Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2021, 10(4), 1290-1300
Published Online April 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.104138

Hans汉斯

非奇异H-矩阵的一组细分迭代实用判定方法

吴　乐，庹　清*，石　慧

吉首大学数学与统计学院，湖南 吉首
Email: 15674347725@163.com, *tuoqing_001@163.com, 1963813873@qq.com

收稿日期：2021年3月27日；录用日期：2021年4月15日；发布日期：2021年4月29日

摘　要

非奇异H-矩阵广泛应用于计算数学、控制理论、弹性力学以及神经网络系统等研究领域，但对非奇异H-矩阵的判定十分困难。本文研究了非奇异H-矩阵判定条件，通过对矩阵指标集按要求细分和构造递进的正对角矩阵元素，得到了非奇异H-矩阵的一组细分迭代实用判定方法，并给出证明，运用数值算例表明新判定条件优于已知结果。

关键词

非奇异H-矩阵，对角占优矩阵，不可约，非零元素链

A Set of Subdivision Iteration Practical Criteria for Nonsingular H-Matrix

Le Wu, Qing Tuo*, Hui Shi

College of Mathematics and Statistics, Jishou University, Jishou Hunan
Email: 15674347725@163.com, *tuoqing_001@163.com, 1963813873@qq.com

Received: Mar. 27th, 2021; accepted: Apr. 15th, 2021; published: Apr. 29th, 2021

Abstract

Nonsingular H-matrices have been widely used in many fields, such as computational mathematics, control theory, elastic mechanics, neural network system, etc. But it is very difficult to judge nonsingular H-matrix. In this paper, the criteria for nonsingular H-matrices are studied. By subdividing the matrix index set according to the requirements and constructing progressive diagonal matrix elements, a set of new subdividing iterative criteria for nonsingular H-matrices are obtained

*通讯作者。

文章引用: 吴乐, 庹清, 石慧. 非奇异 H-矩阵的一组细分迭代实用判定方法[J]. 应用数学进展, 2021, 10(4): 1290-1300.
DOI: 10.12677/aam.2021.104138

and proved. Finally, numerical examples show that the new decision condition is superior to the known results.

Keywords

Nonsingular *H*-Matrices, Diagonally Dominant Matrix, Irreducible, Nonzero Elements Chain

1. 引言

非奇异 *H*-矩阵作为特殊矩阵中的重要矩阵类，其数值判定方法一直是研究的热点问题，国内外学者从不同的角度进行了研究，给出了许多研究成果[1]-[12]。其中，文献[1]利用不等式放缩技巧，改进放缩因子，得到一组一般的判定条件。文献[2]将判定不等式的放缩因子迭代，给出判定非奇异 *H*-矩阵的迭代式新条件，文献[3]根据行和与对角元素的关系将非对角占优的集合进行 *m*-级划分，从而得到判定非奇异 *H*-矩阵更为高效的方法。文献[4]提出将细分指标集和迭代放缩因子结合，得到了非奇异 *H*-矩阵的细分迭代判别条件。本文在上述基础上，对非对角占优行指标集 *m*-级划分的同时，改进了判定条件中的递进迭代系数，构造新的正对角矩阵，推广和改进了已知的相关结果，并通过若干个数值算例对比分析，说明了新判定方法的优越性。

首先记 $M_n(C)(M_n(R))$ 为 n 阶复(实)矩阵的集合，$N=1,2,\cdots,n$，设 $A=(a_{ij})\in M_n(C)$，又记 $\Lambda_i(A)=\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|$，文中简记 $\Lambda_i(A)=\Lambda_i$。对 $\forall i\in N$，如果 $|a_{ii}|\geq\Lambda_i(A)$，则称 A 为对角占优矩阵；对 $\forall i\in N$，如果 $|a_{ii}|>\Lambda_i(A)$，则称 A 为严格对角占优矩阵，记为 $A\in D$；若存在正对角阵 *X*，使得 *AX* 为严格对角占优矩阵，则称 A 为非奇异 *H*-矩阵，记为 $A\in\tilde{D}$。

定义 1 [5] 设 $A=(a_{ij})\in M_n(C)$ 为不可约矩阵，若 $|a_{ii}|\geq\Lambda_i(A)$ $(i\in N)$，且其中至少有一个严格不等式成立，则 A 为不可约对角占优矩阵。

定义 2 [6] 设 $A=(a_{ij})\in M_n(C)$，若对满足 $|a_{ii}|\geq\Lambda_i(A)$ $(i\in N)$，且其中至少有一个严格不等式成立，又对每个等式的下标 i，都存在非零元素链 $a_{ij_1}a_{j_1j_2}\cdots a_{j_{k-1}j_k}\neq 0$，使得 $|a_{j_kj_k}|>\Lambda_{j_k}(A)$，则称 A 为具非零元素链对角占优矩阵。

引理 1 [7] 设 $A=(a_{ij})\in M_n(C)$ 为不可约对角占优矩阵，则 $A\in\tilde{D}$。

引理 2 [7] 设 $A=(a_{ij})\in M_n(C)$ 为具有非零元素链对角占优矩阵，则 $A\in\tilde{D}$。

记，

$$N_1=\{i\in N:0<|a_{ii}|<\Lambda_i\},\ N_2=\{i\in N:|a_{ii}|=\Lambda_i\},$$
$$N_3=\{i\in N:|a_{ii}|>\Lambda_i(A)\},\ N=N_1\oplus N_2\oplus N_3.$$

显然，如果 N_3 为空集，那么 $A\notin\tilde{D}$；如果 $N_1\cup N_2=\varnothing$，则 $A\in D$。因而我们假设集合 $N_1\cup N_2$ 是非空的，集合 N_3 也是非空的。因为非奇异 *H*-矩阵的主对角线上的元素都是非零的，所以本文中涉及的矩阵对角元均假设为非零。另外，在本文中总假定矩阵每行中的非主对角线上的元素模和为正。

将 N_1 进一步划分 $N_1=N_1^{(1)}\cup N_1^{(2)}\cup\cdots\cup N_1^{(m)}$，其中 m 是任意正整数，取 $k\in Z^+$，$k\leq m$，且

$$N_1^{(1)} = \left\{ i \in N : 0 < |a_{ii}| < \frac{1}{m} \Lambda_i(A) \right\},$$

$$N_1^{(k)} = \left\{ i \in N : \frac{k-1}{m} \Lambda_i(A) < |a_{ii}| < \frac{k}{m} \Lambda_i(A) \right\},$$

这里部分可能为空集。

2. 主要结果

为了叙述方便，引入以下符号：

$$x_{1i}^{(k)} = \frac{\frac{k}{m}\left(\Lambda_i - \frac{k}{k+1}|a_{ii}|\right)}{\Lambda_i} \quad \left(i \in N_1^{(k)}, k = 1, 2, \cdots, m\right),$$

$$\delta_{0,i} = \frac{\Lambda_i(A)}{|a_{ii}|} \quad (\forall i \in N_3), \quad \delta_{l,i} = \frac{P_{l,i}}{|a_{ii}|} \quad \left(\forall i \in N_3, l \in Z^+\right),$$

$$P_{l,i}(A) = \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t \in N_1^{(k)}} |a_{it}| x_{1t}^{(k)}\right) + \sum_{t \in N_2} |a_{it}| + \sum_{t \in N_3, t \neq i} |a_{it}| \delta_{l-1,t} \left(\forall i \in N_3, l \in Z^+\right),$$

$$x_{2i} = \frac{\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t \in N_1^{(k)}} |a_{it}| x_{1t}^{(k)}\right) + \sum_{t \in N_2, t \neq i} |a_{it}| + \sum_{t \in N_3} |a_{it}| \delta_{l,t}}{|a_{ii}|} \quad \left(\forall i \in N_2, l \in Z^+\right),$$

$$Q_l = \max_{i \in N_3}\left(\frac{\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t \in N_1^{(k)}} |a_{it}| x_{1t}^{(k)}\right) + \sum_{t \in N_2} |a_{it}| x_{2t} + \sum_{t \in N_3, t \neq i} |a_{it}| \delta_{l,t}}{P_{l,i}(A)}\right) \quad \left(l \in Z^+\right).$$

规定：在本文定理中，对 $\forall i \in N_3$， $l \in Z^+$， $\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t \in N_1^{(k)}} |a_{it}| x_{1t}^{(k)}\right) = 0$ 和 $\sum_{t \in N_3, t \neq i} |a_{it}| \delta_{l-1,i} = 0$ 不会同时存在。

2.1. 定理 1

设 $A \in M_n(C)$，若存在 $l \in Z^+$，使得

$$|a_{ii}| x_{1i}^{(k)} > \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t \in N_1^{(k)}, t \neq i} |a_{it}| x_{1t}^{(k)}\right) + \sum_{t \in N_2} |a_{it}| x_{2t} + Q_l \sum_{t \in N_3} |a_{it}| \delta_{l,t} \quad \left(\forall i \in N_1^{(k)}, k = 1, 2, \cdots, m\right), \tag{1}$$

$$|a_{ii}| x_{2i} > \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t \in N_1^{(k)}} |a_{it}| x_{1t}^{(k)}\right) + \sum_{t \in N_2, t \neq i} |a_{it}| x_{2t} + Q_l \sum_{t \in N_3} |a_{it}| \delta_{l,t} \quad \left(\forall i \in N_2\right), \tag{2}$$

则 $A \in \tilde{D}$。

证明

根据 $x_{1i}^{(k)}$ 的定义可知，

$$0 < x_{1i}^{(k)} < 1 \quad \left(\forall i \in N_1^{(k)}, k = 1, 2, \cdots, m\right),$$

又根据 $P_{l,i}(A)$ 的定义，对 $\forall i \in N_3$ 有

$$P_{1,i}(A)=\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_1^{(k)}}|a_{it}|x_{1t}^{(k)}\right)+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|+\sum_{t\in N_3,t\neq i}|a_{it}|\delta_{0,t}<\Lambda_i(A),$$

即

$$\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_1^{(k)}}|a_{it}|x_{1t}^{(k)}\right)+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|+\sum_{t\in N_3,t\neq i}|a_{it}|\frac{P_{1,t}}{|a_{tt}|}<\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_1^{(k)}}|a_{it}|x_{1t}^{(k)}\right)+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|+\sum_{t\in N_3,t\neq i}|a_{it}|\frac{\Lambda_t(A)}{|a_{tt}|},$$

则 $P_{2,i}(A)<P_{1,i}(A)$。故对 $\forall i\in N_3$，有 $P_{2,i}(A)<P_{1,i}(A)<1$，假设当 $l=n-1$ 时，$P_{n,i}<P_{n-1,i}$，则当 $l=n$ 时，由

$$\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_1^{(k)}}|a_{it}|x_{1t}^{(k)}\right)+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|+\sum_{t\in N_3,t\neq i}|a_{it}|\frac{P_{n,t}}{|a_{tt}|}<\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_1^{(k)}}|a_{it}|x_{1t}^{(k)}\right)+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|+\sum_{t\in N_3,t\neq i}|a_{it}|\frac{P_{n-1,t}}{|a_{tt}|},$$

可得 $P_{n+i,i}(A)<P_{n,i}(A)$，故由数学归纳法知，$P_{l,i}<P_{l-1,i}<\ldots<P_{2,i}(A)<P_{1,i}(A)<\Lambda_i(A)$。

因为 $\delta_{l,i}=\frac{P_{l,i}}{|a_{ii}|}\left(i\in N_3,\ l\in Z^+\right)$，因此对 $\forall i\in N_3$，$l\in Z^+$，有

$$0<\delta_{l,i}<\delta_{l-1,i}<\cdots<\delta_{1,i}<\frac{\Lambda_i(A)}{|a_{ii}|}<1.$$

进而由 x_{2i} 的定义，对 $\forall i\in N_2$，有 $0<x_{2i}<1$。因此对 $\forall i\in N_3$，$l\in Z^+$，有

$$\frac{\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_1^{(k)}}|a_{it}|x_{1t}^{(k)}\right)+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|x_{2t}+\sum_{t\in N_3,t\neq i}|a_{it}|\delta_{l,t}}{P_{l,i}(A)}\le\frac{\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_1^{(k)}}|a_{it}|x_{1t}^{(k)}\right)+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|x_{2t}+\sum_{t\in N_3,t\neq i}|a_{it}|\delta_{l,t}}{\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_1^{(k)}}|a_{it}|x_{1t}^{(k)}\right)+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|+\sum_{t\in N_3,t\neq i}|a_{it}|\delta_{l-1,t}}\le 1.$$

故由 Q_l 的定义，对 $\forall i\in N_3$，$l\in Z^+$，有 $0<Q_l\le 1$。

利用(1)式和(2)式，存在 $l\in Z^+$，可适当地选择充分小的 $\varepsilon>0$，使 ε 同时满足

$$|a_{ii}|x_{1i}^{(k)}>\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_1^{(k)},t\neq i}|a_{it}|x_{1t}^{(k)}\right)+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|x_{2t}+\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\left(Q_l\delta_{l,t}+\varepsilon\right)\ \left(\forall i\in N_1^{(k)},k=1,2,\cdots,m\right),\tag{3}$$

$$|a_{ii}|x_{2i}>\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_1^{(k)}}|a_{it}|x_{1t}^{(k)}\right)+\sum_{t\in N_2,t\neq i}|a_{it}|x_{2t}+\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\left(Q_l\delta_{l,t}+\varepsilon\right)\ \left(\forall i\in N_2\right),\tag{4}$$

构造正对角矩阵 $D=diag(d_1,d_2,\cdots,d_n)$，记 $B=AD=(b_{ij})$，其中

$$d_i=\begin{cases}x_{1i}^{(k)}, & i\in N_1^{(k)}\\ x_{2i}, & i\in N_2\\ Q_l\delta_{l,i}+\varepsilon, & i\in N_3\end{cases}$$

1) 对 $\forall i\in N_1^{(k)}$ $(k=1,2,\cdots,m)$，由(3)式得

$$\begin{aligned}\Lambda_i(B)&=\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_1^{(k)},t\neq i}|a_{it}|x_{1t}^{(k)}\right)+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|x_{2t}+\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\left(Q_l\delta_{l,t}+\varepsilon\right)\\&<|a_{ii}|x_{1i}^{(k)}=|b_{ii}|;\end{aligned}$$

2) 对 $\forall i\in N_2$，由(4)式得

$$\Lambda_i(B)=\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_1^{(k)}}|a_{it}|x_{1t}^{(k)}\right)+\sum_{t\in N_2,t\neq i}|a_{it}|x_{2t}+\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\left(Q_l\delta_{l,t}+\varepsilon\right)$$
$$<|a_{ii}|x_{2i}=|b_{ii}|;$$

3) 对 $\forall i\in N_3$，$l\in Z^+$，有 $\sum_{t\in N_3,t\neq i}|a_{it}|<|a_{ii}|$，由

$$Q_l\geq\frac{\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_1^{(k)}}|a_{it}|x_{1t}^{(k)}\right)+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|x_{2t}+\sum_{t\in N_3,t\neq i}|a_{it}|\delta_{l,t}}{P_{l,i}(A)},$$

得

$$\begin{aligned}Q_lP_{l,i}(A)&\geq\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_1^{(k)}}|a_{it}|x_{1t}^{(k)}\right)+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|x_{2t}+\sum_{t\in N_3,t\neq i}|a_{it}|\delta_{l,t}\\&\geq\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_1^{(k)}}|a_{it}|x_{1t}^{(k)}\right)+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|x_{2t}+Q_l\sum_{t\in N_3,t\neq i}|a_{it}|\delta_{l,t}\end{aligned}\tag{5}$$

$$\begin{aligned}\Lambda_i(B)&=\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_1^{(k)}}|a_{it}|x_{1t}^{(k)}\right)+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|x_{2t}+\sum_{t\in N_3,t\neq i}|a_{it}|\left(Q_l\delta_{l,t}+\varepsilon\right)\\&=\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_1^{(k)}}|a_{it}|x_{1t}^{(k)}\right)+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|x_{2t}+Q_l\sum_{t\in N_3,t\neq i}|a_{it}|\delta_{l,t}+\varepsilon\sum_{t\in N_3,t\neq i}|a_{it}|\\&\leq Q_lP_{l,i}(A)+\varepsilon\sum_{t\in N_3,t\neq i}|a_{it}|\\&<Q_l\delta_{l,i}|a_{ii}|+\varepsilon|a_{ii}|=|b_{ii}|\end{aligned}$$

综上所述，$|b_{ii}|>\Lambda_i(B)\ (\forall i\in N)$，即 $B\in D$，所以矩阵 A 是非奇异 H-矩阵。证毕。

注 1 由于 $0<\dfrac{\frac{k}{m}\left(\Lambda_i(A)-\frac{k}{k+1}|a_{ii}|\right)}{\Lambda_i(A)}<1\ \left(\forall i\in N_1^{(k)},k=1,2,\cdots,m\right)$，$0<x_{2i}<1\ \left(\forall i\in N_2\right)$，则本文定理 1 在迭代判定时要比文[1]定理 1 的判定范围更宽，后面的数值算例可以详细说明。

在定理 1 中取 $m=1$，则 $x_{1i}=\dfrac{\Lambda_i(A)-\frac{1}{2}|a_{ii}|}{\Lambda_i(A)}\ \left(\forall i\in N_1\right)$，即得推论 1。

2.1.1. 推论 1

设 $A\in M_n(C)$，若存在 $l\in Z^+$，使得

$$|a_{ii}|\frac{\Lambda_i(A)-\frac{1}{2}|a_{ii}|}{\Lambda_i(A)}>\sum_{t\in N_1,t\neq i}|a_{it}|\frac{\Lambda_t(A)-\frac{1}{2}|a_{tt}|}{\Lambda_t(A)}+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|x_{2t}+Q_l\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\delta_{l,t}\ \left(\forall i\in N_1\right),$$

$$|a_{ii}|x_{2i}>\sum_{t\in N_1}|a_{it}|\frac{\Lambda_t(A)-\frac{1}{2}|a_{tt}|}{\Lambda_t(A)}+\sum_{t\in N_2,t\neq i}|a_{it}|x_{2t}+Q_l\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\delta_{l,t}\ \left(\forall i\in N_2\right),$$

则 $A\in\tilde{D}$。

注 2 因为 $0<\frac{\Lambda_i(A)-|a_{ii}|}{\Lambda_i(A)}<\frac{\Lambda_i(A)-\frac{1}{2}|a_{ii}|}{\Lambda_i(A)}<1\ (\forall i\in N_1)$，$0<x_{2i}<1\ (\forall i\in N_2)$，对 $\forall i\in N_3$，$l\in Z^+$，有 $0<Q_l\le 1$，$0<\delta_{l,i}<\frac{\Lambda_i(A)}{|a_{ii}|}<1$，此时本文推论 1 的迭代因子比文[2]和文[4]中定理 1 的迭代因子小。所以本文推论 1 的判定条件比文[2]定理 1 和文[4]定理 1 的条件弱，判定的矩阵范围更广。故本文推论 1 推广了文[2]的定理 1 和文[4]的定理 1，后面的数值算例可以说明。

在定理 1 中取 $m=2$，则

$$N_1^{(1)}=\left\{i\in N:0<|a_{ii}|<\frac{1}{2}\Lambda_i(A)\right\},\quad N_1^{(2)}=\left\{i\in N:\frac{1}{2}\Lambda_i(A)<|a_{ii}|<\Lambda_i(A)\right\},$$

即得推论 2。

2.1.2. 推论 2

设 $A\in M_n(C)$，若存在 $l\in Z^+$，使得

$$\begin{aligned}|a_{ii}|\frac{\frac{1}{2}\left(\Lambda_i-\frac{1}{2}|a_{ii}|\right)}{\Lambda_i}&>\sum_{t\in N_1^{(1)},t\ne i}|a_{it}|\frac{\frac{1}{2}\left(\Lambda_t(A)-\frac{1}{2}|a_{ii}|\right)}{\Lambda_t(A)}+\sum_{t\in N_1^{(2)}}|a_{it}|\frac{\Lambda_t(A)-\frac{2}{3}|a_{ii}|}{\Lambda_t(A)}\\&\quad+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|x_{2t}+Q_l\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\delta_{l,t}\quad\left(\forall i\in N_1^{(1)}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|a_{ii}|\frac{\Lambda_i(A)-\frac{2}{3}|a_{ii}|}{\Lambda_i(A)}&>\sum_{t\in N_1^{(1)}}|a_{it}|\frac{\frac{1}{2}\left(\Lambda_t(A)-\frac{1}{2}|a_{ii}|\right)}{\Lambda_t(A)}+\sum_{t\in N_1^{(2)},t\ne i}|a_{it}|\frac{\Lambda_t(A)-\frac{2}{3}|a_{ii}|}{\Lambda_t(A)}\\&\quad+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|x_{2t}+Q_l\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\delta_{l,t}\quad\left(\forall i\in N_1^{(2)}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|a_{ii}|x_{2i}&>\sum_{t\in N_1^{(1)}}|a_{it}|\frac{\frac{1}{2}\left(\Lambda_t(A)-\frac{1}{2}|a_{ii}|\right)}{\Lambda_t(A)}+\sum_{t\in N_1^{(2)}}|a_{it}|\frac{\Lambda_t(A)-\frac{2}{3}|a_{ii}|}{\Lambda_t(A)}\\&\quad+\sum_{t\in N_2,t\ne i}|a_{it}|x_{2t}+Q_l\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\delta_{l,t}\quad\left(\forall i\in N_2\right),\end{aligned}$$

则 $A\in\tilde{D}$。

注 3 因为 $0<\frac{\Lambda_i(A)-|a_{ii}|}{\Lambda_i(A)}<\frac{\Lambda_i(A)-\frac{2}{3}|a_{ii}|}{\Lambda_i(A)}\ \left(\forall i\in N_1^{(2)}\right)$，$0<x_{2i}<1\ (\forall i\in N_2)$，又对 $\forall i\in N_3$，$l\in Z^+$，$0<Q_l\delta_{l,i}\le 1$，并且随着每次迭代 $Q_l\delta_{l,i}$ 的取值会逐渐变小，所以本文推论 2 改进了文[3]定理 1 的判定条件，后面的数值算例可以说明。

2.2. 定理 2

设 $A\in M_n(C)$，A 不可约，若存在 $l\in Z^+$，使得

$$|a_{ii}|x_{1i}^{(k)}\ge\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_1^{(k)},t\ne i}|a_{it}|x_{1t}^{(k)}\right)+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|x_{2t}+Q_l\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\delta_{l,t}\quad\left(\forall i\in N_1^{(k)},k=1,2,\cdots,m\right),\tag{6}$$

$$|a_{ii}|x_{2i} \ge \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_1^{(k)}}|a_{it}|x_{1t}^{(k)}\right)+\sum_{t\in N_2,t\ne i}|a_{it}|x_{2t}+Q_l\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\delta_{l,t}\ \ (\forall i\in N_2), \tag{7}$$

且上式中至少有一个严格不等式成立，则 $A\in\tilde{D}$ 。

证明

因为 A 是不可约的，所以存在任一非空集， $K\subset N$ ， $\forall i\in K$ ， $j\in N/K$ ，有 $|a_{ij}|$ 不全为 0。

构造正对角矩阵 $D_1=diag(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ ，记 $B=AD_1=(b_{ij})$ ，其中

$$d_i=\begin{cases} x_{1i}^{(k)}, & i\in N_1^{(k)} \\ x_{2i}, & i\in N_2 \\ Q_l\delta_{l,i}, & i\in N_3 \end{cases}$$

1) 对 $\forall i\in N_1^{(k)}\,(k=1,2,\cdots,m)$ ，由(6)式得

$$\Lambda_i(B)=\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_1^{(k)},t\ne i}|a_{it}|x_{1t}^{(k)}\right)+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|x_{2t}+Q_l\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\delta_{l,t}\le|a_{ii}|x_{1i}^{(k)}=|b_{ii}|;$$

2) 对 $\forall i\in N_2$ ，由(7)式得

$$\Lambda_i(B)=\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_1^{(k)}}|a_{it}|x_{1t}^{(k)}\right)+\sum_{t\in N_2,t\ne i}|a_{it}|x_{2t}+Q_l\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\delta_{l,t}\le|a_{ii}|x_{2i}=|b_{ii}|;$$

3) 对 $\forall i\in N_3$ ， $l\in Z^+$ ，由(5)式得

$$\Lambda_i(B)=\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_1^{(k)}}|a_{it}|x_{1t}^{(k)}\right)+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|x_{2t}+Q_l\sum_{t\in N_3,t\ne i}|a_{it}|\delta_{l,t}\le Q_l\delta_{l,i}|a_{ii}|=|b_{ii}|.$$

综上所述， $|b_{ii}|>\Lambda_i(B)\ (\forall i\in N)$ ，且至少有一个严格不等式成立。由矩阵 A 不可约的性质可知矩阵 $B=AD_1$ 不可约，所以 B 是不可约对角占优矩阵。所以由引理 1 可知 $B\in\tilde{D}$ ，即存在正对角阵 D_2 使得 $BD_2\in D$ ，则 $A(D_1D_2)=BD_2$ 为严格对角占优矩阵。由于 D_1D_2 是正对角阵，所以 A 是非奇异 H-矩阵。

2.3. 定理 3

记 $J_1=U_{k=1}^{m}J_1^{(k)}$ ，其中

$$J_1^{(k)}=\left\{i\in N_1^{(k)}:|a_{ii}|x_{1i}^{(k)}>\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_1^{(k)},t\ne i}|a_{it}|x_{1t}^{(k)}\right)+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|x_{2t}+Q_l\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\delta_{l,t}\right\}\ (k=1,2,\cdots,m),$$

$$J_2=\left\{i\in N_2:|a_{ii}|x_{2i}>\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_1^{(k)}}|a_{it}|x_{1t}^{(k)}\right)+\sum_{t\in N_2,t\ne i}|a_{it}|x_{2t}+Q_l\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\delta_{l,t}\right\},$$

$$J_3=\left\{i\in N_3:Q_l|a_{ii}|\delta_{l,i}>\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_1^{(k)}}|a_{it}|x_{1t}^{(k)}\right)+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|x_{2t}+Q_l\sum_{t\in N_3,t\ne i}|a_{it}|\delta_{l,t}\right\}.$$

定理 3 设 $A\in M_n(C)$ ， A 不可约，若存在 $l\in Z^+$ ，使得

$$|a_{ii}|x_{1i}^{(k)}\ge\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_1^{(k)},t\ne i}|a_{it}|x_{1t}^{(k)}\right)+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|x_{2t}+Q_l\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\delta_{l,t}\ \ \left(\forall i\in N_1^{(k)},k=1,2,\cdots,m\right), \tag{8}$$

$$|a_{ii}|x_{2i} \ge \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_1^{(k)}}|a_{it}|x_{1t}^{(k)}\right)+\sum_{t\in N_2,t\ne i}|a_{it}|x_{2t}+Q_l\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\delta_{l,t}\ \ (\forall i\in N_2), \tag{9}$$

且上式中至少有一个严格不等式成立，即 $J_1\cup J_2\ne\varnothing$。如果 $i\in U_{i=1}^{3}[N_i-J_i]$ 都有非零元素链 $a_{ir_1},a_{r_1r_2},\cdots,a_{r_{k-1}k}$ 使得 $k\in U_{i=1}^{3}J_i$，则 $A\in\tilde{D}$。

3. 数值实例

例 1 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2.5 & 5.5 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1.5 & 0 & 3 & 1.5 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 25 & 6 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 4.5 & 15 \end{pmatrix}$$

则在判定矩阵 A 是否为非奇异 H-矩阵时，文[1]，文[2]，文[3]及文[4]的定理条件都无法判定，而用本文的判定定理可以判定。(以下计算结果均保留六位小数。)

事实上，对文[1]，有

$$|a_{33}|x_3=1.2<2.357144+\left(\max_{i\in N_3}M_i\right)|a_{36}|x_6\,;$$

现取 $m=1$，$l=2$。

对文[2]，有

$$|a_{33}|x_3=1.2<2.357144+|a_{36}|\delta_{l,6}\,;$$

对文[3]，有

$$|a_{33}|\frac{\Lambda_3-|a_{33}|}{\Lambda_3}=1.2<2.357144+\frac{hP_6}{|a_{66}|}|a_{36}|\,;$$

对文[4]，有

$$|a_{33}|x_{13}=1.2<2.357144+|a_{36}|\delta_{2,6}\,;$$

而对本文定理 1，当 $m=1$ 时，即为推论 1，则

$$|a_{11}|x_{21}=1.880381>1.51488=|a_{12}|x_{22}+|a_{13}|x_{13}+Q_2|a_{16}|\delta_{2,6}\,,$$

$$|a_{22}|x_{22}=3.640229>2.261694=|a_{21}|x_{21}+|a_{24}|x_{14}+Q_2|a_{25}|\delta_{2,5}\,,$$

$$|a_{33}|x_{13}=2.1>2.036735=|a_{31}|x_{21}+|a_{34}|x_{14}+Q_2|a_{36}|\delta_{2,6}\,,$$

$$|a_{44}|x_{14}=2.357143>1.552647=|a_{41}|x_{2,2}+|a_{43}|x_{13}+Q_2|a_{46}|\delta_{2,6}\,;$$

显然满足本文推论 1 的判定条件，取正对角矩阵

$$X=diag(0.470095,0.661859,0.7,0.785714,0.150371,0.076511),$$

有 $AX\in D$，则矩阵 A 是非奇异 H-矩阵。

例 2 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0.5 & 0 & 2 & 1.5 & 1 & 1 \\ 0 & 0.5 & 0 & 2.5 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 25 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 6 & 20 \end{pmatrix}$$

则在判定矩阵 A 是否为非奇异 H-矩阵时，文[1]，文[2]，文[3]及文[4]的定理条件都无法判定，而用本文的判定定理可以判定。(以下计算结果均保留六位小数。)

事实上，对文[1]，有

$$|a_{33}|x_3=1<1.318182+\left(\max_{i\in N_3}M_i\right)\left(|a_{35}|x_5+|a_{36}|x_6\right);$$

现取 $m=2$， $l=1$。

对文[2]，有

$$|a_{33}|x_3=1<1.318182+|a_{35}|\delta_{l,5}+|a_{36}|\delta_{l,6};$$

对文[3]，有

$$|a_{33}|\frac{\Lambda_3-|a_{33}|}{\Lambda_3}=1<1.181818+\frac{hP_5}{|a_{55}|}|a_{35}|+\frac{hP_6}{|a_{66}|}|a_{36}|;$$

对文[4]，有

$$|a_{44}|x_{14}=0.113638<0.25+|a_{46}|\delta_{2,6};$$

而对本文定理 1，当 $m=2$ 时，即为推论 2，则

$$|a_{11}|x_{21}=3.244364>2.200322=|a_{12}|x_{22}+|a_{13}|x_{13}+|a_{14}|x_{14}+Q_1|a_{16}|\delta_{1,6},$$

$$|a_{22}|x_{22}=2.048485>1.561094=|a_{21}|x_{21}+|a_{23}|x_{13}+Q_1|a_{25}|\delta_{1,5},$$

$$|a_{33}|x_{13}=1.333333>1.149808=|a_{31}|x_{21}+|a_{34}|x_{14}+Q_1|a_{35}|\delta_{1,5}+Q_1|a_{36}|\delta_{1,6},$$

$$|a_{44}|x_{14}=0.965909>0.871309=|a_{42}|x_{21}+Q_1|a_{46}|\delta_{1,6};$$

显然满足本文推论 2 的判定条件，取正对角矩阵

$$X=diag(0.648873,0.512121,0.666667,0.386364,0.122777,0.123049),$$

有 $AX\in D$，则矩阵 A 是非奇异 H-矩阵。

例 3 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0.5 & 0 & 1 & 1.5 & 1 \\ 1 & 6 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 10 & 3.5 & 4.4 & 1 & 1.5 \\ 0.5 & 1.5 & 3 & 9 & 2 & 2 & 2.5 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 9 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 24 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 5 & 4 & 25 \end{pmatrix}$$

则在判定 A 是否为非奇异 H-矩阵时，文[1]，文[2]，文[3]及文[4]的定理条件都无法判定，而用本文

的判定定理可以判定。(以下计算结果均保留六位小数。)

事实上，对文[1]，有

$$|a_{55}|x_5 = 0.9 < 3.217391 + \left(\max_{i\in N_3} M_i\right)\left(|a_{56}|x_6 + |a_{57}|x_7\right);$$

现取 $m=3$，$l=2$。

对文[2]，有

$$|a_{55}|x_5 = 0.9 < 3.217391 + |a_{56}|\delta_{l,6} + |a_{57}|\delta_{l,7};$$

对文[3]，有

$$|a_{33}|\frac{\Lambda_3 - |a_{33}|}{\Lambda_3} = 2.53731 < 4.200869 + \frac{hP_6}{|a_{66}|}|a_{36}| + \frac{hP_7}{|a_{77}|}|a_{37}|;$$

对文[4]，有

$$|a_{55}|x_{15} = 0.9 < 1.217391 + |a_{56}|\delta_{2,6} + |a_{57}|\delta_{2,7};$$

而对本文定理 1，当 $m=3$ 时，有

$$|a_{11}|x_{21} = 1.95517 > 1.259377 = |a_{12}|x_{22} + |a_{13}|x_{13} + |a_{15}|x_{15} + Q_2|a_{16}|\delta_{2,6} + Q_2|a_{17}|\delta_{2,7},$$

$$|a_{22}|x_{22} = 2.236338 > 1.5441 = |a_{21}|x_{22} + |a_{24}|x_{14} + |a_{25}|x_{15} + Q_2|a_{26}|\delta_{2,6} + Q_2|a_{27}|\delta_{2,7},$$

$$|a_{33}|x_{13} = 4.402985 > 4.356896 = |a_{31}|x_{21} + |a_{32}|x_{22} + |a_{34}|x_{14} + |a_{35}|x_{15} + Q_2|a_{36}|\delta_{2,6} + Q_2|a_{37}|\delta_{2,7},$$

$$|a_{44}|x_{14} = 3.717391 > 3.34477 = |a_{41}|x_{21} + |a_{42}|x_{22} + |a_{43}|x_{13} + |a_{45}|x_{15} + Q_2|a_{46}|\delta_{2,6} + Q_2|a_{47}|\delta_{2,7},$$

$$|a_{55}|x_{15} = 2.925 > 2.366521 = |a_{51}|x_{21} + |a_{52}|x_{22} + |a_{54}|x_{14} + Q_2|a_{56}|\delta_{2,6} + Q_2|a_{57}|\delta_{2,7};$$

显然满足本文定理 1 的条件，取正对角矩阵

$$X = diag(0.391034, 0.372722, 0.440299, 0.413043, 0.325, 0.133992, 0.140515),$$

有 $AX \in D$，则矩阵 A 是非奇异 H-矩阵。

4. 结论

1) 通过例 1 表明，本文的迭代判定方法比文献[1]定理 1 和文献[3]定理 1 的非迭代的判定方法好，且迭代次数少于文献[2]和文献[4]定理中的迭代判定定理。

2) 通过例 2 表明，本文推论 2 和文献[3]定理 1 将非占优行指标集分为两个区间时，本文推论 2 的判定方法要优于文献[3]的定理 1，且迭代一次就能判定，而文献[2]和文献[4]迭代一次时不能判定。

3) 通过例 3 表明，本文细分非占优行指标集区间后判定范围比文献[3]定理的判定范围更广，并且在 m 相同的情况下，本文定理 1 的迭代次数要少于文献[2]和文献[4]的判定定理。

因此，本文给出的非奇异 H-矩阵细分迭代实用判定方法，不仅扩宽矩阵的判定范围，而且判定更高效。

致　谢

感谢庹清老师对本项目的悉心指导和帮助。

基金项目

国家自然科学基金(11461027)和吉首大学校级科研项目资助(Jdy20056)。

参考文献

[1] 王健，徐仲，陆全．判定广义严格对角占优矩阵的一组新条件[J]．计算数学, 2011, 33(3): 225-232.

[2] 王健，徐仲，陆全．广义严格对角占优矩阵判定的新迭代准则[J]．应用数学学报, 2010, 33(6): 961-966.

[3] 韩涛，陆全，徐仲，杜永恩．一组非奇异 H-矩阵的新判据[J]．工程数学学报, 2011, 28(4): 498-504.

[4] 范迎松，陆全，徐仲，高慧敏．非奇异 H-矩阵的一组细分迭代判别准则[J]．工程数学学报, 2012, 29(6): 877-882.

[5] 干泰彬，黄廷祝．非奇异 H-矩阵的实用充分条件[J]．计算数学, 2004, 26(1): 109-116.

[6] 谢清明．关于 H-矩阵的实用判定的注记[J]．应用数学学报, 2006, 29(6): 1080-1084.

[7] Varga, R.S. (1976) On Recurring Theorems on Diagonal Dominance. *Linear Algebra and Its Applications*, **13**, 1-9. https://doi.org/10.1016/0024-3795(76)90037-9

[8] 朱海，王健，廖貅武，徐仲．非奇 H-矩阵的实用判别准则[J]．数学的实践与认识, 2014, 44(7): 280-285.

[9] 陈茜，庹清．非奇异 H-矩阵的一组新判定法[J]．工程数学学报, 2020, 37(3): 325-334.

[10] 刘长太．广义严格对角占优矩阵的简捷判据[J]．数学的实践与认识, 2018, 48(22): 217-221.

[11] 庹清，朱砾，刘建州．一类非奇异 H-矩阵判定的新条件[J]．计算数学, 2008, 30(2): 177-182.

[12] Gan, T.-B., Huang, T.-Z., Evans, D.J., *et al*. (2005) Sufficient Conditions for H-Matrices. *International Journal of Computer Mathematics*, **82**, 247-258. https://doi.org/10.1080/00207160412331291053