

带有分数阶耗散的Boussinesq方程组关于速度的对数型正则准则

乐爱庭

浙江师范大学数学与计算机科学学院, 浙江 金华
Email: 2243675665@qq.com

收稿日期: 2021年7月31日; 录用日期: 2021年8月21日; 发布日期: 2021年9月2日

摘要

本文主要研究3维情形下带有分数阶耗散的Boussinesq方程组在乘子空间中的对数型正则性准则问题, 证明了当速度满足(2.1)时, 方程组(1.1)的弱解在 $(0, T]$ 上是正则的。

关键词

分数阶耗散, Boussinesq方程组, 正则性准则

The Logarithmic Regularity Criteria for Velocity of Boussinesq Equations with Fractional Laplacian Dissipation

Aiting Le

College of Mathematics and Computer Science, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang
Email: 2243675665@qq.com

Received: Jul. 31st, 2021; accepted: Aug. 21st, 2021; published: Sep. 2nd, 2021

Abstract

In this paper, we focus on the logarithmic regularity problem of 3D Boussinesq equations with fractional laplacian dissipation in the multiplier space. We prove that if the velocity satisfies the condition (2.1), the weak solutions of equations (1.1) are regularity on $(0, T]$.

Keywords

Fractional Laplacian Dissipation, Boussinesq Equations, Regularity Criteria

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

本文我们考虑如下 3 维分数阶 Boussinesq 方程组的正则性准则问题：

$$\begin{cases} u_t + u \cdot \nabla u + \nu \Lambda^{2\alpha} u + \nabla p = \theta \bar{e}_3, \\ \theta_t + u \cdot \nabla \theta + \kappa \Lambda^{2\beta} \theta = 0, \\ \nabla \cdot u = 0, \\ u(x, 0) = u_0, \quad \theta(x, 0) = \theta_0. \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 $u = (u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t))$ 表示流体的速度， $\theta = \theta(x, t)$ 表示流体的温度或者密度， $p = p(x, t)$ 表示流体的压力， $0 < \alpha, \beta < \frac{1}{2}$ ， $\bar{e}_3 = (0, 0, 1)$ ；常数 $\nu \geq 0$ ， $\kappa \geq 0$ 分别表示粘性系数和热扩散系数。Zygmund

算子 $\Lambda = \sqrt{-\Delta}$ 通过 Fourier 变换定义为

$$\widehat{\Lambda^{2\alpha} f}(\xi) = |\xi|^{2\alpha} \hat{f}(\xi), \quad \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx.$$

当方程组(1)中 $\alpha = 1, \beta = 1$ 时，为经典的 Boussinesq 方程组，它被广泛应用于大气科学和海洋流中。在二维情形中，常数 ν 和 κ 不全为零时，经典 Boussinesq 方程组的全局正则性已有许多的结果，具体可参考文献[1] [2] [3]。 $\nu = 0$ 且 $\kappa = 0$ 时只有局部适定性结果(可看文献[4])，全局正则性仍是开放性问题。而在三维情形中，方程组的全局适定性问题还未解决，因此很多学者给出了解的正则性准则，例如文献[5]中给出了解在乘子空间中的正则性准则。

近年来，分数阶 Boussinesq 方程组越来越吸引众多学者的目光，二维情形下，在 α, β 有条件限制下，方程组(1.1)已有许多全局适定性结果，可看文献[6] [7] [8]。三维情形下方程组(1.1)的全局适定性结果还非常少，所以研究方程组的正则性准则很有必要，可参考文献[9] [10]；文献[11]给出了 n 维情形下在 Besov 空间中关于速度的梯度的一个正则性准则。

2. 预备知识和主要结论

方便起见，我们先来回顾一下分数阶 Boussinesq 方程组的弱解的定义。

定义 2.1 若作用在 $\mathbb{R}^3 \times (0, T)$ 的函数 (u, θ) 满足下列条件，则称 (u, θ) 是 3 维分数阶 Boussinesq 方程组的弱解。

$$(i) \quad u \in L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(0, T; \dot{H}^\alpha(\mathbb{R}^3))$$

$$\theta \in L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(0, T; \dot{H}^\beta(\mathbb{R}^3))$$

(ii) (u, θ) 在分布意义下满足方程组(i)，即对任意的 $\varphi, \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \times (0, T))$ ，都有等式

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} (u_t + u \cdot \nabla u + \nu \Lambda^{2\alpha} u + \nabla p) \varphi dx dt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \theta \bar{e}_3 \phi dx dt$$

和

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} (\theta_t + u \cdot \nabla \theta + \nu \Lambda^{2\beta} \theta) \phi dx dt = 0$$

成立。

下面我们来介绍一下文中要用到的乘子空间；

定义 2.2 给定映射 $g: \dot{H}^\gamma(\mathbb{R}^3) \mapsto L^2(\mathbb{R}^3)$ ，则有界线性乘子的齐次 Banach 空间 $\dot{X}^{-\gamma}$ 的范数定义为

$$\|g\|_{\dot{X}^{-\gamma}} = \sup_{\|h\|_{\dot{H}^\gamma} \leq 1} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |gh|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

且有以下嵌入关系

$$L^p(\mathbb{R}^3) \subset \dot{X}^{-\gamma}(\mathbb{R}^3), \quad p = \frac{3}{\gamma} > 2$$

由定义 2.2 我们不难推出下列引理；

引理 2.1 若 $g \in \dot{H}^\gamma$ ， $h \in \dot{X}^{-\gamma}$ ，则有 $gh \in L^2$ ，且有

$$\|gh\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|g\|_{\dot{H}^\gamma} \|h\|_{\dot{X}^{-\gamma}}$$

最后我们叙述一下文章的主要定理；

定理 2.1 假设 (u, θ) 是方程组(1.1)的一个弱解，且初始值满足 $(u_0, \theta_0) \in H^s \times H^s$ ， $s \geq 1$ 。如果速度 u 满足

$$\int_0^T \frac{\|\nabla u\|_{\dot{X}^{-\gamma}}^{2\alpha} + \|\nabla u\|_{\dot{X}^{-\gamma}}^{2\beta}}{1 + \ln(e + \|\nabla u\|_{L^2}^2)} ds < \infty, \quad \max\{\alpha, \beta\} \leq \gamma \leq 2 \min\{\alpha, \beta\} \quad (2.1)$$

则此弱解在 $[0, T]$ 上是正则的。

3. 定理 2.1 的证明

首先我们在方程(1.1)₁ 的左右两边同时作用 ∇ ，再与 ∇u 作内积，同样的在方程(1.1)₂ 两边同时作用 ∇ ，与 $\nabla \theta$ 作内积，利用 $\operatorname{div} u = 0$ 的条件，把两式相加后可以得到

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla \theta\|_{L^2}^2 \right) + 2 \left(\|\Lambda^{1+\alpha} u\|_{L^2}^2 + \|\Lambda^{1+\beta} u\|_{L^2}^2 \right) \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \theta \cdot \nabla u dx - 2 \int_{\mathbb{R}^3} \nabla(u \cdot \nabla u) \cdot \nabla u dx - 2 \int_{\mathbb{R}^3} \nabla(u \cdot \nabla \theta) \cdot \nabla \theta dx \\ &= M_1 + M_2 + M_3 \end{aligned} \quad (3.1)$$

接下来我们分别来估计 M_1, M_2, M_3 这三项。对于 M_1 ，我们应用 Plancherel 定理，Holder 不等式和 Young 不等式 $\left(ab \leq \frac{1}{3} a^2 + \frac{3}{4} b^2 \right)$ 可得到

$$M_1 \leq 2 \|\Lambda^{1-\alpha} \theta\|_{L^2} \|\Lambda^{1+\alpha} u\|_{L^2} \leq \frac{2}{3} \|\Lambda^{1-\alpha} \theta\|_{L^2}^2 + \frac{3}{2} \|\Lambda^{1+\alpha} u\|_{L^2}^2 \quad (3.2)$$

对于 M_2 ，由于

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \nabla(u \cdot \nabla u) \cdot \nabla u dx &= \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla u : \nabla u) \cdot \nabla u dx + \int_{\mathbb{R}^3} (u \cdot \nabla \nabla u) \cdot \nabla u dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla u : \nabla u) \cdot \nabla u dx \end{aligned} \tag{3.3}$$

我们应用 Holder 不等式, Young 不等式, G-N 不等式及引理 2.1 可得

$$\begin{aligned} M_2 &\leq C \left| \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla u : \nabla u) \cdot \nabla u dx \right| \\ &\leq C \|\nabla u : \Lambda^{1-\alpha} u\|_{L^2} \|\Lambda^{1+\alpha} u\|_{L^2} \\ &\leq C \|\nabla u\|_{\dot{X}^{-\gamma}} \|\Lambda^{1-\alpha} u\|_{\dot{H}^\gamma} \|\Lambda^{1+\alpha} u\|_{L^2} \\ &\leq C \|\nabla u\|_{\dot{X}^{-\gamma}} \|\nabla u\|_{L^2}^{2-\frac{\gamma}{\alpha}} \|\Lambda^{1+\alpha} u\|_{L^2}^{\frac{\gamma}{\alpha}} \\ &\leq C \|\nabla u\|_{\dot{X}^{-\gamma}}^{\frac{2\alpha}{2\alpha-\gamma}} \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4} \|\Lambda^{1+\alpha} u\|_{L^2}^2 \\ &\leq C \frac{\|\nabla u\|_{\dot{X}^{-\gamma}}^{\frac{2\alpha}{2\alpha-\gamma}}}{1 + \ln(e + \|\nabla u\|_{L^2}^2)} \|\nabla u\|_{L^2}^2 \left(1 + \ln(e + \|\nabla u\|_{L^2}^2)\right) + \frac{1}{4} \|\Lambda^{1+\alpha} u\|_{L^2}^2 \end{aligned} \tag{3.4}$$

对于 M_3 , 我们用相同的做法可以得到

$$\begin{aligned} M_3 &\leq C \left| \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla u : \nabla \theta) \cdot \nabla \theta dx \right| \\ &\leq C \frac{\|\nabla u\|_{\dot{X}^{-\gamma}}^{\frac{2\beta}{2\beta-\gamma}}}{1 + \ln(e + \|\nabla u\|_{L^2}^2)} \|\nabla \theta\|_{L^2}^2 \left(1 + \ln(e + \|\nabla u\|_{L^2}^2)\right) + \frac{1}{4} \|\Lambda^{1+\beta} \theta\|_{L^2}^2 \end{aligned} \tag{3.5}$$

然后将式子(3.2), (3.4)和(3.5)代入(3.1), 化简整理可以得到

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} (\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla \theta\|_{L^2}^2) + \frac{1}{4} \|\Lambda^{1+\alpha} u\|_{L^2}^2 + \frac{7}{4} \|\Lambda^{1+\beta} \theta\|_{L^2}^2 \\ &\leq \frac{2}{3} \|\Lambda^{1-\alpha} \theta\|_{L^2}^2 + C \frac{\|\nabla u\|_{\dot{X}^{-\gamma}}^{\frac{2\alpha}{2\alpha-\gamma}}}{1 + \ln(e + \|\nabla u\|_{L^2}^2)} \|\nabla u\|_{L^2}^2 \left(1 + \ln(e + \|\nabla u\|_{L^2}^2)\right) \\ &\quad + C \frac{\|\nabla u\|_{\dot{X}^{-\gamma}}^{\frac{2\beta}{2\beta-\gamma}}}{1 + \ln(e + \|\nabla u\|_{L^2}^2)} \|\nabla \theta\|_{L^2}^2 \left(1 + \ln(e + \|\nabla u\|_{L^2}^2)\right) \end{aligned} \tag{3.6}$$

由基本不等式 $\frac{1}{2}(a+b)^2 \leq a^2 + b^2 \leq (a+b)^2$, 在上式两边同时加上 $\frac{4}{3}\|\theta\|_{L^2}^2$, 又因为 $1-\alpha \leq 1+\beta$, 所以有嵌入关系 $H^{1+\beta} \subset H^{1-\alpha}$, 即我们有关系式

$$\frac{2}{3} \|\theta\|_{H^{1+\beta}}^2 < \frac{7}{4} \|\Lambda^{1+\beta} \theta\|_{L^2}^2 + \frac{4}{3} \|\theta\|_{L^2}^2, \quad \frac{2}{3} \|\Lambda^{1-\alpha} \theta\|_{L^2}^2 + \frac{4}{3} \|\theta\|_{L^2}^2 < \frac{2}{3} \|\theta\|_{H^{1-\alpha}}^2 + C \leq \frac{2}{3} \|\theta\|_{H^{1+\beta}}^2 + C$$

则不等式(3.6)可以变成

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left(\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla \theta\|_{L^2}^2 \right) \\
& \leq C \frac{\|\nabla u\|_{\dot{X}^{-\gamma}}^{\frac{2\alpha}{2\alpha-\gamma}}}{1 + \ln \left(e + \|\nabla u\|_{L^2}^2 \right)} \|\nabla u\|_{L^2}^2 \left(1 + \ln \left(e + \|\nabla u\|_{L^2}^2 \right) \right) \\
& \quad + C \frac{\|\nabla u\|_{\dot{X}^{-\gamma}}^{\frac{2\beta}{2\beta-\gamma}}}{1 + \ln \left(e + \|\nabla u\|_{L^2}^2 \right)} \|\nabla \theta\|_{L^2}^2 \left(1 + \ln \left(e + \|\nabla u\|_{L^2}^2 \right) \right) + C \\
& \leq C \frac{\|\nabla u\|_{\dot{X}^{-\gamma}}^{\frac{2\alpha}{2\alpha-\gamma}} + \|\nabla u\|_{\dot{X}^{-\gamma}}^{\frac{2\beta}{2\beta-\gamma}}}{1 + \ln \left(e + \|\nabla u\|_{L^2}^2 \right)} \left(\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla \theta\|_{L^2}^2 \right) \left(1 + \ln \left(e + \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla \theta\|_{L^2}^2 \right) \right)
\end{aligned} \tag{3.7}$$

利用 Gronwall 不等式, 我们可以得出

$$\begin{aligned}
\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla \theta\|_{L^2}^2 & \leq \left(\|\nabla u_0\|_{L^2}^2 + \|\nabla \theta_0\|_{L^2}^2 \right) \\
& \quad \times \exp \left\{ \int_0^T \left(C \frac{\|\nabla u\|_{\dot{X}^{-\gamma}}^{\frac{2\alpha}{2\alpha-\gamma}} + \|\nabla u\|_{\dot{X}^{-\gamma}}^{\frac{2\beta}{2\beta-\gamma}}}{1 + \ln \left(e + \|\nabla u\|_{L^2}^2 \right)} \left(1 + \ln \left(e + \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla \theta\|_{L^2}^2 \right) \right) \right) dt \right\}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

最后我们估计式子 $\ln \left(e + \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla \theta\|_{L^2}^2 \right)$, 由上式我们可以得到

$$\begin{aligned}
\ln \left\{ e + \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla \theta\|_{L^2}^2 \right\} & \leq \ln \left(e + \|\nabla u_0\|_{L^2}^2 + \|\nabla \theta_0\|_{L^2}^2 \right) \\
& \quad + \int_0^T \left(C \frac{\|\nabla u\|_{\dot{X}^{-\gamma}}^{\frac{2\alpha}{2\alpha-\gamma}} + \|\nabla u\|_{\dot{X}^{-\gamma}}^{\frac{2\beta}{2\beta-\gamma}}}{1 + \ln \left(e + \|\nabla u\|_{L^2}^2 \right)} \left(1 + \ln \left(e + \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla \theta\|_{L^2}^2 \right) \right) \right) dt
\end{aligned}$$

最后将上式代入(3.8)中, 再次利用 Gronwall 不等式, 可以得出

$$\ln \left\{ e + \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla \theta\|_{L^2}^2 \right\} \leq C(u_0, \theta_0) \exp \left\{ \int_0^T \frac{\|\nabla u\|_{\dot{X}^{-\gamma}}^{\frac{2\alpha}{2\alpha-\gamma}} + \|\nabla u\|_{\dot{X}^{-\gamma}}^{\frac{2\beta}{2\beta-\gamma}}}{1 + \ln \left(e + \|\nabla u\|_{L^2}^2 \right)} dt \right\} \tag{3.9}$$

我们得出结论

$$\operatorname{ess\,sup}_{0 < t < T} \left(\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla \theta\|_{L^2}^2 \right) < \infty.$$

参考文献

- [1] Abidi, H. and Hmidi, T. (2007) On the Global Well-Posedness for Boussinesq System. *Journal of Differential Equations*, **233**, 199-220. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2006.10.008>
- [2] Danchin, R. and Paicu, M. (2008) Existence and Uniqueness Results for the Boussinesq System with Data in Lorentz Spaces. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **237**, 1444-1460. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2008.03.034>
- [3] Zhou, D.G. and Li, Z.L. (2017) Global Well-Posedness for the 2D Boussinesq Equation with Zero Viscosity. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **447**, 1072-1079. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.10.058>
- [4] Xu, X.J. (2010) Global Regularity of Solutions of 2D Boussinesq Equations with Fractional Diffusion. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **172**, 677-681. <https://doi.org/10.1016/j.na.2009.07.008>
- [5] Qiu, H., Du, L. and Yao, Z.A. (2011) Blow-Up Criteria 3D Boussinesq Equations in the Multiplier Spaces. *Communi-*

-
- cations in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **16**, 1820-1824. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2010.08.036>
- [6] Stefanov, A. and Wu, J.A. (2014) Global Regularity Result for the Boussinesq Equation with Critical Dissipation. *Mathematics*, **29**, 195-205.
- [7] Fang, D.Y., Qian, C.Y. and Zhang, T. (2016) Global Well-Posedness for 2D Boussinesq System with General Super-Critical Dissipation. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **27**, 326-349. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2015.08.004>
- [8] Wu, J.H., Xu, X.J., Xue, L.T. and Ye, Z. (2016) Regularity Results for the 2D Boussinesq Equations with Critical and Supercritical Dissipation. *Communications in Mathematical Sciences*, **14**, 1963-1997. <https://doi.org/10.4310/CMS.2016.v14.n7.a9>
- [9] Qiu, H., Du, Y. and Yao, Z.A. (2010) Serrin-Type Blow-Up Criteria for Three-Dimensional Boussinesq Equations. *Applicable Analysis*, **89**, 1603-1613. <https://doi.org/10.1080/00036811.2010.492505>
- [10] Xu, F.Y., Zhang, Q. and Zhang, X.X. (2012) Regularity Criteria of the 3D Boussinesq Equations in the Morrey-Campanato Spaces. *Acta Applicandae Mathematicae*, **121**, 231-240. <https://doi.org/10.1007/s10440-012-9705-3>
- [11] Zhang, Z. (2016) Global Regularity Criteria for the n-Dimensional Boussinesq Equations with Fractional Dissipation. *Journal of Differential Equations*, **99**, 1-5.