Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2022, 11(1), 381-387**
Published Online January 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.111046

Hans汉斯

具有反馈和不耐烦顾客的可修 M/M/1 排队系统

池夏夏*，**李冰冰**

杭州师范大学数学学院，浙江 杭州

收稿日期：2021 年 12 月 24 日；录用日期：2022 年 1 月 20 日；发布日期：2022 年 1 月 27 日

摘 要

本文在经典的 M/M/1 排队系统模型中增加了反馈、不耐烦顾客、可修影响因素，构建出一个新的模型。利用模型中各个状态转移之间的关系列出其稳态方程，通过对其进行求解，从而得出系统处于各个状态下的概率以及平均队长、平均等待时间等排队指标。

关键词

反馈，不耐烦，可修排队系统，稳态方程

Repairable M/M/1 Queuing System with Feedback and Impatient Customers

Xiaxia Chi*, **Bingbing Li**

School of Mathematics, Hangzhou Normal University, Hangzhou Zhejiang

Received: Dec. 24^{th}, 2021; accepted: Jan. 20^{th}, 2022; published: Jan. 27^{th}, 2022

* 通讯作者 Email: chixiaxia000@163.com

文章引用: 池夏夏, 李冰冰. 具有反馈和不耐烦顾客的可修 M/M/1 排队系统 [J]. 应用数学进展, 2022, 11(1): 381-387. DOI: 10.12677/aam.2022.111046

Abstract

In this paper, feedback, impatient customers, and repairable factors are added to the classic M/M/1 queuing system model, and a new model is constructed. The relationship between various state transitions in the model is used to list its steady state equation. By solving it, the probability of the system being in each state and the queuing indicators such as average queue length and average waiting time can be obtaine.

Keywords

Feedback, Impatient, Repairable Queuing System, Steady State Equation

1. 引言

就目前在排队系统研究的现状而言，在各个经典的排队服务系统中增加其它影响因素成为众多学者们研究的主要方向. S.K.Samanta1 [1] 研究了具有无限等待空间的单服务器排队系统，系统中在连续时间批处理马尔可夫流程下以随机大小批量批服务，再通过马尔可夫更新理论确定随机纪元的系统长度. 最后给出不同到达时间分布下的一些数值结果来验证系统性能测量和分析结果的准确性. Bouchentouf [2] 及其合作者考虑了无限容量批到达单服务器的 Markovian Bernoulli 反馈排队系统，利用概率母函数进行分析，派生各种排队系统特征. 还开发了排队系统的成本模型. 研究意义重大. Qi [3] 及其研究者们研究了一种与不耐烦的顾客相关的状态批量匹配排队系统，利用联合概率的尾部渐近并使用矩阵分析的方法推导出其精确的尾部渐近结果. Yacov Satin [4] 及其合作者们研究了一类具有不耐烦顾客的非平稳马尔可夫队列中单个客户的概率特征. 该文在存在稳态解和存在相应正向柯尔莫哥洛夫系统的周期解的情况下，开发出一种计算系统特征的方法. Swathi Ch [5] 及其合作者们考虑了 M/M/1 队列系统中顾客会为不靠谱的服务器而背弃, 并且对单个或多个休假模型在服务器不同状态时进行了详细的分析，得出稳态率以及绩效度量的封闭表达式. Zhou [6] 研究了经典的 N-策略 M/M/1 多重工作休假排队，利用矩阵方法求得模型平稳队长分布以及平稳状态时服务台具体处于第几次工作休假的概率. Li [7] 研究了带有启动时间、服务台

可故障的 M/M/1/N 单重工作休假排队系统，通过建立有限状态拟生灭过程，使用矩阵几何方法得到的各稳态概率相互依赖的率阵, 从而求得稳态概率向量，并且求出了系统的基本阵和协方差矩阵, 求解出系统方差、系统稳态可用度、系统吞吐率、系统稳态队长、系统稳态故障频度等系统性能，为模型的实际应用提供了很好的理论依据. Li、Yue 等 [8] 研究了具有不耐烦顾客的 M/M/1 休假排队系统，建立水平相依的拟生灭过程模型，通过利用 BrightTaylor 算法得到系统的稳态概率解以及其他重要指标. 虽然学者们在不同的排队模型中加入反馈或者不耐烦等影响因素，但目前尚未有学者将反馈、不耐烦顾客、可修等影响因素同时在一个 M/M/1 排队系统模型中进行考虑，研究这些因素对该排队系统产生的影响. 而本文将这些影响因素同时添入经典的 M/M/1 排队系统中构建出一个新的模型, 通过给出其稳态方程求出其母函数，并求出系统处于各个状态下的概率以及平均等待队长、平均等待时间等排队指标.

2. 模型描述

设顾客到达过程 $\{X_{(t)}, t \geq 0\}$ 为参数是 λ 的泊松过程，即到达间隔时间序列 $\{J_k, k \geq 0\}$ 为 $i.i.d$ 随机变量序列，且 $J_1 \sim \Gamma(1, \lambda)$.

系统只有一个服务台，每次只服务一位顾客，服务规则 $FCFS$，服务过程独立，服务时间为 B，$B \sim \Gamma(1, \mu)$，即顾客的服务时间序列 $\{B_k, k \geq 1\}$ 为 $i.i.d$ 随机变量序列，且 $B_1 \sim \Gamma(1, \mu)$. 其中 $\mu < \lambda$.

在服务过程中，服务台可能会发生故障，由于发生故障后不能及时维修，假定发生故障的时间 $T_1 \sim \Gamma(1, \gamma_1)$，服务台维修时间 $T_2 \sim \Gamma(1, \gamma_2)$. 在服务台发生故障及维修期间，服务台暂停服务，顾客需进行等待. 在等待过程中，部分顾客产生不耐烦情绪，在等待时间 T_3 后仍未进入服务，顾客选择离开，不再回来. 假设顾客从进入系统到离开的时间 $T_3 \sim \Gamma(1, \gamma_3)$.

假定每个服务完成后的顾客以概率 θ 返回到服务系统队尾排队等候下一次服务，以概率 $1-\theta$ 离开系统，记 $\bar{\theta} = 1 - \theta$.

设 $N_{(t)}$ 表示时刻 t 系统中的顾客数，$I_{(t)}$ 表示服务台在时刻 t 的状态. $I_{(t)}$ 的定义如下：

$$I_{(t)} = \begin{cases} 0, & t \text{ 时刻服务台处于故障状态;} \\ 1, & t \text{ 时刻服务台处于正常状态.} \end{cases}$$

则 $\{N_{(t)}, I_{(t)}, t \geq 0\}$ 构成一个二维连续时间的马尔可夫过程，状态空间为 $\Omega = \{(n, 0), n \geq 0\} \cup \{(n, 1), n \geq 0\}$.

在已建立的模型的基础上，利用整个系统处于平衡状态且各个状态之间可以互相转移的特性，对其进行如下进一步的研究.

3. 稳态方程

系统的稳态概率定义如下：

$$P_{n1} = \lim_{t \to \infty} P_{n1}(t);$$

$$P_{n0} = \lim_{t\to\infty} P_{n0}(t).$$

其中,

$$P_{n1}(t) = P\{N_{(t)} = n, I_{(t)} = 1\}, n \geq 0;$$

$$P_{n0}(t) = P\{N_{(t)} = n, I_{(t)} = 0\}, n \geq 0.$$

则该系统的稳态方程为

$$\gamma_1 P_{01} = \gamma_2 P_{00}; \tag{1}$$

$$(\lambda+\gamma_1)P_{01} = \gamma_2 P_{00} + \bar{\theta}\mu P_{11}; \tag{2}$$

$$(\lambda+\gamma_2)P_{00} = \gamma_1 P_{01} + \gamma_3 P_{10}; \tag{3}$$

$$(\lambda+\mu+\gamma_1)P_{11} = \lambda P_{01} + \gamma_2 P_{10} + \bar{\theta}\mu P_{21}; \tag{4}$$

$$(\lambda+\mu+\gamma_1)P_{n1} = (\lambda+\theta\mu)P_{n-1,1} + \gamma_2 P_{n0} + \bar{\theta}\mu P_{n+1,1} \qquad n \geq 2; \tag{5}$$

$$(\lambda+\gamma_2+\gamma_3)P_{n0} = \lambda P_{n-1,0} + \gamma_1 P_{n1} + \gamma_3 P_{n+1,0} \qquad n \geq 1. \tag{6}$$

等式 (5) 与 (6) 两边同乘以 z^n,(其中 $|z| \leq 1$) 可得：

$$(\lambda+\mu+\gamma_1)z^n P_{n1} = (\lambda+\theta\mu)z^n P_{n-1,1} + \gamma_2 z^n P_{n0} + \bar{\theta}\mu z^n P_{n+1,1}, \tag{7}$$

$$(\lambda+\gamma_2+\gamma_3)z^n P_{n0} = \lambda z^n P_{n-1,0} + \gamma_1 z^n P_{n1} + \gamma_3 z^n P_{n+1,0}, n \geq 1. \tag{8}$$

等式 (7) 和 (8) 分别对 n 进行求和可得：

$$(\lambda+\mu+\gamma_1)\sum_{n=2}^{\infty} z^n P_{n1} = z(\lambda+\theta\mu)\sum_{n=2}^{\infty} z^{n-1}P_{n-1,1} + \gamma_2 \sum_{n=2}^{\infty} z^n P_{n0} + \frac{\bar{\theta}\mu}{z} z^{n+1}P_{n+1,1}, \quad n \geq 2; \tag{9}$$

$$(\lambda+\gamma_2+\gamma_3)\sum_{n=1}^{\infty} z^n P_{n0} = z\lambda \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1}P_{n-1,0} + \gamma_1 \sum_{n=1}^{\infty} z^n P_{n1} + \frac{\gamma_3}{z}\sum_{n=1}^{\infty} z^{n+1}P_{n+1,0}, \quad n \geq 1. \tag{10}$$

令

$$P_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n P_{n1};$$

$$P_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n P_{n0}.$$

则 (9) 和 (10) 两式可化简为：

$$(\lambda+\mu+\gamma_1)(P_1(z) - zP_{11}) = z(\lambda+\theta\mu)P_1(z) + \gamma_2(P_0(z) - zP_{10}) + \frac{\bar{\theta}\mu}{z}(P_1(z) - zP_{11} + z^2 P_{21}); \tag{11}$$

$$(\lambda+\gamma_2+\gamma_3)P_0(z) = z\lambda(P_0(z) + P_{00}) + \gamma_1 P_1(z) + \frac{\gamma_3}{z}(P_0(z) - zP_{10}). \tag{12}$$

再由 (1)-(4) 式将 (11),(12) 两式进一步化简可得：

$$[(1-z)\lambda+(1-z\theta-\frac{\bar{\theta}}{z})\mu+\gamma_1]P_1(z)-\gamma_2 P_0(z)=(z-1)\lambda P_{01}; \tag{13}$$

$$[(1-z)\lambda+(1-\frac{1}{z})\gamma_3+\gamma_2]P_0(z)-\gamma_1 P_1(z)=(z-1)\frac{\lambda\gamma_1}{\gamma_2}P_{01}. \tag{14}$$

由 (13) 与 (14) 两式可得：

$$P_0(z)=\frac{(z-1)\lambda\gamma_1(1+\frac{1}{\gamma_2}[(1-z)\lambda+(1-z\theta-\frac{\bar{\theta}}{z})\mu+\gamma_1])P_{01}}{[(1-z)\lambda+(1-\frac{1}{z})\gamma_3+\gamma_2][(1-z)\lambda+(1-z\theta-\frac{\bar{\theta}}{z})\mu+\gamma_1]-\gamma_1\gamma_2}$$

$$P_1(z)=\frac{(z-1)\lambda[(1-z)\lambda+(1-\frac{1}{z})\gamma_3+\gamma_2+\gamma_1]P_{01}}{[(1-z)\lambda+(1-\frac{1}{z})\gamma_3+\gamma_2][(1-z)\lambda+(1-z\theta-\frac{\bar{\theta}}{z})\mu+\gamma_1]-\gamma_1\gamma_2}$$

4. 主要结论

定理 1　(1) 系统处于正常工作状态的母函数为

$$P_1(z)=\frac{(z-1)\lambda[(1-z)\lambda+(1-\frac{1}{z})\gamma_3+\gamma_2+\gamma_1]P_{01}}{[(1-z)\lambda+(1-\frac{1}{z})\gamma_3+\gamma_2][(1-z)\lambda+(1-z\theta-\frac{\bar{\theta}}{zz})\mu+\gamma_1]-\gamma_1\gamma_2}$$

(2) 系统处于故障状态的母函数为

$$P_0(z)=\frac{(z-1)\lambda\gamma_1(1+\frac{1}{\gamma_2}[(1-z)\lambda+(1-z\theta-\frac{\bar{\theta}}{z})\mu+\gamma_1])P_{01}}{[(1-z)\lambda+(1-\frac{1}{z})\gamma_3+\gamma_2][(1-z)\lambda+(1-z\theta-\frac{\bar{\theta}}{z})\mu+\gamma_1]-\gamma_1\gamma_2}$$

(3) 系统的概率母函数

$$\begin{aligned}P(z)&=P_{01}+P_1(z)+P_0(z)\\&=(\frac{(1-z\theta-\frac{\bar{\theta}}{z})\mu[(1-z)\lambda(1-\frac{\gamma_1}{\gamma_2})+(1-\frac{1}{z})\gamma_3+\gamma_2]+(1-\frac{1}{z})\gamma_1\gamma_3}{[(1-z)\lambda+(1-\frac{1}{z})\gamma_3+\gamma_2][(1-z)\lambda+(1-z\theta-\frac{\bar{\theta}}{z})\mu+\gamma_1]-\gamma_1\gamma_2}\\&\quad+\frac{(z-1)\lambda\gamma_1[1+\frac{(1-z)\lambda}{\gamma_2}+\frac{\gamma_1}{\gamma_2}]}{[(1-z)\lambda+(1-\frac{1}{z})\gamma_3+\gamma_2][(1-z)\lambda+(1-z\theta-\frac{\bar{\theta}}{z})\mu+\gamma_1]-\gamma_1\gamma_2})P_{01}\end{aligned}$$

定理 2　(1) 系统处于正常工作状态的概率为

$$P_1(1)=\lim_{z\to 1}P_1(z)=\frac{\lambda(\gamma_2+\gamma_1)P_{01}}{(\gamma_3-\lambda)\gamma_1+\gamma_2[(\bar{\theta}-\theta)\mu-\lambda]}$$

(2) 系统处于故障状态的概率为

$$P_0(1)=\lim_{z\to 1}P_0(z)=\frac{\lambda\gamma_1(1+\frac{\gamma_1}{\gamma_2})P_{01}}{(\gamma_3-\lambda)\gamma_1+\gamma_2[(\bar{\theta}-\theta)\mu-\lambda]}$$

(3) 由正规条件 $P_{01}+P_1(1)+P_0(1)=1$ 可得，服务台处于闲期的概率

$$P_{01}=\frac{(\gamma_3-\lambda)\gamma_1+\gamma_2[(\bar{\theta}-\theta)\mu-\lambda]}{(\bar{\theta}-\theta)\mu\gamma_2+\lambda\gamma_1(1+\frac{\gamma_1}{\gamma_2})+\gamma_1\gamma_3}$$

(4) 服务台处于忙期的概率为

$$1-P_{01}=\frac{\lambda\gamma_1(2+\frac{\gamma_1}{\gamma_2})+\lambda\gamma_2}{(\bar{\theta}-\theta)\mu\gamma_2+\lambda\gamma_1(1+\frac{\gamma_1}{\gamma_2})+\gamma_1\gamma_3}$$

定理 3　系统中的平均队长为

$$E(N)=\frac{d}{d(z)}P(z)\mid_{z=1}=\frac{(\bar{\theta}-\theta)\mu\gamma_2+\lambda\gamma_1(1+\frac{\gamma_1}{\gamma_2})+\gamma_1\gamma_3}{(\gamma_3-\lambda)\gamma_1+\gamma_2[(\bar{\theta}-\theta)\mu-\lambda]}$$

定理 4　设 w 为系统平稳条件下 (即 $\frac{\lambda}{\mu}<1$)，下一个顾客的等待时间，则平均等待时间

$$E(w)=\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{(\bar{\theta}-\theta)\mu\gamma_2+\lambda\gamma_1(1+\frac{\gamma_1}{\gamma_2})+\gamma_1\gamma_3}{(\gamma_3-\lambda)\gamma_1+\gamma_2[(\bar{\theta}-\theta)\mu-\lambda]}$$

证：由模型知系统的到达率为 λ，再由定理 3 可知系统的平均队长

$$E(N)=\frac{(\bar{\theta}-\theta)\mu\gamma_2+\lambda\gamma_1(1+\frac{\gamma_1}{\gamma_2})+\gamma_1\gamma_3}{(\gamma_3-\lambda)\gamma_1+\gamma_2[(\bar{\theta}-\theta)\mu-\lambda]}$$

利用利特尔 (*Little*) 公式 $E(w)=\frac{E(N)}{\lambda}$ 可得

$$E(w)=\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{(\bar{\theta}-\theta)\mu\gamma_2+\lambda\gamma_1(1+\frac{\gamma_1}{\gamma_2})+\gamma_1\gamma_3}{(\gamma_3-\lambda)\gamma_1+\gamma_2[(\bar{\theta}-\theta)\mu-\lambda]}$$

5. 小结

通过在经典的 M/M/1 排队系统模型中增加了反馈、不耐烦顾客、可修影响因素，构建出一个新的模型并对其进行计算，我们可从结果中了解到模型假设中各个参数对于概率、平均队长和平均等待时间的影响. 在需要排队的日常生活情形中，我们可以根据顾客的到达情况，同时考虑到服务系统的服务率，以及照顾到在等待过程中顾客的不耐烦情绪等，设计出较为合理的服务速率以及提高服务台的维修速率，进而达到更好地服务顾客和更充分利用资源的目的.

另外，在其它排队模型中同时加入反馈、不耐烦顾客、可修系统影响因素进行研究，能否还可以利用列出其稳态方程的方法求系统各个状态下的概率以及平均队长、平均等待时间等排队指标是需要进一步考虑的问题.

参考文献

[1] Samanta, S.K. and Bank, B. (2021) Modelling and Analysis of $GI/BMSP/1$ Queueing System. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, **44**, 3777-3807. https://doi.org/10.1007/s40840-021-01120-z

[2] Angelika, B.A. and Abdelhak, G. (2021) Single Server Batch Arrival Bernoulli Feedback Queueing System with Waiting Server, K-Variant Vacations and Impatient Customers. *Operations Research Forum*, **2**, Article No. 14. https://doi.org/10.1007/s43069-021-00057-0

[3] Bu, Q., Song, Y. and Liu, L. (2020) Tail Asymptotics for a State-Dependent Bulk Matching Queueing System with Impatient Customers. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **486**, Article ID: 123826. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.123826

[4] Satin, Y., Zeifman, A., Sipin, A., Ammar, S.I. and Sztrik, J. (2020) On Probability Characteristics for a Class of Queueing Models with Impatient Customers. *Mathematics*, **8**, Article 594. https://doi.org/10.3390/math8040594

[5] Swathi, Ch. and Vasanta Kumar, V. (2018) Analysis of M/M/1 Queuing System with Customer Reneging during Server Vacations Subject to Server Breakdown and Delayed Repair. *International Journal of Engineering Technology*, **7**, 552-557. https://doi.org/10.14419/ijet.v7i4.10.21279

[6] 周高军, 彭培让, 张宏波. 分析 N-策略 M/M/1 多重工作休假排队的一种新方法 [J]. 数学的实践与认识, 2020, 50(19): 119-125.

[7] 黎锁平, 杨喜娟, 彭铎, 陈金淑. 带启动时间和可修服务台的 M/M/1/N 工作休假排队系统 [J]. 控制与决策, 2020, 35(2): 319-328.

[8] 李单单, 岳德权, 赵冰. 具有不耐烦顾客和 PH 分布休假的 M/M/1 排队系统 [J]. 数学的实践与认识, 2017, 47(3): 198-205.