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{i-1}\left(X_{ih}-X_{(k-1)h}\right)h\right)^2-h\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i-1}\left(X_{ih}-X_{(k-1)h}\right)h\right)^2}\\&\quad+\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(M_{ih}-M_{(i-1)h}\right)\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i-1}\left(X_{ih}-X_{(k-1)h}\right)h}{nh\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{i-1}\left(X_{ih}-X_{(k-1)h}\right)h\right)^2-h\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i-1}\left(X_{ih}-X_{(k-1)h}\right)h\right)^2}.\end{aligned}\tag{3.2}$$

同理可得 v 的最小二乘估计量

$$\hat{v}=v+\frac{1}{n}\left(\hat{\theta}-\theta\right)\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i}\left(X_{ih}-X_{(k-1)h}\right)h+\frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n}\left(M_{ih}-M_{(i-1)h}\right).\tag{3.3}$$

记

$$\widehat{Y}_t = t^{\frac{1}{\alpha}-1} Y_t,\ F(s) = t^{\frac{1}{\alpha}-1} s e^{-\frac{1}{2}\theta\left(t^2-s^2\right)}. \tag{3.4}$$

我们知道$\int_0^t F(s)\mathrm{d}M_s$与$S_\alpha(\lambda_F,0,0)$同分布(可参见文献[23])，其中

$$\lambda_F = \left(\int_0^t t^{1-\alpha} s^\alpha e^{-\frac{\alpha}{2}\theta\left(t^2-s^2\right)} \mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

试注意到在 t 渐近于无穷时，$(\lambda_F)^\alpha \to \dfrac{1}{\alpha\theta}$ 这表明 $\widehat{Y}_t$ 在 t 渐近于无穷时与 $S_\alpha\left((\alpha\theta)^{-\frac{1}{\alpha}},0,0\right)$ 同分布。根据常数变易法可以得到

$$\sum_{k=1}^{i}\left(X_{ih} - X_{(k-1)h}\right)h \simeq Y_{t_i} = e^{-\frac{1}{2}\theta t_i^2}\int_0^{t_i} s e^{\frac{1}{2}\theta s^2}\mathrm{d}M_s + \frac{v}{\theta}\left(1 - e^{\frac{1}{2}\theta t_i^2}\right). \tag{3.5}$$

在已知上述条件下，我们要证明$\hat{\theta}\to\theta$，$\hat{v}\to v$几乎必然成立。

引理 3.1 当$n\to\infty$时，我们有如下几乎必然成立

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_{t_{i-1}} \to \frac{v}{\theta}\ (a.s.), \tag{3.6}$$

其中$\theta \ge 0$。

证明：根据(3.1)可以得到

$$X_{t_i} - X_{t_{i-1}} = M_{t_i} - M_{t_{i-1}} - \theta h Y_{t_{i-1}} + vh,$$

其中$i > 0$。故有

$$\theta h \sum_{i=1}^{n} Y_{t_{i-1}} = \sum_{i=1}^{n}\left[-\left(X_{t_i} - X_{t_{i-1}}\right) + \left(M_{t_i} - M_{t_{i-1}}\right)\right] + nvh.$$

也就是说

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_{t_{i-1}} = -\frac{X_t}{nh\theta} + \frac{M_t}{nh\theta} + \frac{v}{\theta}.$$

显然有

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_{t_{i-1}} - \frac{v}{\theta}\right| = \frac{1}{\theta}\left|\frac{X_{t_n}}{nh} - \frac{M_{t_n}}{nh}\right|.$$

由于$\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{M_t}{t} = 0$，$X_{t_n}$的解存在，且在$t_n\to\infty$时是几乎必然收敛的。事实上当$T\to\infty$时

$$X_T \to X_\infty = \int_0^\infty h(s)\mathrm{d}M_s + v\int_0^\infty h(s)\mathrm{d}s\ (a.s.),$$

其中$h(s) = 1 - \theta s e^{\frac{1}{2}\theta s^2}\int_s^\infty e^{-\frac{1}{2}\theta u^2}\mathrm{d}u$，故

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_{t_{i-1}} - \frac{v}{\theta}\right| = 0\ (a.s.).$$

命题 3.1 假定当$n\to\infty$时$h\to 0$，$t_n = nh\to\infty$。如下的强相合性成立

$$\hat{\theta}\to\theta\ \ (a.s.)\text{当}\,n\to\infty.$$

证明：设 $\phi_n(t)=\sum_{i=1}^{n}Y_{t_{i-1}}1_{(t_{i-1},t_i]}(t)$，显然

$$\sum_{i=1}^{n}Y_{t_{i-1}}\left(M_{t_i}-M_{t_{i-1}}\right)=\int_0^{t_n}\phi_n(s)\mathrm{d}M_s. \tag{3.7}$$

设 $\tau_n(t_n)=\int_0^{t_n}|\phi_n(t)|^{\alpha}\,\mathrm{d}t$，则有

$$\tau_n(t_n)=\int_0^{t_n}\sum_{i=1}^{n}\left|Y_{t_{i-1}}\right|^{\alpha}1_{(t_{i-1},t_i]}(t)\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^{n}\left|Y_{t_{i-1}}\right|^{\alpha}h. \tag{3.8}$$

根据(3.2)可得

$$\frac{n\sum_{i=1}^{n}\left(M_{ih}-M_{(i-1)h}\right)\sum_{k=1}^{i-1}\left(X_{ih}-X_{(k-1)h}\right)h}{nh\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{i-1}\left(X_{ih}-X_{(k-1)h}\right)h\right)^2-h\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i-1}\left(X_{ih}-X_{(k-1)h}\right)h\right)^2}=\frac{\int_0^{t_n}\phi_n(t)\mathrm{d}M_t}{\tau_n(t_n)}\cdot\frac{n\tau_n(t_n)}{nh\sum_{i=1}^{n}Y_{t_{i-1}}^2-h\left(\sum_{i=1}^{n}Y_{t_{i-1}}\right)^2}. \tag{3.9}$$

若 $\theta>0$，则 $\widehat{Y}_t$ 是遍历的，且 $t\to\infty$ 时 $\widehat{Y}_t\Rightarrow\widehat{Y}_\infty=S_\alpha\left((\alpha\theta)^{-\frac{1}{\alpha}},0,0\right)$。因此由遍历定理得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\widehat{Y_{t_{i-1}}}\right|^{\alpha}=\mathbb{E}\left[\widehat{Y_\infty}^{\alpha}\right]=\infty\ (a.s.).$$

显而易见

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|Y_{t_{i-1}}\right|^{\alpha}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(t_i)^{\alpha-1}\left|\widehat{Y_{t_{i-1}}}\right|^{\alpha}\to\infty\ (a.s.),$$

这说明 $\tau_n(t_n)\to\infty\,(a.s.)$。同理可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|Y_{t_{i-1}}\right|^{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i\left|\widehat{Y_{t_{i-1}}}\right|^{2}\to\infty\ (a.s.).$$

注意到 $\int_1^{\infty}t^{-\alpha}\mathrm{d}t=1/(\alpha-1)<\infty$。文献[24]的结论 3.1 说明

$$\lim_{t_n\to\infty}\frac{\left|\int_0^{t_n}\phi_n(t)\mathrm{d}M_t\right|}{\tau_n(t_n)}=0\ (a.s.). \tag{3.10}$$

由 Hölder 不等式，引理 3.1 以及 $\left(\sum_{i=1}^{n}Y_i\right)^2\le\left(\sum_{i=1}^{n}|Y_i|\right)^2\le n\sum_{i=1}^{n}(Y_i)^2$ 可得

$$\begin{aligned}0&\le\lim_{n\to\infty}\frac{n\tau_n(t_n)}{nh\sum_{i=1}^{n}Y_{t_{i-1}}^2-h\left(\sum_{i=1}^{n}Y_{t_{i-1}}\right)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\sum_{i=1}^{n}\left|Y_{t_{i-1}}\right|^{\alpha}}{n\sum_{i=1}^{n}Y_{t_{i-1}}^2-\left(\sum_{i=1}^{n}Y_{t_{i-1}}\right)^2}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}\left|Y_{t_{i-1}}\right|^{\alpha}}{\sum_{i=1}^{n}\left|Y_{t_{i-1}}\right|^{2}}\le\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\left|Y_{t_{i-1}}\right|^{2}\right)^{\alpha/2}n^{(2-\alpha)/2}}{\sum_{i=1}^{n}\left|Y_{t_{i-1}}\right|^{2}}\le\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|Y_{t_{i-1}}\right|^{2}\right)^{-\frac{2-\alpha}{2}},\end{aligned} \tag{3.11}$$

且再次由遍历定理得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\widehat{Y_{t_{i-1}}}\right|^{2}=\mathbb{E}\left[\widehat{Y_\infty}^{2}\right]=\infty\ (a.s.).$$

因此(3.11)右端等于 0，由两边夹原理其极限几乎必然为 0。进一步的，由引理 3.1 以及 $\lim_{nh\to\infty}\frac{M_{nh}}{nh}=0$，当 $n\to\infty$ 我们有

$$\frac{M_{nh}\sum_{i=1}^{n}Y_{t_{i-1}}}{nh\sum_{i=1}^{n}\left(Y_{t_{i-1}}\right)^2-h\left(\sum_{i=1}^{n}Y_{t_{i-1}}\right)^2}=\frac{\frac{M_{nh}}{nh}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_{t_{i-1}}}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_{t_{i-1}}\right)^2-\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_{t_{i-1}}\right)^2} \tag{3.12}$$

在 $n\to\infty$ 时几乎必然收敛于 0。综上，命题 3.1 成立。

命题 3.2 假定当 $n\to\infty$ 时 $h\to 0$，$t_n=nh\to\infty$。如下的强相合性成立

$$\hat{v}\to v\quad(a.s.)\text{ 当 } n\to\infty.$$

证明：由 $\lim_{nh\to\infty}\frac{M_{nh}}{nh}=0$，(3.3)以及引理 3.1，该命题显然成立。

4. $\hat{\theta}$ 与 $\hat{v}$ 的渐近分布

由 α -稳定过程驱动的 O-U 过程的参数估计的渐近分布[21]，我们自然地考虑到有类似的结果。

注 1 为了得到最小二乘估计量的渐近分布，我们需要做一些技术性假定。(A1): 当 $n\to\infty$ 时，$h\to 0$，$t_n=nh\to\infty$，且 $n^{\frac{2}{\alpha}}h^{1+\frac{1}{\alpha}}\to\infty$，$n^{1+\frac{2}{\alpha}}h^{2+\frac{2}{\alpha}}\to\infty$，$(n\log n)^{\frac{1}{\alpha}}h^{\frac{2}{\alpha}}\to\infty$。本节无特殊说明均默认该假定满足。

定理 4.1 当 $n\to\infty$ 时，我们有依分布收敛如下

$$n\left(\frac{\log n}{n}\right)^{-\frac{1}{\alpha}}h^2\left(\hat{\theta}-\theta\right)\Rightarrow\frac{Z_1}{2Z_0},$$

其中 Z_0、Z_1 为两个相互独立的稳定随机变量。

注意到

$$Y_{t_i}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\theta t_i^2}\sum_{k=1}^{i}\int_{t_{k-1}}^{t_k}s\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta s^2}\mathrm{d}M_s+\frac{v}{\theta}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\theta t_i^2}\right).$$

设 $V_{k-1}=\int_{t_{k-1}}^{t_k}s\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta s^2}\mathrm{d}M_s$，由 α -稳定随机积分的内部时性质可知 V_{k-1} 与 $M_{\tau_{k-1}}$ 同分布，其中

$$\tau_{k-1}=\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left|s\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta s^2}\right|^{\alpha}\mathrm{d}s=t_k^{\alpha}\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}\theta t_k^2}h.$$

设 $U_{k-1}=V_{k-1}\Big/\tau_{k-1}^{\frac{1}{\alpha}}$，由稳定分布的收缩性质可知 $U_0,U_1,U_2,\cdots$ 是独立同分布的随机变量且具有稳定分布 $S_\alpha(1,0,0)$。设 $c_{i,h}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\theta t_i^2}$，则 Y_i （Y_{t_i} 简写为 Y_i）可以表示为

$$Y_i=h^{\frac{1}{\alpha}+1}c_{i,h}\sum_{k=1}^{i}k\frac{1}{c_{k,h}}U_{k-1}+\frac{v}{\theta}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\theta t_i^2}\right),$$

$M_{t_{i+1}}-M_{t_i}$ 可以表示为 $h^{\frac{1}{\alpha}}U_i$。

注 2 参照文献[25]，我们知道对称稳定随机变量 $U_1\sim S_\alpha(1,0,0)$ 满足

$$\lim_{x\to\infty}x^{\alpha}P(U_1>x)=C_\alpha/2,\ \lim_{x\to\infty}x^{\alpha}P(U_1<-x)=C_\alpha/2.$$

所以，$|U_1|$ 的尾部分布渐近等价于一个 Pareto，即 $P(|U_1|>x)\sim C_\alpha x^{-\alpha}$。参照文献[26]，我们设

$$a_n = inf\left\{x: P(|U_1|>x)\le n^{-1}\right\},\ \widetilde{a_n} = inf\left\{x: P(|U_0U_1|>x)\le n^{-1}\right\}.$$

利用 $|U_1|$ 的 Pareto 尾分布可以取到

$$a_n=(C_\alpha n)^{\frac{1}{\alpha}},\ \widetilde{a_n}=C_\alpha^{\frac{2}{\alpha}}(n\log n)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

注意到 $\left(\frac{n}{\log n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}=\widetilde{a_n}^{-1}a_n^2$。下面这个引理是[26]中定理 3.3 的特殊情况。

引理 4.1 设 $\{U_i\}_{i=0}^{\infty}$ 是一列独立同分布的且具有分布 $S_\alpha(1,0,0)$ 的随机变量，则依据上述定义的 a_n 及 $\widetilde{a_n}$，对所有 $m\in\mathbb{N}_+$，我们有如下依分布收敛

$$\left(a_n^{-2}\sum_{i=1}^{n}U_i^2,\ \widetilde{a_n}^{-1}\sum_{i=1}^{n}U_iU_{i+1},\cdots,\widetilde{a_n}^{-1}\sum_{i=1}^{n}U_iU_{i+m}\right)\Rightarrow(Z_0,Z_1,\cdots,Z_m),$$

其中 $Z_0,Z_1,\cdots,Z_m$ 为独立的稳定随机变量。Z_0 是正 $\alpha/2$-稳定的且具有分布 $S_{\alpha/2}(\sigma_1,1,0)$，$Z_1,\cdots,Z_m$ 是对称 α-稳定的且具有分布 $S_\alpha(\sigma_2,0,0)$，文献[21]中给出了 σ_1 与 σ_2 的精确值。

设

$$\begin{aligned}n\left(\frac{\log n}{n}\right)^{-\frac{1}{\alpha}}h^2(\hat\theta-\theta)&=-\frac{n^{-1}(n\log n)^{-\frac{1}{\alpha}}h^{-1-\frac{2}{\alpha}}\sum_{i=1}^{n-1}\left(M_{t_{i+1}}-M_{t_i}\right)Y_{t_i}}{n^{-3-\frac{2}{\alpha}}h^{-3-\frac{2}{\alpha}}\left[nh\sum_{i=1}^{n-1}(Y_i)^2-h\left(\sum_{i=1}^{n-1}Y_i\right)^2\right]}+\frac{n^{-2}(n\log n)^{-\frac{1}{\alpha}}h^{-1-\frac{2}{\alpha}}M_{nh}\sum_{i=1}^{n-1}Y_{t_i}}{n^{-3-\frac{2}{\alpha}}h^{-3-\frac{2}{\alpha}}\left[nh\sum_{i=1}^{n-1}(Y_i)^2-h\left(\sum_{i=1}^{n-1}Y_i\right)^2\right]}\\&=-\frac{\Phi_1(n)}{\Phi_3(n)}+\frac{\Phi_2(n)}{\Phi_3(n)}.\end{aligned}\tag{4.1}$$

命题 4.1 在条件(A1)满足的情况下，有依概率收敛如下，

$$\Phi_3(n)-n^{-2-\frac{2}{\alpha}}\sum_{i=1}^{n-1}c_{i,h}^2\sum_{k=1}^{i}\frac{1}{c_{k,h}^2}k^2U_{k-1}^2\to_p 0.$$

证明：做分解

$$\begin{aligned}\Phi_3(n)&=n^{-2-\frac{2}{\alpha}}\sum_{i=1}^{n-1}c_{i,h}^2\left[\sum_{k=1}^{i}\frac{k}{c_{k,h}}U_{k-1}\right]^2+n^{-2-\frac{2}{\alpha}}h^{-2-\frac{2}{\alpha}}\frac{v^2}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n-1}(1-c_{i,h})^2\\&\quad+n^{-2-\frac{2}{\alpha}}h^{-1-\frac{1}{\alpha}}\frac{2v}{\theta}\sum_{i=1}^{n-1}c_{i,h}(1-c_{i,h})\sum_{m=1}^{i}\frac{m}{c_{m,h}}U_{m-1}-n^{-1-\frac{2}{\alpha}}h^{-2-\frac{2}{\alpha}}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}Y_{t_{i-1}}\right)^2\\&:=\Sigma_0+\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3.\end{aligned}\tag{4.2}$$

显然，在条件(A1)下，当 $n\to\infty$ 时 $\Sigma_1\to 0$。由引理 3.1 知，当 $n\to\infty$ 时 $\Sigma_3\to_P 0$。根据马尔可夫不等式知，在满足(A1)的情形下，当 $n\to\infty$ 时

$$\begin{aligned}P(|\Sigma_2|>\varepsilon)&\le\varepsilon^{-1}\mathbb{E}|U_{m-1}|\frac{2v}{\theta}n^{-2-\frac{2}{\alpha}}h^{-1-\frac{1}{\alpha}}\sum_{i=1}^{n-1}\left[(1-c_{i,h})c_{i,h}\left(\frac{i}{c_{i,h}}+\sum_{m=1}^{i-1}\frac{m}{c_{m,h}}\right)\right]\\&\le Cn^{-2-\frac{2}{\alpha}}h^{-1-\frac{1}{\alpha}}\sum_{i=1}^{n-1}\left[i-ic_{i,h}+\frac{(i-1)^2c_{i,h}}{c_{i-1,h}}-\frac{(i-1)^2c_{i,h}^2}{c_{i-1,h}}\right]\\&\le Cn^{-\frac{2}{\alpha}}h^{-1-\frac{1}{\alpha}}\end{aligned}\tag{4.3}$$

右端收敛于 0。(4.2)第一项可分为两部分：

$$\begin{aligned}\Sigma_0 &= n^{-2-\frac{2}{\alpha}}\sum_{i=1}^{n-1}c_{i,h}^2\left[\sum_{k=1}^{i}\frac{k}{c_{k,h}}U_{k-1}\right]^2\\ &= n^{-2-\frac{2}{\alpha}}\sum_{i=1}^{n-1}c_{i,h}^2\sum_{k=1}^{i}\frac{k^2}{c_{k,h}^2}U_{k-1}^2+n^{-2-\frac{2}{\alpha}}\sum_{i=1}^{n-1}c_{i,h}^2\sum_{p=1}^{i}\sum_{q=1,q\neq p}^{i}\frac{pq}{c_{p,h}c_{q,h}}U_{p-1}U_{q-1}\\ &:= \Sigma_{01}+\Sigma_{02}.\end{aligned}\tag{4.4}$$

根据马尔可夫不等式，我们设

$$\begin{aligned}&P\left(n^{-2-\frac{2}{\alpha}}\left|\sum_{i=1}^{n-1}c_{i,h}^2\sum_{p=1}^{i}\sum_{q=1,q\neq p}^{i}\frac{pq}{c_{p,h}c_{q,h}}U_{p-1}U_{q-1}\right|>\varepsilon\right)\\ &\le P\left(n^{-2-\frac{2}{\alpha}}\left|\sum_{i=1}^{n-1}c_{i,h}^2\sum_{p=1}^{i}\sum_{q=1,q\neq p}^{i}\frac{pqU_{p-1}U_{q-1}}{c_{p,h}c_{q,h}}1_{\left(\left|U_{p-1}U_{q-1}\right|\le\widetilde{a_n}\right)}\right|>\frac{\varepsilon}{2}\right)\\ &\quad+P\left(n^{-2-\frac{2}{\alpha}}\left|\sum_{i=1}^{n-1}c_{i,h}^2\sum_{p=1}^{i}\sum_{q=1,q\neq p}^{i}\frac{pqU_{p-1}U_{q-1}}{c_{p,h}c_{q,h}}1_{\left(\left|U_{p-1}U_{q-1}\right|>\widetilde{a_n}\right)}\right|>\frac{\varepsilon}{2}\right)\\ &:= B_1+B_2.\end{aligned}\tag{4.5}$$

令 $D(U)=U_{p-1}U_{q-1},D'(U)=U_{p'-1}U_{q'-1}$。由切比雪夫不等式知，

$$\begin{aligned}B_1 &\le C(\varepsilon/2)^{-2}n^{-4-\frac{4}{\alpha}}\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n-1}c_{i,h}^2\sum_{p=1}^{i}\sum_{q=1,q\neq p}^{i}\frac{pq}{c_{p-1,h}c_{q-1,h}}D(U)1_{\left(\left|D(U)\right|\le\widetilde{a_n}\right)}\right]^2\\ &\le C(\varepsilon/2)^{-2}n^{-4-\frac{4}{\alpha}}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{r=1}^{n-1}\sum_{p,q=1 p\neq q}^{i}\sum_{p',q'=1 p'\neq q'}^{r}\frac{pqp'q'c_{i,h}^2c_{r,h}^2}{c_{p,h}c_{q,h}c_{p',h}c_{q',h}}\\ &\quad\times\mathbb{E}\left[D(U)1_{\left(\left|D(U)\right|\le\widetilde{a_n}\right)}D'(U)1_{\left(\left|D'(U)\right|\le\widetilde{a_n}\right)}\right].\end{aligned}\tag{4.6}$$

我们现在考虑(4.6)右端的期望值，其分为两种不同情形：(1)所有的指数 p,q,p',q' 均不相同，(2) p,q 之一与 p',q' 之一相同。显而易见，在情形(1)下，所有该项的期望值都等于 0，故只需考虑情形(2)。方便起见，令 $\sigma_n^2=\mathbb{E}\left[\left|D(U)\right|^2 1_{\left(\left|D(U)\right|\le\widetilde{a_n}\right)}\right]$。注意到 $p\neq q$，我们仅考虑情形(2)下的子情形之一，即 $p=p'$ (其余三种子情形的期望均与其相等)，有

$$\begin{aligned}B_1 &\le 16C\varepsilon^{-2}n^{-4-\frac{4}{\alpha}}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{p=1}^{i}\sum_{q=1,q\neq p}^{i}\sum_{r=1}^{n-1}\sum_{p'=1}^{r}\sum_{q'=1,q'\neq p'}^{r}\frac{pqp'q'c_{i,h}^2c_{r,h}^2}{c_{p,h}c_{q,h}c_{p',h}c_{q',h}}\sigma_n^2\\ &\le 16C\varepsilon^{-2}n^{-4-\frac{4}{\alpha}}\left[\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{p=1}^{i}\sum_{p=1,q\neq p}^{i}\frac{pqc_{i,h}^2}{c_{p,h}c_{q,h}}\right]^2 n\sigma_n^2\\ &\le 16C\varepsilon^{-2}n^{-4-\frac{4}{\alpha}}\left[\sum_{i=1}^{n-1}i^2(i-1)^2\mathrm{e}^{-\theta\left(i-\frac{1}{2}\right)h^2}\right]^2\cdot n\sigma_n^2\\ &= C'\varepsilon^{-2}n^{-4-\frac{4}{\alpha}}(n\log n)^{\frac{2}{\alpha}}\left[\widetilde{a_n}^{-2}n\sigma_n^2\right].\end{aligned}\tag{4.7}$$

由 Karamata 定理知 $\widetilde{a_n}^{-2}n\sigma_n^2\to\alpha/(2-\alpha)\,(a.s.)$，因此在满足(A1)的情形下，当 $n\to\infty$ 时，(4.7)右端收敛于 0。再者，由马尔科夫不等式可得，

$$
\begin{aligned}
B_2 &\le 2\varepsilon^{-1} n^{-2-\frac{2}{\alpha}} \mathbb{E}\left|\sum_{i=1}^{n-1} c_{i,h}^2 \sum_{p=1}^{i} \sum_{q=1,q\ne p}^{i} \frac{pqU_{p-1}U_{q-1}}{c_{p,h}c_{q,h}} 1_{\left(|D(U)|>\widetilde{a_n}\right)}\right. \\
&\le 2\varepsilon^{-1} n^{-2-\frac{2}{\alpha}} \left[\sum_{i=1}^{n-1} i^2 (i-1)^2 \mathrm{e}^{-\theta\left(i-\frac{1}{2}\right)h^2}\right] \mathbb{E}\left[D(U) 1_{\left(|D(U)|>\widetilde{a_n}\right)}\right] \\
&\le C n^{-3-\frac{2}{\alpha}} (n\log n)^{\frac{1}{\alpha}} \left[n\widetilde{a_n}^{-1} \mathbb{E}\left(D(U) 1_{\left(|D(U)|>\widetilde{a_n}\right)}\right)\right].
\end{aligned} \tag{4.8}
$$

由 Karamata 定理知 $n\widetilde{a_n}^{-1} E\left[D(U)|1_{|D(U)|>\widetilde{a_n}}\right] \to \alpha/(\alpha-1)\ (a.s.)$，故在满足(A1)的情形下，当 $n\to\infty$ 时，(4.8)右端收敛于 0。结合(4.2)到(4.8)，即可得证命题 4.1。

命题 4.2 在条件(A1)满足的情况下，有依分布收敛如下，

$$
n^{-2-\frac{2}{\alpha}} \sum_{i=1}^{n-1} c_{i,h}^2 \sum_{k=1}^{i} \frac{1}{c_{k,h}^2} k^2 U_{k-1}^2 \Rightarrow C_\alpha^{\frac{2}{\alpha}} Z_0
$$

证明：我们做分解如下

$$
\begin{aligned}
\Sigma_{01} &= n^{-2-\frac{2}{\alpha}} \sum_{i=1}^{n-1} c_{i,h}^2 \sum_{k=1}^{i} \frac{1}{c_{k,h}^2} k^2 U_{k-1}^2 = n^{-2-\frac{2}{\alpha}} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{c_{k,h}^2} k^2 U_{k-1}^2 \sum_{i=k}^{n-1} c_{i,h}^2 \\
&= n^{-2-\frac{2}{\alpha}} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 U_{k-1}^2 + n^{-2-\frac{2}{\alpha}} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{c_{k,h}^2} k^2 U_{k-1}^2 \sum_{i=k+1}^{n-1} c_{i,h}^2 \\
&= n^{-2-\frac{2}{\alpha}} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 U_{k-1}^2 + n^{-2-\frac{2}{\alpha}} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{c_{k+1,h}^2}{c_{k,h}^2} k^2 U_{k-1}^2 - n^{-2-\frac{2}{\alpha}} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{c_{n,h}^2}{c_{k,h}^2} k^2 U_{k-1}^2 \\
&\quad + \circ\left(n^{-2-\frac{2}{\alpha}} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{c_{k+1,h}^2}{c_{k,h}^2} k^2 U_{k-1}^2\right) + \circ\left(n^{-2-\frac{2}{\alpha}} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{c_{n,h}^2}{c_{k,h}^2} k^2 U_{k-1}^2\right) \\
&:= D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + D_5.
\end{aligned} \tag{4.9}
$$

取 $\delta = \dfrac{2\alpha}{2+\rho} < \alpha,\ \rho > 0\ (\delta/2 < \alpha/2 < 1)$，由马尔可夫不等式可知，

$$
P(|D_3| > \varepsilon) \le \varepsilon^{-\frac{\delta}{2}} n^{-\delta-\frac{\delta}{\alpha}} (n-1)^{\delta+\frac{\delta}{2}} \left[\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\theta(2n-1)h^2}\right]^{\frac{\delta}{2}} \mathbb{E}|U_{k-1}|^{\delta}. \tag{4.10}
$$

在满足(A1)的情形下，当 $n\to\infty$ 时，(4.10)右端收敛到 0，故 $P(|D_5| > \varepsilon)$ 在该条件也下收敛于 0。再次由马尔可夫不等式，

$$
P(|D_2| > \varepsilon) \le \varepsilon^{-\frac{\delta}{2}} n^{-\delta-\frac{\delta}{\alpha}} \left[\sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{e}^{-\theta(2k-1)h^2}\right]^{\frac{\delta}{2}} \mathbb{E}|U_{k-1}|^{\delta}. \tag{4.11}
$$

在满足(A1)的情形下，当 $n\to\infty$ 时，(4.11)右端收敛到 0，故 $P(|D_4| > \varepsilon)$ 在该条件下也收敛于 0。设 $\sum_{j=1}^{k} d_j = k^2$，故有 $j < d_j < 2j$，且

$$
\begin{aligned}
D_1 &= n^{-2-\frac{2}{\alpha}} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\sum_{j=1}^{k} d_j\right) U_{k-1}^2 = n^{-2-\frac{2}{\alpha}} \sum_{j=1}^{n-1} d_j \sum_{k=j}^{n-1} U_{k-1}^2 \\
&= n^{-2-\frac{2}{\alpha}} (n-1)^2 \sum_{k=0}^{n-1} U_k^2 - n^{-2-\frac{2}{\alpha}} (n-1)^2 U_{n-1}^2 - n^{-2-\frac{2}{\alpha}} \sum_{j=1}^{n-1} d_j \sum_{k=0}^{j-1} U_k^2 \\
&:= D_{11} + D_{12} + D_{13}.
\end{aligned} \tag{4.12}
$$

由马尔可夫不等式可得，在 $n\to\infty$ 时，

$$P\left(\left|D_{12}\right|>\varepsilon\right)\le\varepsilon^{-\frac{\delta}{2}}n^{-\frac{\delta}{\alpha}}\mathbb{E}\left|U_{n-1}\right|^{\delta} \tag{4.13}$$

右端收敛于 0，且

$$P\left(\left|D_{13}\right|>\varepsilon\right)\le\varepsilon^{-\frac{\delta}{2}}n^{-\delta-\frac{\delta}{\alpha}}\left(\sum_{j=1}^{n}d_j\cdot j\right)^{\frac{\delta}{2}}\mathbb{E}\left|U_n-1\right|^{\delta}\le Cn^{-\frac{\delta}{\alpha}+\frac{\delta}{2}} \tag{4.14}$$

右端收敛于 0。结合(4.10)到(4.14)，利用引理 4.1，命题 4.2 即可得证。

命题 4.3 在条件(A1)满足的情况下，我们有依概率收敛如下，

$$\Phi_1(n)-n^{-1}(n\log n)^{-\frac{1}{\alpha}}\sum_{l=0}^{n-1}(l+1)U_lU_{l+1}\to_P 0.$$

证明：记 $\frac{v}{\theta}\left(1-\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta t_i^2}\right)$ 为 Δ_{t_i}，可作分解

$$\begin{aligned}
\Phi_1(n)&=n^{-1}(n\log n)^{-\frac{1}{\alpha}}h^{-1-\frac{2}{\alpha}}\left[h^{1+\frac{2}{\alpha}}\sum_{i=1}^{n-1}c_{i,h}U_i\sum_{k=1}^{i}\frac{k}{c_{k,h}}U_{k-1}+h^{\frac{1}{\alpha}}\sum_{i=1}^{n-1}\Delta_{t_i}U_i\right]\\
&=n^{-1}(n\log n)^{-\frac{1}{\alpha}}\sum_{i=1}^{n-1}c_{i,h}U_i\sum_{k=1}^{i}\frac{k}{c_{k,h}}U_{k-1}+n^{-1}(n\log n)^{-\frac{1}{\alpha}}h^{-1-\frac{1}{\alpha}}\sum_{i=1}^{n-1}\Delta_{t_i}U_i\\
&=n^{-1}(n\log n)^{-\frac{1}{\alpha}}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1-j}(l+1)\frac{c_{l+j,h}}{c_{l+1,h}}U_lU_{l+j}+n^{-1}(n\log n)^{-\frac{1}{\alpha}}h^{-1-\frac{1}{\alpha}}\sum_{i=1}^{n-1}\Delta_{t_i}U_i\\
&=n^{-1}(n\log n)^{-\frac{1}{\alpha}}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1}(l+1)\frac{c_{l+j,h}}{c_{l+1,h}}U_lU_{l+j}-n^{-1}(n\log n)^{-\frac{1}{\alpha}}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{l=n-j}^{n-1}(l+1)\frac{c_{l+j,h}}{c_{l+1,h}}U_lU_{l+j}\\
&\quad+n^{-1}(n\log n)^{-\frac{1}{\alpha}}h^{-1-\frac{1}{\alpha}}\sum_{i=1}^{n-1}\Delta_{t_i}U_i\\
&=n^{-1}(n\log n)^{-\frac{1}{\alpha}}\sum_{l=0}^{n-1}(l+1)U_lU_{l+1}+n^{-1}(n\log n)^{-\frac{1}{\alpha}}\sum_{j=2}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1}(l+1)\frac{c_{l+j,h}}{c_{l+1,h}}U_lU_{l+j}\\
&\quad-n^{-1}(n\log n)^{-\frac{1}{\alpha}}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{l=n-j}^{n-1}(l+1)\frac{c_{l+j,h}}{c_{l+1,h}}U_lU_{l+j}+n^{-1}(n\log n)^{-\frac{1}{\alpha}}h^{-1-\frac{1}{\alpha}}\sum_{i=1}^{n-1}\Delta_{t_i}U_i\\
&:=F_1+F_2+F_3+F_4.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

根据马尔可夫不等式，在 $n\to\infty$ 时，

$$\begin{aligned}
P\left(\left|F_2\right|>\varepsilon\right)&\le\varepsilon^{-1}n^{-1}(n\log n)^{-\frac{1}{\alpha}}\mathbb{E}\left|\sum_{j=2}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1}(l+1)\frac{c_{l+j,h}}{c_{l+1,h}}U_lU_{l+j}\right|\\
&\le\varepsilon^{-1}n^{-1}(n\log n)^{-\frac{1}{\alpha}}\mathbb{E}\left|U_0\right|\mathbb{E}\left|U_1\right|(n-2)\sum_{l=1}^{n-1}(l+1)\frac{c_{l+1,h}}{c_{l,h}}\\
&\le C(n\log n)^{-\frac{1}{\alpha}}\sum_{l=1}^{n-1}(l+1)\mathrm{e}^{-\theta\left(l+\frac{1}{2}\right)h^2}\\
&\le C'(n\log n)^{-\frac{1}{\alpha}}
\end{aligned} \tag{4.16}$$

右端收敛于 0。我们作分解如

$$F_3 = n^{-1}(n\log n)^{-\frac{1}{\alpha}}\left[(n-1+1)U_{n-1}U_n\right] + n^{-1}(n\log n)^{-\frac{1}{\alpha}}\sum_{j=2}^{n-1}\sum_{l=n-j}^{n-1}(l+1)\frac{c_{l+j,h}}{c_{l+1,h}}U_lU_{l+j} \\ := F_{31}+F_{32}. \tag{4.17}$$

由马尔可夫不等式可知，在 $n\to\infty$ 时，

$$P(|F_{31}|>\varepsilon)\le \varepsilon^{-1}(n\log n)^{-\frac{1}{\alpha}}\mathbb{E}|U_{n-1}U_n| \le \varepsilon^{-1}\mathbb{E}|U_{n-1}|\mathbb{E}|U_n|(n\log n)^{-\frac{1}{\alpha}} \le C(n\log n)^{-\frac{1}{\alpha}} \tag{4.18}$$

右端收敛到 0，且

$$\begin{aligned} P(|F_{32}|>\varepsilon) &\le \varepsilon^{-1}n^{-1}(n\log n)^{-\frac{1}{\alpha}}\mathbb{E}|U_l|\mathbb{E}|U_{l+j}|\sum_{j=2}^{n-1}\sum_{l=n-j}^{n-1}(l+1)\frac{c_{l+j}}{c_{l+1}} \\ &\le Cn^{-1}(n\log n)^{-\frac{1}{\alpha}}\sum_{j=2}^{n-1}j(n-j+1)\frac{c_n}{c_{n-j+1}} \\ &\le C'(n\log n)^{-\frac{1}{\alpha}} \end{aligned} \tag{4.19}$$

右端收敛于 0，同时

$$P(|F_4|>\varepsilon)\le \varepsilon^{-1}n^{-1}(n\log n)^{-\frac{1}{\alpha}}h^{-1-\frac{1}{\alpha}}\mathbb{E}|U_i|\cdot\frac{v}{\theta}\sum_{i=1}^{n-1}(1-c_{i,h}) \le C(n\log n)^{-\frac{1}{\alpha}}h^{-1-\frac{1}{\alpha}} \tag{4.20}$$

右端收敛于 0。结合(4.15)到(4.20)，即可得证命题 4.3。

命题 4.4 在条件(A1) 满足的情况下，有依分布收敛如下，

$$n^{-1}(n\log n)^{-\frac{1}{\alpha}}\sum_{l=0}^{n-1}(l+1)U_lU_{l+1} \Rightarrow \frac{1}{2}C_\alpha^{\frac{2}{\alpha}}Z_1.$$

证明：在命题 4.3 中我们已设

$$F_1 = n^{-1}(n\log n)^{-\frac{1}{\alpha}}\sum_{l=0}^{n-1}(l+1)U_lU_{l+1}. \tag{4.21}$$

事实上，

$$\sum_{l=0}^{n-1}(l+1)U_lU_{l+1} + \sum_{l=0}^{n-1}(l+1)U_{n-l}U_{n-1-l} = (n+1)\sum_{l=0}^{n-1}U_lU_{l+1},$$

且

$$\begin{aligned} &P\left(\left|\sum_{l=0}^{n-1}(l+1)U_lU_{l+1} - \sum_{l=0}^{n-1}(l+1)U_{n-l}U_{n-1-l}\right|>\varepsilon\right) \\ &\le \varepsilon^{-1}\mathbb{E}\left|\sum_{l=0}^{n-1}(l+1)U_lU_{l+1} - \sum_{l=0}^{n-1}(l+1)U_{n-l}U_{n-1-l}\right| \\ &\le \varepsilon^{-1}\left[\mathbb{E}|U_lU_{l+1}| - \mathbb{E}|U_{n-l}U_{n-1-l}|\right]\sum_{l=0}^{n-1}(l+1) = 0. \end{aligned} \tag{4.22}$$

由引理 4.1 可知，

$$n^{-1}(n\log n)^{-\frac{1}{\alpha}}(n+1)\sum_{l=0}^{n-1}U_lU_{l+1} \Rightarrow C_\alpha^{\frac{2}{\alpha}}Z_1.$$

综合(4.21)及(4.22)，则可证命题 4.4。

现在证明定理 4.1。在满足条件(A1)的情况下，利用引理 4.1，在 $n\to\infty$ 时，有

$$\Phi_2(n)=n^{-2}(n\log n)^{-\frac{1}{\alpha}}h^{-1-\frac{2}{\alpha}}\left[M_{nh}\sum_{i=1}^{n}Y_{i-1}\right]=\frac{M_{nh}}{nh}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_{t_{i-1}}\cdot(n\log n)^{-\frac{1}{\alpha}}h^{-\frac{2}{\alpha}} \tag{4.23}$$

右端收敛于 0。结合命题 4.1 到命题 4.4，以及(4.23)，即可得到定理 4.1。

定理 4.2 在条件(A1)满足的情况下，我们有如下依分布收敛

$$n\left(\frac{\log n}{n}\right)^{-\frac{1}{\alpha}}h^2\left(\hat{v}-v-\frac{M_{nh}}{nh}\right)=\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}Y_{t_{i-1}}\right]n\left(\frac{\log n}{n}\right)^{-\frac{1}{\alpha}}h^2\left(\hat{\theta}-\theta\right)\Rightarrow\frac{v}{2\theta}\frac{Z_1}{Z_0}.$$

证明：已知

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}Y_{t_{i-1}}n\left(\frac{\log n}{n}\right)^{-\frac{1}{\alpha}}h^2\left(\hat{\theta}-\theta\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}Y_{t_{i-1}}\left[-\frac{\Phi_1(n)}{\Phi_3(n)}+\frac{\Phi_2(n)}{\Phi_3(n)}\right], \tag{4.24}$$

结合定理 4.1 及引理 3.1，立刻得证定理 4.2。

5. 总结

目前已研究的自交互扩散大多是由布朗运动驱动的，然而随着真实经济模型复杂度的增加和随机过程研究的深入，这一类自交互扩散已经不能满足实际需求。本文虽研究了由 α -稳定过程驱动的线性自吸引扩散的参数估计问题，但是注意线性模型只是一类基本模型。得益于 Y 的显式解，渐近分布得以有具体的形式，但这也带来一些计算上的麻烦。若引理 4.1 能进一步拓展，渐近分布的推导可能有更好的解决方式。事实上，布朗运动是 α -稳定过程和分数布朗运动的特殊情形，而 α -稳定过程是 Lévy 过程的特殊情形。由其它过程所驱动的自交互扩散的一些问题都还尚待研究，同时参数也存在许多优劣不同的估计量，且其离散观测情形下的渐近分布也相应有所不同，希望未来在该领域有更多的研究。

基金项目

国家自然科学基金资助项目(No. 11971101)。

参考文献

[1] Coppersmith, D. and Diaconis, P. (1986) Random Walks with Reinforcement. Unpublished Manuscript.

[2] Durrett, R. and Rogers, L.C.G. (1991) Asymptotic Behavior of Brownian Polymer. *Probability Theory and Related Fields*, **92**, 337-349. https://doi.org/10.1007/BF01300560

[3] Pemantle, R. (1988) Phase Transition in Reinforced Random Walk and RWRE on Trees. *Annals of Probability*, **16**, 1229-1241. https://doi.org/10.1214/aop/1176991687

[4] Cranston, M. and Le Jan, Y. (1995) Self-Attracting Diffusions: Two Case Studies. *Mathematische Annalen*, **303**, 87-93. https://doi.org/10.1007/BF01460980

[5] Raimond, O. (1997) Self-Attracting Diffusions: Case of the Constant Interaction. *Probability Theory and Related Fields*, **107**, 177-196. https://doi.org/10.1007/s004400050082

[6] Benaïm, M., Ledoux, M. and Raimond, O. (2002) Self-Interacting Diffusions. *Probability Theory and Related Fields*, **122**, 1-41. https://doi.org/10.1007/s004400100161

[7] Benaïm, M. and Raimond, O. (2003) Self-Interacting Diffusions II: Convergence in Law. *Annales de l'Institut Henri Poincare* (*B*) *Probability and Statistics*, **39**, 1043-1055. https://doi.org/10.1016/S0246-0203(03)00028-1

[8] Benaïm, M. and Raimond, O. (2005) Self-Interacting Diffusions. III. Symmetric Interactions. *Annals of Probability*, **33**, 1716-1759. https://doi.org/10.1214/009117905000000251

[9] Benaïm, M. and Raimond, O. (2011) Self-Interacting Diffusions IV: Rate of Convergence. *Electronic Journal of Probability*, **16**, 1815-1843. https://doi.org/10.1214/EJP.v16-948

[10] Cranston, M. and Mountford, T.S. (1996) The Strong Law of Large Numbers for a Brownian Polymer. *Annals of Probability*, **24**, 1300-1323. https://doi.org/10.1214/aop/1065725183

[11] Chambeu, S. and Kurtzmann, A. (2011) Some Particular Self-Interacting Diffusions: Ergodic Behaviour and Almost Convergence. *Bernoulli*, **17**, 1248-1267. https://doi.org/10.3150/10-BEJ310

[12] Gauthier, C.-E. (2016) Self Attracting Diffusions on a Sphere and Application to a Periodic Case. *Electronic Communications in Probability*, **21**, 1-12. https://doi.org/10.1214/16-ECP4547

[13] Herrmann, S. and Roynette, B. (2003) Boundedness and Convergence of Some Self-Attracting Diffusions. *Mathematische Annalen*, **325**, 81-96. https://doi.org/10.1007/s00208-002-0370-0

[14] Herrmann, S. and Scheutzow, M. (2004) Rate of Convergence of Some Self-Attracting Diffusions. *Stochastic Processes and Their Applications*, **111**, 41-55. https://doi.org/10.1016/j.spa.2003.10.012

[15] Mountford, T. and Tarrés, P. (2008) An Asymptotic Result for Brownian Polymers. *Annales de l'Institut Henri Poincare* (*B*) *Probability and Statistics*, **44**, 29-46. https://doi.org/10.1214/07-AIHP113

[16] Kleptsyny, V. and Kurtzmann, A. (2012) Ergodicity of Self-Attracting Motion. *Electronic Journal of Probability*, **17**, 1-37. https://doi.org/10.1214/EJP.v17-2121

[17] Kurtzmann, A. and Zhi, D. (2014) Convergence in Distribution of Some Self-Interacting Diffusions. *Journal of Probability and Statistics*, **2014**, Article ID: 364321. https://doi.org/10.1155/2014/364321

[18] Sun, X. and Yan, L. (2021) Asymptotic Behaviour on the Linear Self-Interacting Diffusion Driven by α-Stable Motion. *Stochastics*, **53**, 1-23.

[19] Sun, X. and Yan, L. (2021) The Laws of Large Numbers Associated with the Linear Self-Attracting Diffusion Driven by Fractional Brownian Motion and Applications. *Journal of Theoretical Probability*. https://doi.org/10.1007/s10959-021-01126-0

[20] Gan, Y. and Yan, L. (2018) Least Squares Estimation for the Linear Self-Repelling Diffusion Driven by Fractional Brownian Motion. *Science China Mathematics*, **48**, 1143-1158. (In Chinese) https://doi.org/10.1360/SCM-2017-0387

[21] Hu, Y. and Long, H. (2009) Least Squares Estimator for Ornstein-Uhlenbeck Processes Driven by α-Stable Motions. *Stochastic Processes and Their Applications*, **119**, 2465-2480. https://doi.org/10.1016/j.spa.2008.12.006

[22] Janicki, A., Michna, Z. and Weron, A. (1996) Approximation of Stochastic Differential Equations Driven by α-Stable Lévy Motion. *Applicationes Mathematicae*, **24**, 149-168. https://doi.org/10.4064/am-24-2-149-168

[23] Samorodnitsky, G. and Taqqu, M.S. (1994) Stable Non-Gaussian Random Processes. Chapman & Hall, New York.

[24] Rosinski, J. and Woyczynski, W.A. (1986) On Itô Stochastic Integration with Respect to Ps Table Motion: Inner Clock, Integrability of Sample Paths, Double and Multiple Integrals. *Annals of Probability*, **14**, 271-286. https://doi.org/10.1214/aop/1176992627

[25] Janicki, A. and Weron, A. (1993) Simulation and Chaotic Behavior of α-Stable Stochastic Processes. CRC Press, New York.

[26] Davis, R. and Resnick, S. (1986) Limit Theory for the Sample Covariance and Correlation Functions of Moving Averages. *Annals of Statistics*, **14**, 533-558. https://doi.org/10.1214/aos/1176349937