Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2021, 10(12), 4483-4488**
Published Online December 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.1012477

各向异性弹性平面的混合解析函数方法

郭艳娟，刘　华，屈非非

天津职业技术师范大学理学院，天津

收稿日期：2021年11月27日；录用日期：2021年12月17日；发布日期：2021年12月30日

摘　要

本文将混合解析函数方法应用到含裂纹的各向异性平面弹性理论中去，得到了应力函数的混合解析函数表达式，并且运用此方法研究了含裂纹各向异性弹性平面的第一基本问题。

关键词

各向异性，混合解析函数，应力函数，Riemann边值问题

Mixed Analytic Function Method for Anisotropic Elastic Planes

Yanjuan Guo, Hua Liu, Feifei Qu

School of Science, Tianjin University of Technology and Education, Tianjin

Received: Nov. 27th, 2021; accepted: Dec. 17th, 2021; published: Dec. 30th, 2021

Abstract

In this paper, we apply the mixed analytic function method to anisotropic elastic planes with cracks, and obtain the mixed analytic function expressions for stress functions. This method is also applied to solve the first fundamental problem of anisotropic planes with cracks.

Keywords

Anisotropy, Mixed Analytic Function, Stress Function, Riemann Boundary Value Problem

文章引用: 郭艳娟, 刘华, 屈非非. 各向异性弹性平面的混合解析函数方法[J]. 应用数学进展, 2021, 10(12): 4483-4488.
DOI: 10.12677/aam.2021.1012477

1. 应力函数的混合解析函数表达式

在平面弹性静平衡状态下，忽略体积力，应力函数 F 满足方程[1]

$$a_{22}\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}-2a_{26}\frac{\partial^4 F}{\partial x^3\partial y}+2\left(a_{12}+a_{66}\right)\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\partial y^2}-2a_{16}\frac{\partial^4 F}{\partial x\partial y^3}+a_{11}\frac{\partial^4 F}{\partial y^4}=0 \tag{1}$$

其中 a_{ij} 是由材料弹性参数确定的常数。

令 $\mu_k\left(k=1,2,3,4\right)$ 是(1)的特征方程

$$L\left(\mu\right)=a_{11}\mu^4-2a_{16}\mu^3+\left(2a_{12}+a_{66}\right)\mu^2-2a_{26}\mu+a_{22}=0$$

的根。这个常系数代数方程的根为两组成对的虚部非零的共轭复根，[2]中讨论了两组根不相等的情况。本文考虑重根的情形，为了讨论方便我们还限制正交各向异性的情形，即

$$\mu_1=\mu_2=\beta i,\quad \bar{\mu}_1=\bar{\mu}_2=-\beta i\left(\beta>0\right).$$

记一阶线性微分算子的符号如下：

$$D_k=\frac{\partial}{\partial y}-\mu_k\frac{\partial}{\partial x} \tag{2}$$

方程(1)可重写为

$$D_1D_2D_3D_4F=0 \tag{3}$$

为了简化应力函数表达式，下面，我们将给出混合解析函数的定义和相关性质。

定义 1 设 $\lambda,\eta\in R$ 且 $\lambda\neq\pm\eta$，若对复平面 G 中任意 z，函数 f 满足

$$\lambda\frac{\partial f}{\partial z}+\eta\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0 \tag{4}$$

就称函数 f 为域 G 上的 $\left(\lambda,\eta\right)$ 型混合解析函数。

引理 1 函数 f 是 G 上的混合解析函数当且仅当 g 是 $\rho\left(G\right)$ 上的解析函数[3]。

证明：设 f 为 G 上的混合解析函数，我们定义复函数 $w=\rho\left(z\right)=s+i\delta$ 如下：

$$\left.\begin{aligned}s&=\frac{x}{\eta+\lambda}\\ \delta&=\frac{y}{\eta-\lambda}\end{aligned}\right\}$$

其中 $z=x+iy\in G$。

在 $\rho\left(G\right)$ 上定义函数 $g\left(w\right)=f\left(z\right)$，即 $g\left(w\right)=f\left(\rho^{-1}\left(w\right)\right)$。我们有

$$\frac{1}{2}\left[\left(\lambda+\eta\right)\frac{\partial f}{\partial x}+i\left(\eta-\lambda\right)\frac{\partial f}{\partial y}\right]=0$$

即

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial s}+i\frac{\partial g}{\partial \delta}\right)=0 .$$

上式表明 $\frac{\partial g}{\partial \overline{w}}=0$， $w\in\rho(G)$，从而 g 是 $\rho(G)$ 上的解析函数。

反之，若 g 是 $\rho(G)$ 上的解析函数，我们可得到 f 是 G 上的混合解析函数。

记

$$\lambda_1=\frac{1+i\mu_1}{1-i\mu_1} \tag{5}$$

和

$$z_1=z+\lambda_1\overline{z} \tag{6}$$

由[1]，如果 F 是(3)的解，则它有如下表示

$$F=2\operatorname{Re}\left[F_1(z_1)+\overline{z}_1F_2(z_1)\right] \tag{7}$$

其中 $F_1(z_1)$、 $F_2(z_1)$ 是复变数 z_1 的两个解析函数。

令

$$\begin{cases}\lambda+\eta=1\\ \eta-\lambda=\dfrac{i}{\mu_1}\end{cases} \tag{8}$$

由引理 1，存在混合解析函数 $\chi(z)=F_1(z_1)$， $\varphi(z)=F_2(z_1)$ 。

从而，我们可以用混合解析函数来表示应力函数，如下：

$$\begin{aligned}F&=2\operatorname{Re}\left[\left(\overline{z}+\overline{\lambda_1}z\right)\varphi(z)+\chi(z)\right]\\&=\left(\overline{z}+\overline{\lambda_1}z\right)\varphi(z)+\left(z+\lambda_1\overline{z}\right)\overline{\varphi(z)}+\chi(z)+\overline{\chi(z)}\end{aligned} \tag{9}$$

因为 F 的偏导才有直接的物理意义，所以

$$\frac{\partial F}{\partial x}=(1+\lambda_1)\varphi(z)+\left(\overline{z}+\overline{\lambda_1}z\right)\varphi'(z)+(1+\lambda_1)\overline{\varphi(z)}+\left(z+\lambda_1\overline{z}\right)\overline{\varphi'(z)}+\chi'(z)+\overline{\chi'(z)} \tag{10}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=i\left[\left(-1+\overline{\lambda_1}\right)\varphi(z)+\left(\overline{z}+\overline{\lambda_1}z\right)\varphi'(z)+(1-\lambda_1)\overline{\varphi(z)}-\left(z+\lambda_1\overline{z}\right)\overline{\varphi'(z)}+\chi'(z)-\overline{\chi'(z)}\right] \tag{11}$$

对于 $\frac{\partial F}{\partial x}$、 $\frac{\partial F}{\partial y}$，利用复数形的结合形式，再结合(10)、(11)式我们可以得到[4]

$$f(x,y)=\frac{\partial F}{\partial x}+i\frac{\partial F}{\partial y}=2\varphi(z)+2\lambda_1\overline{\varphi(z)}+2\left(z+\lambda_1\overline{z}\right)\overline{\varphi'(z)}+2\overline{\psi(z)} \tag{12}$$

其中 $\psi(z)=\chi'(z)$ 。

根据文献[4]，我们有

$$X_n=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right),\quad Y_n=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) \tag{13}$$

这里作用在曲线 ds 上的应力 $(X_n\mathrm{d}s,Y_n\mathrm{d}s)$，是指从法线正侧作用于其上的应力。在复数的形式下有

$$\left(X_n+iY_n\right)\mathrm{d}s=-i\mathrm{d}\left(\frac{\partial F}{\partial x}+i\frac{\partial F}{\partial y}\right)$$

从而

$$\left(X_n+iY_n\right)\mathrm{d}s=-i\mathrm{d}\left\{2\varphi(z)+2\lambda_1\overline{\varphi(z)}+2\left(z+\lambda_1\overline{z}\right)\overline{\varphi'(z)}+2\overline{\psi(z)}\right\}. \tag{14}$$

函数 f 的力学意义

$$\begin{aligned}f(x,y)&=2\varphi(z)+2\lambda_1\overline{\varphi(z)}+2\left(z+\lambda_1\overline{z}\right)\overline{\varphi'(z)}+2\overline{\psi(z)}\\&=i\int_{AB}\left(X_n+iY_n\right)\mathrm{d}s+const\\&=i\left(X+iY\right)+const\end{aligned} \tag{15}$$

其中 (X,Y) 是从定点 A 与动点 $B(x,y)$ 之间任意弧的法线正侧作用于弧上的应力主矢量[4]。

2. 含裂纹各向异性弹性平面的第一基本问题

现设 S 是有界单连通域，其边界由封闭光滑曲线 L 所围成，现取定反时针方向为其正向。设 L 两侧的外应力为 $X_n^{\pm}(t)+iY_n^{\pm}(t)$，$t\in L$，求弹性平衡。在弹性力学中，我们称之为第一基本问题。

我们在 L_j 正、负侧上分别定义：

$$f_j^{+}(t)=i\int_{a_j}^{t}\left(X_n^{+}+iY_n^{+}\right)\mathrm{d}s,\quad t\in L_j \tag{16}$$

$$f_j^{-}(t)=i\left(X_j+iY_j\right)-i\int_{a_j}^{t}\left(X_n^{-}+iY_n^{-}\right)\mathrm{d}s,\quad t\in L_j \tag{17}$$

其中 s 是 L_j 上的弧长参数[5]。

根据第一节我们得到的条件，所求问题化为下列边值问题：

$$\left.\begin{aligned}2\varphi^{+}(t)+2\lambda_1\overline{\varphi^{+}(t)}+2\left(t+\lambda_1\overline{t}\right)\overline{\varphi'^{+}(t)}+2\overline{\psi^{+}(t)}=f_j^{+}(t)+C_j^{+}\\2\varphi^{-}(t)+2\lambda_1\overline{\varphi^{-}(t)}+2\left(t+\lambda_1\overline{t}\right)\overline{\varphi'^{-}(t)}+2\overline{\psi^{-}(t)}=f_j^{-}(t)+C_j^{-}\end{aligned}\right\},\quad t\in L_j,\quad j=1,2,\cdots,p. \tag{18}$$

其中 C_j^{+}，C_j^{-} 是某些常数。由文献[5]，我们知道 $C_j^{+}=C_j^{-}$，以后记 $C_j=C_j^{\pm}$。那么上式变为

$$2\varphi^{\pm}(t)+2\lambda_1\overline{\varphi^{\pm}(t)}+2\left(t+\lambda_1\overline{t}\right)\overline{\varphi'^{\pm}(t)}+2\overline{\psi^{\pm}(t)}=f^{\pm}(t)+C,\quad t\in L. \tag{19}$$

不失一般性，我们将设所有 $X_j+iY_j=0$，且 $\Gamma=\Gamma'=0$。假设 $\varphi(\infty)=0$。记

$$F(t)=f^{+}(t)-f^{-}(t),\quad G(t)=f^{+}(t)+f^{-}(t). \tag{20}$$

引进新的函数 $\omega_1(\zeta)$，$\omega_2(\zeta)$ 使得

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\omega_1(\zeta)}{\left(\eta\zeta-\lambda\overline{\zeta}\right)-\left(\eta z-\lambda\overline{z}\right)}\left(\eta\mathrm{d}\zeta-\lambda\mathrm{d}\overline{\zeta}\right),\quad z\notin L \tag{21}$$

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\omega_2(\zeta)}{\left(\eta\zeta-\lambda\overline{\zeta}\right)-\left(\eta z-\lambda\overline{z}\right)}\left(\eta\mathrm{d}\zeta-\lambda\mathrm{d}\overline{\zeta}\right),\quad z\notin L \tag{22}$$

这样 $\varphi(\infty)=0$，$\psi(\infty)=0$。

由(18)式我们可得到

$$2\left[\varphi^{+}(t)+\varphi^{-}(t)\right]+2\lambda_1\left[\overline{\varphi^{+}(t)}+\overline{\varphi^{-}(t)}\right]+2\left(t+\lambda_1\overline{t}\right)\left[\overline{\varphi'^{+}(t)}+\overline{\varphi'^{-}(t)}\right]+2\left[\overline{\psi^{+}(t)}+\overline{\psi^{-}(t)}\right]=f^{+}(t)+f^{-}(t) \tag{23}$$

$$2\left[\varphi^{+}(t)-\varphi^{-}(t)\right]+2\lambda_1\left[\overline{\varphi^{+}(t)}-\overline{\varphi^{-}(t)}\right]+2\left(t+\lambda_1\bar{t}\right)\left[\overline{\varphi'^{+}(t)}-\overline{\varphi'^{-}(t)}\right]+2\left[\overline{\psi^{+}(t)}-\overline{\psi^{-}(t)}\right]=f^{+}(t)-f^{-}(t) \quad (24)$$

利用 Plemelj 公式[3]，有

$$\varphi^{\pm}(t)=\pm\omega_1(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\omega_1(\zeta)}{\left(\eta\zeta-\lambda\bar{\zeta}\right)-\left(\eta t-\lambda\bar{t}\right)}\left(\eta\mathrm{d}\zeta-\lambda\overline{\mathrm{d}\zeta}\right),\ t\in L \quad (25)$$

$$\psi^{\pm}(t)=\pm\omega_2(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\omega_2(\zeta)}{\left(\eta\zeta-\lambda\bar{\zeta}\right)-\left(\eta t-\lambda\bar{t}\right)}\left(\eta\mathrm{d}\zeta-\lambda\overline{\mathrm{d}\zeta}\right),\ t\in L \quad (26)$$

将(25)与(26)式代入(24)式中得到

$$4\omega_1(t)+4\lambda_1\overline{\omega_1(t)}+4\left(t+\lambda_1\bar{t}\right)\overline{\omega_1'(t)}+4\overline{\omega_2(t)}=f^{+}(t)-f^{-}(t),\ t\in L \quad (27)$$

即

$$\omega_2(t)=-\overline{\omega_1(t)}-\overline{\lambda_1}\omega_1(t)-\left(\bar{t}+\overline{\lambda_1}t\right)\omega_1'(t)+\frac{1}{4}\left[\overline{f^{+}(t)}-\overline{f^{-}(t)}\right],\ t\in L \quad (28)$$

从而

$$\begin{aligned}\psi(z)=&-\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\overline{\omega_1(\zeta)}}{\left(\eta\zeta-\lambda\bar{\zeta}\right)-\left(\eta z-\lambda\bar{z}\right)}\left(\eta\mathrm{d}\zeta-\lambda\overline{\mathrm{d}\zeta}\right)\\&-\frac{\overline{\lambda_1}}{2\pi i}\int_L\frac{\omega_1(\zeta)}{\left(\eta\zeta-\lambda\bar{\zeta}\right)-\left(\eta z-\lambda\bar{z}\right)}\left(\eta\mathrm{d}\zeta-\lambda\overline{\mathrm{d}\zeta}\right)\\&-\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\bar{\zeta}\cdot\omega_1'(\zeta)}{\left(\eta\zeta-\lambda\bar{\zeta}\right)-\left(\eta z-\lambda\bar{z}\right)}\left(\eta\mathrm{d}\zeta-\lambda\overline{\mathrm{d}\zeta}\right)\quad ,\ z\notin L\\&-\frac{\overline{\lambda_1}}{2\pi i}\int_L\frac{\zeta\cdot\omega_1'(\zeta)}{\left(\eta\zeta-\lambda\bar{\zeta}\right)-\left(\eta z-\lambda\bar{z}\right)}\left(\eta\mathrm{d}\zeta-\lambda\overline{\mathrm{d}\zeta}\right)\\&+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\overline{F(\zeta)}}{\left(\eta\zeta-\lambda\bar{\zeta}\right)-\left(\eta z-\lambda\bar{z}\right)}\left(\eta\mathrm{d}\zeta-\lambda\overline{\mathrm{d}\zeta}\right)\end{aligned} \quad (29)$$

将得到的$\varphi(z)$，$\psi(z)$代入(23)式中，问题(19)就化为下列混合解析函数奇异积分方程

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\omega_1(\zeta)}{\left(\eta\zeta-\lambda\bar{\zeta}\right)-\left(\eta t-\lambda\bar{t}\right)}\left(\eta\mathrm{d}\zeta-\lambda\overline{\mathrm{d}\zeta}\right)\\&+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\omega_1(\zeta)}{\left(\eta\bar{\zeta}-\lambda\zeta\right)-\left(\eta\bar{t}-\lambda t\right)}\left(\eta\overline{\mathrm{d}\zeta}-\lambda\mathrm{d}\zeta\right)\quad ,\ t\in L\\&-\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{F(\zeta)}{\left(\eta\bar{\zeta}-\lambda\zeta\right)-\left(\eta\bar{t}-\lambda t\right)}\left(\eta\overline{\mathrm{d}\zeta}-\lambda\mathrm{d}\zeta\right)=\frac{1}{2}G(t)\end{aligned} \quad (30)$$

最终，第一基本问题转化为只需求解方程(30)。而在求解上述方程时，我们可参考[6]中奇异积分方程的一般解法进行求解。至此，我们利用混合解析函数方法解决了含裂纹各向异性弹性平面的第一基本问题。

基金项目

国家自然科学基金项目(12101453)。

参考文献

[1] Лехницкий, С.Г. 各向异性板[M]. 胡海昌, 译. 北京: 科学出版社, 1963.

[2] 张建勇, 李星. 各向异性平面含斜裂纹的奇异积分方程方法[J]. 力学季刊, 2004, 25(2): 248-255.

[3] 王路路, 刘华. 开口曲线上混合解析函数的 Riemann 边值问题[J]. 宁夏师范学院学报, 2020, 41(10): 33-40.

[4] Мусхелищвили, Н.И. 数学弹性力学的几个基本问题[M]. 北京: 科学出版社, 1958.

[5] 路见可. 平面弹性复变方法[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2005.

[6] 路见可. 解析函数边值问题教程[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2009.