Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2021, 10(9), 2933-2942
Published Online September 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.109307

Hans汉斯

相对于半对偶模的 Gorenstein $\mathcal{W}$-投射模

王 锐，吕家凤*，张东东

浙江师范大学数学与计算机科学学院，浙江 金华
Email: *jiafenglv@zjnu.cn

收稿日期：2021年7月31日；录用日期：2021年8月21日；发布日期：2021年9月2日

摘 要

设 $\mathcal{P}_C(R)$ 和 $\mathcal{B}_C(R)$ 是与半对偶模 C 相关的 C-投射模类和 Bass 类，$\mathcal{P}_C(R) \subseteq \mathcal{W} \subseteq \mathcal{B}_C(R)$. 本文主要研究与半对偶模相关的 Gorenstein 范畴 $\mathcal{G}_C(\mathcal{W})$ 的性质，证明了 $\mathcal{G}_C(\mathcal{W})$ 是投射分解类。

关键词

半对偶模，C-Gorenstein $\mathcal{W}$-投射模，Bass类

Gorenstein $\mathcal{W}$-Projective Modules with Respect to a Semidualizing Module

Rui Wang, Jiafeng Lyu*, Dongdong Zhang

College of Mathematics and Computer Science, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang
Email: *jiafenglv@zjnu.cn

Received: Jul. 31^{st}, 2021; accepted: Aug. 21^{st}, 2021; published: Sep. 2^{nd}, 2021

* 通讯作者。

文章引用: 王锐, 吕家凤, 张东东. 相对于半对偶模的 Gorenstein $\mathcal{W}$-投射模[J]. 应用数学进展, 2021, 10(9): 2933-2942. DOI: 10.12677/aam.2021.109307

Abstract

Let $\mathcal{P}_C(R) \subseteq \mathcal{W} \subseteq \mathcal{B}_C(R)$ where $\mathcal{P}_C(R)$ and $\mathcal{B}_C(R)$ is the class of C-projective and Bass class related to semidualizing module, respectively. In this paper, we discuss the property of Gorenstein category $\mathcal{G}_C(\mathcal{W})$, and it is proved that $\mathcal{G}_C(\mathcal{W})$ is projectively resolving.

Keywords

Semidualizing Module, C-Gorenstein $\mathcal{W}$-Projective Module, Bass Class

1. 引言

相对同调代数特别是 Gorenstein 同调代数一直受到学者们的广泛关注. 为了进一步描述 Gorenstein 同调代数在一般环上的作用, Bravo 在文献 [1]中引入了 level 模的概念, 它是平坦模的推广, 继而引入了 Gorenstein AC-投射模的概念. 与此同时, 对偶模的概念在交换代数和代数几何领域有着重要的作用, 但是存在条件相对来说较为苛刻. 作为对偶模的推广, 半对偶模近年来也受到很多学者的青睐. 在一个诺特环 R 上, Foxby, Golod 独立地开创了有关半对偶模的研究. 在文献 [2]中, Holm 和 White 把半对偶模的概念推广到一般的结合环上, 得到 C-平坦, C-投射, C-内射概念, 并用它们来研究 Auslander 类和 Bass 类. 2010 年 White 在文献 [3]中, 研究了与半对偶模相关 Gorenstein 范畴, 她引入了 C-Gorenstein 投射模的概念并讨论了它的基本性质. 之后, 文献 [4]对与半对偶模相关的 Ding 投射模的性质进行了介绍和研究. 最后, 孙彦中在文献 [5]中, 进一步探讨了与半对偶模相关的 Gorenstein AC-投射模上的同调性质. 受上述结果的启发, 本文考虑与半对偶模相关的 Gorenstein $\mathcal{W}$- 投射模的相关性质, 其中 $\mathcal{P}_C(R) \subseteq \mathcal{W} \subseteq \mathcal{B}_C(R)$. 具体得到如下结果:

定理 2 C-Gorenstein $\mathcal{W}$-投射模是投射分解类, 并且 C-Gorenstein $\mathcal{W}$-投射模类关于直和项封闭.

定理 3 设

$$0 \to L \to M \to K \to 0$$

是左 R-模正合序列. 若 L, M 是 C-Gorenstein $\mathcal{W}$-投射模, 则 K 是 C-Gorenstein $\mathcal{W}$-投射模, 当且仅当 $\mathrm{Ext}_R^{i\geq 1}(K,Q)=0$, 其中任意 $Q\in\mathcal{W}$.

2. 预备知识

首先回顾一些基本概念. 本文始终假设 R 是有单位元的交换环, 所有的 R-模都是幺模.

定义 [6] 一个交换环 R 上的复形是存在一个 R-模同态序列

$$X=\cdots\xrightarrow{\partial_{n+1}^X}X_n\xrightarrow{\partial_n^X}X_{n-1}\xrightarrow{\partial_{n-1}^X}\cdots$$

使得对于每个整数 n, 有 $\partial_{n-1}^X\partial_n^X=0$. X 的第 n 个同调模是 $\mathrm{H_n}(X)=\mathrm{Ker}(\partial_n^X)/\mathrm{Im}(\partial_{n+1}^X)$. 一个复形同态 $\alpha:X\to Y$ 引导同态 $\mathrm{H_n}(\alpha):\mathrm{H_n}(X)\to\mathrm{H_n}(Y)$. 并且当每个 $\mathrm{H_n}(\alpha)$ 是双射时, α 是一个拟同构.

定义 [6] 设 M 为 R 模. 则 M 的投射分解指拟同构 $\delta:X\xrightarrow{\simeq}M$, 其中

$$X\equiv\cdots\xrightarrow{\partial_2^X}X_1\xrightarrow{\partial_1^X}X_0\to 0$$

这里每个 X_i 都是投射模. 通常称正合列

$$\cdots\xrightarrow{\partial_2^X}X_1\xrightarrow{\partial_1^X}X_0\to M\to 0$$

是 M 的扩展投射分解.

定义 [7] 设 $\mathcal{X}$ 为 R-模子范畴, 如果 $\mathcal{X}$ 满足下列条件:
(a) $\mathcal{P}\subseteq\mathcal{X}$, 其中 $\mathcal{P}$ 表示投射 R-模组成的类;
(b) 对于任意的 R-模正合列

$$0\to M^{'}\to M\to M''\to 0$$

其中 $M''\in\mathcal{X}$, 则 $M\in\mathcal{X}$ 当且仅当 $M^{'}\in\mathcal{X}$.
则称 $\mathcal{X}$ 为投射分解类.

定义 [7] 设 $\mathcal{X}$ 是 R-模子范畴, 称 $\mathcal{X}$ 关于扩张封闭是指对任意的 R-模正合列

$$0\to M^{'}\to M\to M^{''}\to 0$$

如果 $M^{'},M^{''}\in\mathcal{X}$, 则 $M\in\mathcal{X}$. 称 $\mathcal{X}$ 是在满同态的核下封闭的, 如果 $M,M^{''}\in\mathcal{X}$, 则 $M^{'}\in\mathcal{X}$. 称 $\mathcal{X}$ 是在单同态的余核下封闭的, 如果 $M^{'},M\in\mathcal{X}$, 则 $M^{''}\in\mathcal{X}$.

定义 [7] 设 M,N 和 X 是 R-模. 同态赋值态射 :

$$w^{XMN}:X\otimes_R\mathrm{Hom}_R(M,N)\to\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(X,M),N)$$

其中定义 $w^{XMN}(x \otimes_R f)(g) = f(g(x))$. 若 X 是有限生成投射 R-模时, 则上面的同态是同构.

定义 [7] 设 R 是一个交换环. 称一个 R-模 C 为半对偶的, 如果满足以下三条:
(a) C 存在一个有限生成投射 R-模构成的分解;
(b) 自然同态映射 $R \to \mathrm{Hom}_R(C, C)$ 是同构;
(c) $\mathrm{Ext}_R^{\geq 1}(C, C) = 0$.

定义 [7] 设 C 是半对偶模, P 为投射模, 我们把形如 $C \otimes_R P$ 的模称为 C-投射的. 令 $\mathcal{P}_{\mathcal{C}} = \mathcal{P}_{\mathcal{C}}(\mathcal{R}) = \{C \otimes_R P | P$ 是投射 R-模$\}$. $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}$ 是关于直和封闭的. 考虑一个 R-模正合列,

$$0 \to M^{'} \to M \to M'' \to 0$$

设 $M^{''}$ 是 C-投射, 则 $M^{'}$ 是 C-投射当且仅当 M 是 C-投射.

定义 [7] 设 C 是半对偶模. 由 C 诱导的 Bass 类表示为 $\mathcal{B}_C$ 或是 $\mathcal{B}_C(R)$, 由满足下列条件的左 R-模 N 所组成 :
(a) $\mathrm{Ext}_R^{\geq 1}(C, N) = 0$;
(b) $\mathrm{Tor}^R_{\geq 1}(C, \mathrm{Hom}_R(C, N) = 0$;
(c) 自然赋值同态 $v_{CN} : C \otimes_R \mathrm{Hom}_R(C, N) \to N$ 是一个同构.

本文中, 我们总是假设 $\mathcal{P}_C(R) \subseteq \mathcal{W} \subseteq \mathcal{B}_C(R)$, 其中 $\mathcal{P}_C(R)$ 和 $\mathcal{B}_C(R)$ 分别是与半对偶模 C 相关的 C-投射模类和 Bass 类.

3. C-Gorenstein $\mathcal{W}$-投射模

定义 1 设 R 是一个交换环. 如果存在 R-模正合列

$$\mathbb{X} = \cdots \to P_1 \to P_0 \to C \otimes_R Q^0 \to C \otimes_R Q^1 \to \cdots$$

其中每个 P_i 和 Q^i 都是投射模, 且对所有的 R-模 $Q \in \mathcal{W}$, 复形 $\mathrm{Hom}_R(\mathbb{X}, Q)$ 是正合的. 那么称该序列为完备的 $\mathcal{P}_C\mathcal{P}_{\mathcal{W}}$-分解. 如果存在上述的 $\mathcal{P}_C\mathcal{P}_{\mathcal{W}}$-分解且 $M \cong \mathrm{Coker}(P_1 \to P_0)$, 称 M 是 C-Gorenstein $\mathcal{W}$-投射模. 记 $\mathcal{G}_C(\mathcal{W})$ 为 C-Gorenstein $\mathcal{W}$-投射模组成的类.

注1

1) 如果 $C = R$ 且 $\mathcal{W} = \mathcal{P}(R)$, 则 C-Gorenstein $\mathcal{W}$-投射模就是 Gorenstein投射模;

2) 如果 $C = R$ 且 $\mathcal{W}$ 是平坦 R-模组成的类, 则 C-Gorenstein $\mathcal{W}$-投射模就是 Ding 投射模;

3) 如果 $C = R$ 且 $\mathcal{W} = \mathcal{L}(R)$, 其中 $\mathcal{L}(R)$ 表示 level 模组成的类, 则 C-Gorenstein $\mathcal{W}$-投射模就是 Gorenstein AC-投射模;

4) 如果 $\mathcal{W} = \mathcal{P}_C(R)$, 则 C-Gorenstein $\mathcal{W}$-投射模就是 C-Gorenstein 投射模.

由定义1，我们容易得到下面的结论:

命题 1 设 M 是 R-模, 则 M 是 C-Gorenstein $\mathcal{W}$-投射模当且仅当对任意的 $Q \in \mathcal{W}$, 有

$\mathrm{Ext}_R^{i\geq 1}(M,Q)=0$ 且存在一个 $\mathrm{Hom}_R(-,\mathcal{W})$-正合列

$$0\to M\to C\otimes_R P^0\to C\otimes_R P^1\to\cdots$$

其中 P^i 是投射模.

引理1 设

$$\cdots\to P_1\to P_0\to C\otimes_R P^0\to C\otimes_R P^1\to\cdots$$

是 R-模 M 的完备 $\mathcal{P}_C\mathcal{P}_\mathcal{W}$-分解, 令 $L^i=\mathrm{Ker}(C\otimes_R P^i\to C\otimes_R P^{i+1})$, 则 L^i 是 C-Gorenstein $\mathcal{W}$-投射模.

证明 设 $L^1=\mathrm{Ker}(C\otimes_R P^1\to C\otimes_R P^2)$, 则存在 $\mathrm{Hom}_R(-,\mathcal{W})$-正合列

$$0\to M\to C\otimes_R P^0\to L^1\to 0$$

对任意的 $Q\in\mathcal{W}$, 有 $\mathrm{Ext}_R^{i\geq 1}(C\otimes_R P^0,Q)=0$, 所以 $\mathrm{Ext}_R^{i\geq}(L^1,Q)=0$. 因此, L^1 是 C-Gorenstein $\mathcal{W}$-投射模. 设 $L^i=\mathrm{Ker}(C\otimes_R P^i\to C\otimes_R P^{i+1})$, 继续上面过程，对任意的 $Q\in\mathcal{W}$, 有 $\mathrm{Ext}_R^{i\geq 1}(L^i,Q)=0$. 故由命题 1 可知, L^i 是 C-Gorenstein $\mathcal{W}$-投射模.

命题2 设 $\mathbb{X}_\lambda$ 是完备的 $\mathcal{P}_C\mathcal{P}_\mathcal{W}$-分解构成的类, 则 $\coprod\limits_\lambda\mathbb{X}_\lambda$ 也是完备的 $\mathcal{P}_C\mathcal{P}_\mathcal{W}$-分解. 因此, $\mathcal{G}_C(\mathcal{W})$ 关于直和封闭.

证明 对于任意的 R-模 $Q\in\mathcal{W}$, 存在同构

$$\mathrm{Hom}_R(\coprod_\lambda\mathbb{X}_\lambda,Q)\cong\prod_\lambda\mathrm{Hom}_R(\mathbb{X}_\lambda,Q)$$

其中对于所有 λ, 复形 $\mathrm{Hom}_R(\mathbb{X}_\lambda,Q)$ 是正合的. 所以复形 $\mathrm{Hom}_R(\coprod\limits_\lambda\mathbb{X}_\lambda,Q)$ 是正合的. 再由定义 1 可得 C-Gorenstein $\mathcal{W}$-投射模的直和仍是 C-Gorenstein $\mathcal{W}$-投射模.

引理2 设 P 是投射 R-模, $\mathbb{X}$ 是 R-模正合列. 对于任意的 R-模 $Q\in\mathcal{W}$, 如果复形 $\mathrm{Hom}_R(\mathbb{X},Q)$ 是正合的, 则复形 $\mathrm{Hom}_R(P\otimes_R\mathbb{X},Q)$ 是正合的. 因此, 如果 $\mathbb{X}$ 是 R-模 M 完备的 $\mathcal{P}_C\mathcal{P}_\mathcal{W}$-分解, 则 $P\otimes_R\mathbb{X}$ 是 $P\otimes_R M$ 完备的 $\mathcal{P}_C\mathcal{P}_\mathcal{W}$-分解.

证明 设复形 $\mathrm{Hom}_R(\mathbb{X},Q)$ 是正合的. 因为 P 是投射 R-模, 所以 $\mathrm{Hom}_R(P,-)$ 是一个正合函子.对于任意的 R-模 $Q\in\mathcal{W}$, 由伴随同构可得

$$\mathrm{Hom}_R(P\otimes_R\mathbb{X},Q)\cong\mathrm{Hom}_R(P,\mathrm{Hom}_R(\mathbb{X},Q))$$

因此, 由 $\mathrm{Hom}_R(P,\mathrm{Hom}_R(\mathbb{X},Q))$ 正合可得 $\mathrm{Hom}_R(P\otimes_R\mathbb{X},Q)$ 是正合的.

再设 $\mathbb{X}$ 是 R-模 M 完备的 $\mathcal{P}_C\mathcal{P}_\mathcal{W}$-分解. 由上面的结论可直接得证 $P\otimes_R\mathbb{X}$ 是 $P\otimes_R M$ 完备的 $\mathcal{P}_C\mathcal{P}_\mathcal{W}$-分解.

命题3 设 C 是半对偶模, 则 C 和 R 都是 C-Gorenatein $\mathcal{W}$-投射模.

证明 由半对偶模的定义可知, 存在 C 的有限投射分解.

$$\mathbb{X} = \cdots \to R^{\beta_1} \to R^{\beta_0} \to C \to 0$$

下证 $\mathbb{X}$ 是 C 完备的 $\mathcal{P}_C\mathcal{P}_\mathcal{W}$-分解. 由定义可知 $\mathbb{X}$ 是正合的且有 $C \cong \mathrm{Coker}(R^{\beta_1} \to R^{\beta_0})$. 且对任意的 $Q \in \mathcal{W}$, 有 $\mathrm{Ext}_R^{i\geq 1}(C, Q) = 0$, 故复形 $\mathrm{Hom}_R(\mathbb{X}, Q)$ 是正合的. 因此, $\mathbb{X}$ 是 C 完备的 $\mathcal{P}_C\mathcal{P}_\mathcal{W}$-分解. 从而 C 是 C-Gorenstein $\mathcal{W}$-投射模.

下面证明序列

$$\mathrm{Hom}_R(\mathbb{X}, C) : 0 \to R \to C^{\beta_0} \to C^{\beta_1} \to \cdots$$

是模 R 完备的 $\mathcal{P}_C\mathcal{P}_\mathcal{W}$-分解. 由 $\mathrm{Ext}_R^{i\geq 1}(C, C) = 0$ 可得复形 $\mathrm{Hom}_R(\mathbb{X}, C)$ 是正合的, 且有 $R \cong \mathrm{Coker}(0 \to R)$. 则对于任意的 $Q \in \mathcal{W}$, 有下面交换图

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & R^{\beta_1} \otimes_R \mathrm{Hom}_R(C, W) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"', "w^{R^{\beta_1}CW}"] & R^{\beta_0} \otimes_R \mathrm{Hom}_R(C, W) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"', "w^{R^{\beta_0}CW}"] & C \otimes_R \mathrm{Hom}_R(C, W) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"', "w^{CCW}"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(R^{\beta_1}, C), W) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(R^{\beta_0}, C), W) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(C, C), W) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

由同态赋值态射可得 $w^{R^{\beta_i}CW}$ 是同构态射. 下证 w^{CCW}也是同构态射. 事实上, 因为 $W \in \mathcal{W} \subset \mathcal{B}_C(R)$, 因此 $v_{CW} : C \otimes_R \mathrm{Hom}_R(C, W) \to W$ 是同构态射. 由于 C 是半对偶模, 所以 $\lambda : R \to \mathrm{Hom}_R(C, C)$ 是同构, 从而 $\lambda^* : \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(C, C), W) \to \mathrm{Hom}_R(R, W)$ 是同构态射. 直接验证, 可得 $w^{CCW} = ((\lambda)^*)^{-1}\tau v_{CW}$, 其中 $\tau : W \to \mathrm{Hom}_R(R, W)$ 为同构态射. 因此存在复形同构:

$$\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(\mathbb{X}, C), W) \cong \mathbb{X} \otimes_R \mathrm{Hom}_R(C, W).$$

由于 $W \in \mathcal{W} \subset \mathcal{B}_C(R)$, 所以 $\mathrm{Tor}_{i\geq 1}^R(C, \mathrm{Hom}_R(C, W)) = 0$, 所以上面交换图中上行正合, 从而下行正合. 因此, $\mathrm{Hom}_R(\mathbb{X}, R)$是 R 的完备投射分解, 故 R 是 C-Gorenstein $\mathcal{W}$-投射模.

定理2 C-Gorenstein $\mathcal{W}$-投射模是投射分解类, 并且 C-Gorenstein $\mathcal{W}$-投射模关于直和项封闭.

证明 设

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

是左 R-模正合列. 其中 M', M''都是 C-Gorenstein $\mathcal{W}$-投射模. 由命题 1 知, 对任意的 R-模 $Q \in \mathcal{W}$, $\mathrm{Ext}_R^{i\geq 1}(M', Q) = 0$, $\mathrm{Ext}_R^{i\geq 1}(M'', Q) = 0$ 且存在 $\mathrm{Hom}_R(-, \mathcal{W})$-正合列

$$0 \to M' \to C \otimes_R P^0 \to C \otimes_R P^1 \to \cdots$$

和

$$0 \to M'' \to C \otimes_R Q^0 \to C \otimes_R Q^1 \to \cdots$$

其中 $C \otimes_R P^i, C \otimes_R Q^i \in \mathcal{P}_C(R)$. 于是有 $\mathrm{Ext}_R^{i\geq 1}(M, Q) = 0$. 由

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

DOI: 10.12677/aam.2021.109307

是 $\mathrm{Hom}_R(-,\mathcal{W})$-正合, 可以构造一个 $\mathrm{Hom}_R(-,\mathcal{W})$-正合列

$$0 \to M \to (C \otimes_R P^0) \bigoplus (C \otimes_R Q^0) \to (C \otimes_R P^1) \bigoplus (C \otimes_R Q^1) \to \cdots$$

其中 $(C \otimes_R P^i) \bigoplus (C \otimes_R Q^i) \in \mathcal{P}_C(R)$. 因此, 由命题 1 知 M 是 C-Gorenstein $\mathcal{W}$-投射模.

接下来, 设 M 和 M'' 是 C-Gorenstein $\mathcal{W}$-投射模, 对任意的 R-模 $Q \in \mathcal{W}$, $\mathrm{Ext}_R^{i\geq 1}(M,Q)=0$, $\mathrm{Ext}_R^{i\geq 1}(M'',Q)=0$. 所以短正合列

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

是 $\mathrm{Hom}_R(-,\mathcal{W})$-正合的, 且 $\mathrm{Ext}_R^{i\geq 1}(M',Q)=0$. 由命题 1 知, 存在 $\mathrm{Hom}_R(-,\mathcal{W})$-正合列

$$0 \to M \to C \otimes_R P^0 \to C \otimes_R P^1 \to \cdots$$

其中 $C \otimes_R P^i \in \mathcal{P}_C(R)$.

令 $K^1 = \mathrm{Ker}(C \otimes_R P^1 \to C \otimes_R P^2)$, 则有短正合列

$$0 \to M \to C \otimes_R P^0 \to K^1 \to 0$$

由引理 1 知, K^1 是 C-Gorenstein $\mathcal{W}$-投射模.

考虑如下交换图

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d, equal] & M \arrow[r] \arrow[d] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] & C \otimes_R P^0 \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & K^1 \arrow[r, equal] \arrow[d] & K^1 \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

因为 K^1, M'' 是 C-Gorenstein $\mathcal{W}$-投射模, 所以 L 也是 C-Gorenstein $\mathcal{W}$-投射模. 从而短正合列

$$0 \to M' \to C \otimes_R P^0 \to L \to 0$$

是 $\mathrm{Hom}_R(-,\mathcal{W})$-正合且存在 $\mathrm{Hom}_R(-,\mathcal{W})$-正合列

$$0 \to L \to C \otimes_R Q^0 \to C \otimes_R Q^1 \to \cdots$$

其中 $C\otimes_R O^i\in\mathcal{P}_C(R)$. 因此, 得到 $\mathrm{Hom}_R(-,\mathcal{W})$-正合列

$$0\to M'\to C\otimes_R P^0\to C\otimes_R Q^0\to C\otimes_R Q^1\to\cdots$$

其中 $C\otimes_R P^0, C\otimes_R Q^i\in\mathcal{P}_C(R)$. 故由命题 1 知, $M^{'}$ 是 C-Gorenstein $\mathcal{W}$-投射模.

由命题 2 可知 C-Gorenstein $\mathcal{W}$-投射模关于直和封闭, 再由文献 [7] 中命题 Eilenberg's swindle 可得, C-Gorenstein $\mathcal{W}$-投射模类关于直和项封闭.

因为任何投射模都是 R 直和的直和项, 由命题 3 知, R 是 C-Gorenstein $\mathcal{W}$-投射模. 由上面的讨论知 C-Gorenstein $\mathcal{W}$-投射模类关于直和与直和项封闭, 所以投射模也是 C-Gorenstein $\mathcal{W}$-投射模.

命题4 完备的 $\mathcal{P}_C\mathcal{P}_\mathcal{W}$-分解的余核是 C-Gorenstein $\mathcal{W}$-投射模.

证明 考虑完备的 $\mathcal{P}_C\mathcal{P}_\mathcal{W}$-分解

$$X=\cdots\to P_1\to P_0\to C\otimes_R Q^0\to C\otimes_R Q^1\to\cdots$$

设 $L_1=\mathrm{Coker}(P_1\to P_0)$ 和 $L_2=\mathrm{Coker}(P_2\to P_1)$. 因为 L_1 和 P_0 都是 C-Gorenstein $\mathcal{W}$-投射模, 考虑短正合序列

$$0\to L_2\to P_0\to L_1\to 0$$

由定理 2 可知, L_2 也是 C-Gorenstein $\mathcal{W}$-投射模.

定理3 设

$$0\to L\to M\to K\to 0$$

是左 R-模正合序列. 若 L, M 是 C-Gorenstein $\mathcal{W}$-投射模, 则 K 是 C-Gorenstein $\mathcal{W}$-投射模, 当且仅当 $\mathrm{Ext}_R^{i\geqslant 1}(K,Q)=0$. 其中任意 $Q\in\mathcal{W}$.

证明 $(\Longrightarrow)$ 由命题 1 直接得到.

$(\Longleftarrow)$ 因为 L 是 C-Gorenstein $\mathcal{W}$-投射模. 由命题 1 知, 存在 $\mathrm{Hom}_R(-,\mathcal{W})$-正合列

$$0\to L\to C\otimes_R P^0\to C\otimes_R P^1\to\cdots$$

设 $Z^1=\mathrm{Ker}(C\otimes_R P^1\to C\otimes_R P^2)$, 则有短正合列

$$0\to L\to C\otimes_R P^0\to Z^1\to 0$$

其中 $C\otimes_R P^0\in\mathcal{P}_C(R)$. 由引理 1 知, Z^1 是 C-Gorenstein $\mathcal{W}$-投射模.

考虑如下交换图

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & K \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & C \otimes_R P^0 \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & K \arrow[r] & 0 \\
 & Z^1 \arrow[r, equal] \arrow[d] & Z^1 \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

由于 M, Z^1 是 C-Gorenstein $\mathcal{W}$-投射模, 由定理 2 可得, N 也是 C-Gorenstein $\mathcal{W}$-投射模. 对于短正合列

$$0 \to C \otimes_R P^0 \to N \to K \to 0$$

其中 $C \otimes_R P^0 \in \mathcal{P}_C(R)$, $\mathrm{Ext}_R^{i\geq 1}(K, Q) = 0$, 任意 $Q \in \mathcal{W}$. 故有序列

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(K, C \otimes_R P^0) \to \mathrm{Hom}_R(N, C \otimes_R P^0) \to \mathrm{Hom}_R(C \otimes_R P^0, C \otimes_R P^0) \to \mathrm{Ext}_R^1(K, C \otimes_R P^0) = 0$$

成立. 所以短正合列

$$0 \to C \otimes_R P^0 \to N \to K \to 0$$

是可裂的. 即 K 是 N 的直和项. 所以由定理 2 知, K 是 C-Gorenstein $\mathcal{W}$-投射模. 证毕.

4. 结语

在前人研究的基础上, 运用类比的思想方法, 经过大量的证明, 本文将半对偶模推广到 Gorenstein $\mathcal{W}$-投射模上, 给出了 C-Gorenstein $\mathcal{W}$-投射模的定义和一些性质, 得到了 $\mathcal{G}_C(\mathcal{W})$ 是投射分解类. 在本文的基础上, 将来可进一步研究半对偶模与 Gorenstein 范畴的相关问题.

基金项目

国家自然科学青年基金资助项目(11801515);国家自然科学基金面上资助项目(11571316)。

参考文献

[1] Bravo, D., Gillespie, J. and Hovey, M. (2014) The Stable Module Category of a General Ring. *Mathematics*, 1-38.

[2] Holm, H. and White, D. (2006) Foxby Equivalence over Associative Rings. *Kyoto Journal of Mathematics*, **47**, 781-808. https://doi.org/10.1215/kjm/1250692289

[3] White, D. (2010) Gorenstein Projective Dimension with Respect to a Semodualizing Module. *Journal of Commutative Algebra*, **2**, 111-137. https://doi.org/10.1216/JCA-2010-2-1-111

[4] Zhang, C.X., Wang, L.M. and Liu, Z.K. (2015) Ding Projective Modules with Respect to a Semidualizing Module. *Rocky Mountain Journal of Mathematical*, **45**, 1389-1411. https://doi.org/10.1216/RMJ-2015-45-4-1389

[5] Sun, Y.Z. and Yang, X.Y. (2017) Gorenstein AC-Projective Modules with Respect to a Semidualizing Module. *Journal of Shandong University*, **52**, 31-35.

[6] Zhang, C.X., Wang, L.M. and Liu, Z.K. (2013) Gorenstein Homological Dimensions and Auslander Categories with Respect to a Semidualizing Module. *Journal of Mathematical Research with Applications*, **33**, 297-311.

[7] Holm, H. (2004) Gorenstein Homological Dimensions. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **189**, 167-193. https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2003.11.007