Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2022, 11(10), 7325-7333**
Published Online October 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.1110778

一类3-缠绕的Jones多项式

杨晓雨

辽宁师范大学，辽宁 大连

收稿日期：2022年9月21日；录用日期：2022年10月14日；发布日期：2022年10月25日

摘 要

选定了3-缠绕的一种定向方式，结合Giller的房间理论给出任意两个3-缠绕的复合的Jones多项式。接着，通过研究计算得到了一类特殊3-缠绕的Jones多项式的递推公式以及由其闭包所形成的链环的Jones多项式。

关键词

Jones多项式，不变量，3-缠绕

The Jones Polynomials of a Class of 3-Tangles

Xiaoyu Yang

Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Sep. 21st, 2022; accepted: Oct. 14th, 2022; published: Oct. 25th, 2022

Abstract

An unusual orientation of 3-tangles is given, and the Jones polynomial of the concatenation of two 3-tangles is given by Giller's room theory. Then, the recursion formula of the Jones polynomials of a special kind of 3-tangles is obtained by studying and calculating. In addition, the formula to obtain the Jones polynomial of the links obtained from their closure is given.

Keywords

Jones Polynomial, Invariant, 3-Tangle

文章引用: 杨晓雨. 一类 3-缠绕的 Jones 多项式[J]. 应用数学进展, 2022, 11(10): 7325-7333.
DOI: 10.12677/aam.2022.1110778

1. 引言

组结理论研究组结和链环在连续形变下保持不变的特性，是拓扑学中引人入胜的一支。等价分类问题是组结理论的中心，人们通过寻找纽结不变量来解决纽结的等价问题。纽结多项式[1] [2] [3] [4]是常见的纽结不变量之一，而 Jones 多项式是重要的纽结多项式，它为研究纽结与链环的手征性提供了有力的工具。

近几年，不同定向的 3-缠绕的多项式成为了数学界的一个关注点且有了大量的研究成果[5]-[10]。在文献[6]中，Cabrera 给出了 3-缠绕的一种定向方式，在此基础上研究了 5 种不同的方法闭合 3-缠绕得到纽结或链环，给出了公式计算两个 3-缠绕的复合的闭包的 Conway 多项式。文献[9]给出了 3-缠绕的一种常规定向，也即 3-辫子，并在此基础上研究了 3-辫子的复合的六种不同闭包方法得到的链环的 Conway 多项式。文献[10]给出了 3-缠绕不同于文献[9]的新的定向，并利用 Giller 的房间理论计算了它们的 Conway 多项式和 Alexander 多项式。

本文在前人的研究基础上，利用 Giller 的房间理论进一步研究了一类特殊 3-缠绕 ε^{2k} 的 Jones 多项式。在预备知识我们将介绍一些有关 3-缠绕和纽结 Jones 多项式的一些基本概念；在第二部分，我们将通过 Giller 的房间理论给出任意两个 3-缠绕的复合的 Jones 多项式；第三部分，通过研究计算得到一类特殊的 3-缠绕 ε^{2k} 的 Jones 多项式的递推公式，并进一步计算由其闭包所形成的链环的 Jones 多项式。

2. 预备知识

2.1. 3-缠绕的基本概念

定义 2.1 [10] n-缠绕指一个偶对 (B^3,T)，其中 B^3 是一个三维实心球，$T \subset B^3$ 是一个具有非空边界的一维嵌入子流形，它包含 n 个弧(即 n 个同胚于 $[0,1]$ 的子集)，并满足 $\partial T = T \cap \partial B^3$。

本文只讨论 3-缠绕，且记为 T 而不是 (B^3,T)。

定义 2.2 [11] n-辫子是由 n 条线组成的集合，这些线都连接在顶部和底部的水平线上(如图 1)，沿着任意一根线从顶部移动到底部时方向总是向下的，即每根线与两根水平线之间的任何水平面相交且只相交一次。n-辫子是 n-缠绕的一种特殊情况。

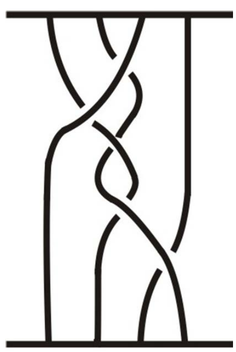
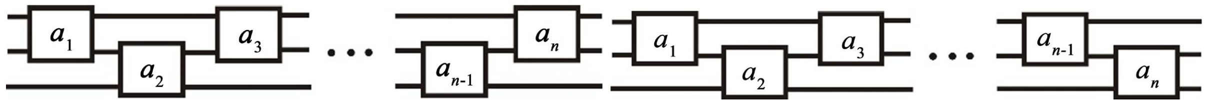


Figure 1. A braid
图 1. 辫子

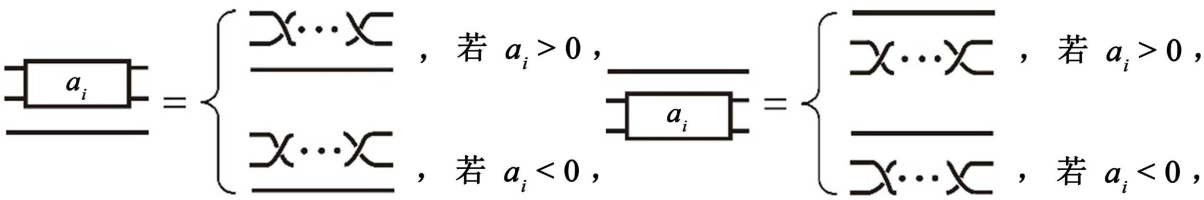


(a) (b)

Figure 2. 3-braid $\mathrm{T}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ with (a) n odd and (b) n even

图 2. 3-辫子 $\mathrm{T}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 其中(a) n 为奇数(b) n 为偶数

本文研究的是 3-辫子，并使用符号 $\mathrm{T}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ [10]表示，其中 a_i,n 均为整数，$i=1,2,\cdots,n$。如图 2 所示，a_i 表示交叉点的类型和数量，规定：若 $a_i=0$，则 3-辫子无交叉点，否则



定义 2.3 [10]如图 3 所示 3-辫子 $\mathrm{T}(1,-1,1)$ 是一个半扭转，记为 ε。

Figure 3. 3-braid $\mathrm{T}(1,-1,1)$

图 3. 3-辫子 $\mathrm{T}(1,-1,1)$

定义 2.4 [12]房间 R 是 R^2 中的一个连通域，它具有相同数量的有向的进出绳。本文讨论的是如图 4 所示的 3-房间。

Figure 4. The 3-room R

图 4. 3-房间 R

定义 2.5 [12]所有连通房间进出绳的集合，用 $S(R)$ 表示。$S(R)$ 的一个元素称为 R 的居住者。(图 5)

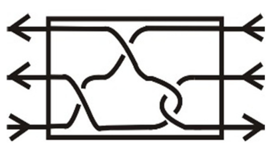


Figure 5. An inhabitant of the 3-room R

图 5. 3-房间 R 的一个居住者

事实上，带有由进出绳诱导的方向的 R 的居住者即为一个有向 3-缠绕。

定义 2.6 [12]在 $S(R)$ 中通过连接的方式定义一个记为“·”的运算(如图 6)，将构造一些链环。

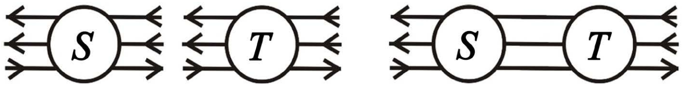


Figure 6. Inhabitants S and T in $S(R)$ and their concatenation $S\cdot T$

图 6. $S(R)$ 中的居住者 S 和 T 以及它们的复合 $S\cdot T$

2.2. 纽结的 Jones 多项式

有向链环定义的一个多项式不变量是 Jones 多项式 $V(L)$。这个多项式可以通过以下拆接关系[11]来计算：

1) $t^{-1}V(L_+)-tV(L_-)=\left(t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}}\right)V(L_0)$，

2) $V(\bigcirc)=1$，

其中是 $\bigcirc$ 平凡纽结，L_+, L_-, L_0 是三个只在一个交叉点处不同的链环。(图 7)

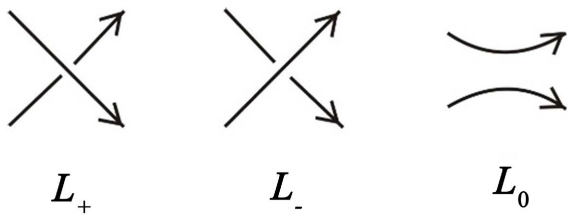


Figure 7. Skein triple

图 7. 拆接关系

引理 2.1 [13]若 L 是具有 c 个分支的平凡链环，则 $V(L)=\delta^{c-1}$，其中 $\delta=-\left(t^{-\frac{1}{2}}+t^{\frac{1}{2}}\right)$。

引理 2.2 [14]设 L 为任意有向链环，则 $V(L\underbrace{\cup\bigcirc\cup\cdots\cup\bigcirc}_{c\text{个}}) = \delta^{c}V(L)$，其中 $\delta=-\left(t^{-\frac{1}{2}}+t^{\frac{1}{2}}\right)$。

3. 3-缠绕的 Jones 多项式

在 $S(R)$ 中有 6 种不同的方式连接 R 的进绳和出绳。图 8 是连接 R 的进出绳后具有最少交叉点数的居住者，用 χ_i 表示，其中 $i=1,2,\cdots,6$。这样的居住者的集合 $\{\chi_i, i=1,2,\cdots,6\}$ 称为 $S(R)$ 的基居住者集[10]。

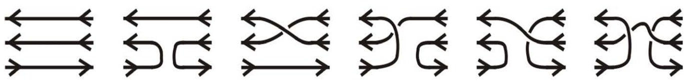


Figure 8. Basic inhabitants of $S(R)$

图 8. $S(R)$ 的基居住者

设 F 是 $Z\left[\sqrt{t}\right]$ 的分式域，$V(R)$ 表示 $S(R)$ 在 F 上生成的自由向量空间，$N(R)$ 是

$t^{-1}T_+ - tT_- - \left(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}\right)T_0$ 在 F 上生成的子空间，其中 (T_+,T_-,T_0) 是一个拆接关系。记 $L(R)$ 是商向量空间 $\dfrac{V(R)}{N(R)}$。特别地，图 8 所示的基居住者是 $L(R)$ 的基。因此，$L(R)$ 中的每个元素都可以唯一地表示成基居住者的线性组合。

对任意的 $T \in S(R)$，通过对图 T 反复应用 Jones 多项式的拆接关系，直到只剩下基居住者为止，就得到了 T 的 Jones 多项式。因此

$$V(T) = \sum_{i=1}^{6} p_i V(\chi_i)，\text{其中 } p_i \in Z\left[\sqrt{t}\right]。$$

定理 3.1 设 T_1, T_2 是两个 3-缠绕，且

$$V(T_1) = \sum_{i=1}^{6} p_i V(\chi_i)，\quad V(T_2) = \sum_{i=1}^{6} q_i V(\chi_i)，$$

那么

$$\begin{aligned}
V(T_1 \cdot T_2) = {} & \left[p_1q_1 + p_3q_3t^2\right]V(\chi_1) + \left[p_1q_2 + p_2q_1 - p_2q_2\left(t^{-\frac{1}{2}} + t^{\frac{1}{2}}\right) + p_2q_4 + p_3q_4t^2 + p_5q_2\right. \\
& \left. + p_5q_3t^2 - p_5q_4\left(t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{5}{2}}\right)\right]V(\chi_2) + \left[p_1q_3 + p_3q_1 + p_3q_3\left(t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{1}{2}}\right)\right]V(\chi_3) \\
& + \left[p_1q_4 + p_3q_2 + p_3q_4\left(t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{1}{2}}\right) + p_4q_1 - p_4q_2\left(t^{-\frac{1}{2}} + t^{\frac{1}{2}}\right) + p_4q_4 + p_6q_2 + p_6q_3t^2\right. \\
& \left. - p_6q_4\left(t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{5}{2}}\right)\right]V(\chi_4) + \left[p_1q_5 + p_2q_3 - p_2q_5\left(t^{-\frac{1}{2}} + t^{\frac{1}{2}}\right) + p_2q_6 + p_3q_6t^2 + p_5q_1\right. \\
& \left. + p_5q_3\left(t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{1}{2}}\right) + p_5q_5 - p_5q_6\left(t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{5}{2}}\right)\right]V(\chi_5) + \left[p_1q_6 + p_3q_5 + p_3q_6\left(t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{1}{2}}\right)\right. \\
& \left. + p_4q_3 - p_4q_5\left(t^{-\frac{1}{2}} + t^{\frac{1}{2}}\right) + p_4q_6 + p_6q_1 + p_6q_3\left(t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{1}{2}}\right) + p_6q_5 - p_6q_6\left(t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{5}{2}}\right)\right]V(\chi_6)
\end{aligned}$$

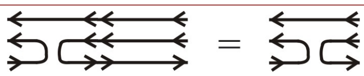
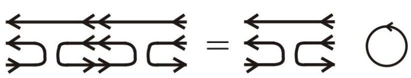
证明：对 T_1, T_2 中的 T_1 应用 Jones 多项式的拆接公式，我们有

$$V(T_1 \cdot T_2) = \sum_{i=1}^{6} p_i V(\chi_i \cdot T_2) = \sum_{i=1}^{6} p_i \left(\sum_{j=1}^{6} q_j V(\chi_i \cdot \chi_j)\right)$$

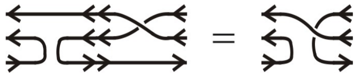
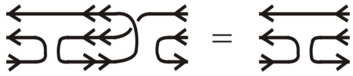
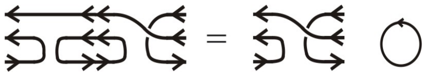
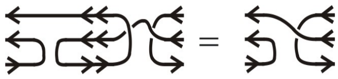
计算 $V(\chi_i \cdot \chi_j)$，并将多项式化简后即可得结果。下面我们计算 $\chi_2 \cdot \chi_j$ 的情况，其他情况可类似计算。(表 1)

Table1. $V(\chi_2 \cdot \chi_j)$

表 1. $V(\chi_2 \cdot \chi_j)$

$\chi_2 \cdot \chi_j$	对应图	对应 Jones 多项式
$\chi_2 \cdot \chi_1$		$V(\chi_2 \cdot \chi_1) = V(\chi_2)$
$\chi_2 \cdot \chi_2$		$V(\chi_2 \cdot \chi_2) = -\left(t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}}\right)V(\chi_2)$

Continued

$\chi_2\cdot\chi_3$		$V(\chi_2\cdot\chi_3)=V(\chi_5)$
$\chi_2\cdot\chi_4$		$V(\chi_2\cdot\chi_4)=V(\chi_2)$
$\chi_2\cdot\chi_5$		$V(\chi_2\cdot\chi_5)=-\left(t^{\frac{1}{2}}+t^{-\frac{1}{2}}\right)V(\chi_5)$
$\chi_2\cdot\chi_6$		$V(\chi_2\cdot\chi_6)=V(\chi_5)$

4. 3-缠绕 ε^{2k} 以及链环 $C\left(\varepsilon^{2k}\right)$ 的 Jones 多项式

4.1. 3-缠绕 ε^{2k} 的 Jones 多项式

定理 4.1 记 $A=t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}}$，则对任意的 $k\in N$，有 $V\left(\varepsilon^{2k}\right)=\sum_{i=1}^{6}\alpha_{i_k}V\left(\chi_i\right)$，其中

$$\alpha_{1_0}=1,\ \alpha_{2_0}=\alpha_{3_0}=\alpha_{4_0}=\alpha_{5_0}=\alpha_{6_0}=0,$$

$$\alpha_{1_k}=t^{-2}\alpha_{1_{k-1}}+At^{-1}\alpha_{3_{k-1}},\ \alpha_{2_k}=-At^{-1}\alpha_{1_{k-1}}+\alpha_{2_{k-1}},\ \alpha_{3_k}=At^{-3}\alpha_{1_{k-1}}+\left(t^{-2}+A^2t^{-2}\right)\alpha_{3_{k-1}},$$

$$\alpha_{4_k}=-At^{-1}\alpha_{3_{k-1}}+\alpha_{4_{k-1}},\ \alpha_{5_k}=-At^{-1}\alpha_{3_{k-1}}+\left(2t^{-2}+A^2t^{-2}+1-t^{-3}-t^{-1}\right)\alpha_{5_{k-1}},$$

$$\alpha_{6_k}=-At^{-3}\alpha_{1_{k-1}}-A^2t^{-2}\alpha_{3_{k-1}}+\left(2t^{-2}+A^2t^{-2}+1-t^{-3}-t^{-1}\right)\alpha_{6_{k-1}}$$

证明：通过对 k 作归纳法证明该定理。$k=0$ 时，$\varepsilon^{2k}=\chi_1$，则有 $V\left(\varepsilon^{2k}\right)=V\left(\chi_1\right)$。此时 $\alpha_{1_0}=1$，$\alpha_{2_0}=\alpha_{3_0}=\alpha_{4_0}=\alpha_{5_0}=\alpha_{6_0}=0$。$k=1$ 时，经过计算可以得到

$$V\left(\varepsilon^{2k}\right)=V\left(\varepsilon^{2}\right)=t^{-2}V\left(\chi_1\right)-\left(t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}}\right)t^{-1}V\left(\chi_2\right)+\left(t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}}\right)t^{-3}V\left(\chi_3\right)-\left(t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}}\right)t^{-3}V\left(\chi_6\right)$$

此时 $\alpha_{1_1}=t^{-2}$，$\alpha_{2_1}=-At^{-1}$，$\alpha_{3_1}=At^{-3}$，$\alpha_{4_1}=\alpha_{5_1}=0$，$\alpha_{6_1}=-At^{-3}$。

现在假设 $k-1$ 时定理 4.1 成立。对于 k 时，应用定理 3.1，我们有

$$\begin{aligned}
&V\left(\varepsilon^{2k}\right)=V\left(\varepsilon^{2(k-1)}\cdot\varepsilon^{2}\right)\\
&=\left[\alpha_{1_{k-1}}\alpha_{1_1}+\alpha_{3_{k-1}}\alpha_{3_1}t^{2}\right]V\left(\chi_1\right)+\left[\alpha_{1_{k-1}}\alpha_{2_1}+\alpha_{2_{k-1}}\alpha_{1_1}-\alpha_{2_{k-1}}\alpha_{2_1}\left(t^{-\frac{1}{2}}+t^{\frac{1}{2}}\right)+\alpha_{2_{k-1}}\alpha_{4_1}\right.\\
&\quad\left.+\alpha_{3_{k-1}}\alpha_{4_1}t^{2}+\alpha_{5_{k-1}}\alpha_{2_1}+\alpha_{5_{k-1}}\alpha_{3_1}t^{2}-\alpha_{5_{k-1}}\alpha_{4_1}\left(t^{\frac{1}{2}}+t^{\frac{5}{2}}\right)\right]V\left(\chi_2\right)\\
&\quad+\left[\alpha_{1_{k-1}}\alpha_{3_1}+\alpha_{3_{k-1}}\alpha_{1_1}+\alpha_{3_{k-1}}\alpha_{3_1}\left(t^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{1}{2}}\right)\right]V\left(\chi_3\right)+\left[\alpha_{1_{k-1}}\alpha_{4_1}+\alpha_{3_{k-1}}\alpha_{2_1}+\alpha_{3_{k-1}}\alpha_{4_1}\left(t^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{1}{2}}\right)\right.\\
&\quad\left.+\alpha_{4_{k-1}}\alpha_{1_1}-\alpha_{4_{k-1}}\alpha_{2_1}\left(t^{-\frac{1}{2}}+t^{\frac{1}{2}}\right)+\alpha_{4_{k-1}}\alpha_{4_1}+\alpha_{6_{k-1}}\alpha_{2_1}+\alpha_{6_{k-1}}\alpha_{3_1}t^{2}-\alpha_{6_{k-1}}\alpha_{4_1}\left(t^{\frac{1}{2}}+t^{\frac{5}{2}}\right)\right]V\left(\chi_4\right)
\end{aligned}$$

$$+\left[\alpha_{1_{k-1}}\alpha_{5_1}+\alpha_{2_{k-1}}\alpha_{3_1}-\alpha_{2_{k-1}}\alpha_{5_1}\left(t^{-\frac{1}{2}}+t^{\frac{1}{2}}\right)+\alpha_{2_{k-1}}\alpha_{6_1}+\alpha_{3_{k-1}}\alpha_{6_1}t^2+\alpha_{5_{k-1}}\alpha_{1_1}+\alpha_{5_{k-1}}\alpha_{3_1}\left(t^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{1}{2}}\right)\right.$$
$$\left.+\alpha_{5_{k-1}}\alpha_{5_1}-\alpha_{5_{k-1}}\alpha_{6_1}\left(t^{\frac{1}{2}}+t^{\frac{5}{2}}\right)\right]V(\chi_5)+\left[\alpha_{1_{k-1}}\alpha_{6_1}+\alpha_{3_{k-1}}\alpha_{5_1}+\alpha_{3_{k-1}}\alpha_{6_1}\left(t^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{1}{2}}\right)+\alpha_{4_{k-1}}\alpha_{3_1}\right.$$
$$\left.-\alpha_{4_{k-1}}\alpha_{5_1}\left(t^{-\frac{1}{2}}+t^{\frac{1}{2}}\right)+\alpha_{4_{k-1}}\alpha_{6_1}+\alpha_{6_{k-1}}\alpha_{1_1}+\alpha_{6_{k-1}}\alpha_{3_1}\left(t^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{1}{2}}\right)+\alpha_{6_{k-1}}\alpha_{5_1}-\alpha_{6_{k-1}}\alpha_{6_1}\left(t^{\frac{1}{2}}+t^{\frac{5}{2}}\right)\right]V(\chi_6)$$

将 $\alpha_{i_1}\,(i=1,2,\cdots,6)$ 的值代入后，有

$$V\left(\varepsilon^{2k}\right)=\left[\alpha_{1_{k-1}}t^{-2}+\alpha_{3_{k-1}}At^{-3}t^2\right]V(\chi_1)+\left[\alpha_{1_{k-1}}\left(-At^{-1}\right)+\alpha_{2_{k-1}}t^{-2}-\alpha_{2_{k-1}}\left(-At^{-1}\right)\left(t^{-\frac{1}{2}}+t^{\frac{1}{2}}\right)+\alpha_{5_{k-1}}\left(-At^{-1}\right)\right.$$
$$\left.+\alpha_{5_{k-1}}At^{-3}t^2\right]V(\chi_2)+\left[\alpha_{1_{k-1}}At^{-3}+\alpha_{3_{k-1}}t^{-2}+\alpha_{3_{k-1}}At^{-3}\left(t^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{1}{2}}\right)\right]V(\chi_3)+\left[\alpha_{3_{k-1}}\left(-At^{-1}\right)+\alpha_{4_{k-1}}t^{-2}\right.$$
$$\left.-\alpha_{4_{k-1}}\left(-At^{-1}\right)\left(t^{-\frac{1}{2}}+t^{\frac{1}{2}}\right)+\alpha_{6_{k-1}}\left(-At^{-1}\right)+\alpha_{6_{k-1}}At^{-3}t^2\right]V(\chi_4)+\left[\alpha_{2_{k-1}}At^{-3}+\alpha_{2_{k-1}}\left(-At^{-3}\right)\right.$$
$$\left.+\alpha_{3_{k-1}}\left(-At^{-3}\right)t^2+\alpha_{5_{k-1}}t^{-2}+\alpha_{5_{k-1}}At^{-3}\left(t^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{1}{2}}\right)-\alpha_{5_{k-1}}\left(-At^{-3}\right)\left(t^{\frac{1}{2}}+t^{\frac{5}{2}}\right)\right]V(\chi_5)+\left[\alpha_{1_{k-1}}\left(-At^{-3}\right)\right.$$
$$+\alpha_{3_{k-1}}\left(-At^{-3}\right)\left(t^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{1}{2}}\right)+\alpha_{4_{k-1}}At^{-3}+\alpha_{4_{k-1}}\left(-At^{-3}\right)+\alpha_{6_{k-1}}t^{-2}+\alpha_{6_{k-1}}At^{-3}\left(t^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{1}{2}}\right)$$
$$\left.-\alpha_{6_{k-1}}\left(-At^{-3}\right)\left(t^{\frac{1}{2}}+t^{\frac{5}{2}}\right)\right]V(\chi_6)$$
$$=\left[t^{-2}\alpha_{1_{k-1}}+At^{-1}\alpha_{3_{k-1}}\right]V(\chi_1)+\left[-At^{-1}\alpha_{1_{k-1}}+\alpha_{2_{k-1}}\right]V(\chi_2)+\left[At^{-3}\alpha_{1_{k-1}}+\left(t^{-2}+A^2t^{-2}\right)\alpha_{3_{k-1}}\right]V(\chi_3)$$
$$+\left[-At^{-1}\alpha_{3_{k-1}}+\alpha_{4_{k-1}}\right]V(\chi_4)+\left[-At^{-1}\alpha_{3_{k-1}}+\left(2t^{-2}+A^2t^{-2}+1-t^{-3}-t^{-1}\right)\alpha_{5_{k-1}}\right]V(\chi_5)$$
$$+\left[-At^{-3}\alpha_{1_{k-1}}-A^2t^{-2}\alpha_{3_{k-1}}+\left(2t^{-2}+A^2t^{-2}+1-t^{-3}-t^{-1}\right)\alpha_{6_{k-1}}\right]V(\chi_6)$$

此时

$$\alpha_{1_k}=t^{-2}\alpha_{1_{k-1}}+At^{-1}\alpha_{3_{k-1}},\ \alpha_{2_k}=-At^{-1}\alpha_{1_{k-1}}+\alpha_{2_{k-1}},\ \alpha_{3_k}=At^{-3}\alpha_{1_{k-1}}+\left(t^{-2}+A^2t^{-2}\right)\alpha_{3_{k-1}},$$
$$\alpha_{4_k}=-At^{-1}\alpha_{3_{k-1}}+\alpha_{4_{k-1}},\ \alpha_{5_k}=-At^{-1}\alpha_{3_{k-1}}+\left(2t^{-2}+A^2t^{-2}+1-t^{-3}-t^{-1}\right)\alpha_{5_{k-1}},$$
$$\alpha_{6_k}=-At^{-3}\alpha_{1_{k-1}}-A^2t^{-2}\alpha_{3_{k-1}}+\left(2t^{-2}+A^2t^{-2}+1-t^{-3}-t^{-1}\right)\alpha_{6_{k-1}}$$

定理 4.1 得证。

4.2. 链环 $C\left(\varepsilon^{2k}\right)$ 的 Jones 多项式

利用 3-缠绕可以构造一些链环。设 T 是一个 3-缠绕，如图 9 所示方式闭合 3-缠绕可以得到纽结或链环。记为 $C(T)$。

定理 4.2 设 T 是一个 3-缠绕且 $V(T)=\sum_{i=1}^{6}p_iV(\chi_i)$，那么

$$V(C(T))=\left(t^{-\frac{1}{2}}+t^{\frac{1}{2}}\right)^2p_1-\left(t^{-\frac{1}{2}}+t^{\frac{1}{2}}\right)p_2-\left(t^{-\frac{1}{2}}+t^{\frac{1}{2}}\right)p_3+p_4+p_5-\left(t^{\frac{5}{2}}+t^{\frac{1}{2}}\right)p_6\text{。}$$

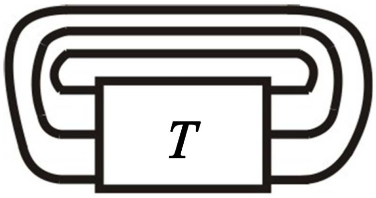


Figure 9. Link $C(T)$

图 9. 链环 $C(T)$

证明：由 $V(T)=\sum_{i=1}^{6} p_i V(\chi_i)$，有 $V(C(T))=\sum_{i=1}^{6} p_i V(C(\chi_i))$。如图 10，我们可以看到，$i=1$ 时，$C(\chi_i)$ 是分支数为 3 的平凡链环；$i=2,3$ 时，$C(\chi_i)$ 是分支数为 2 的平凡链环；$i=4,5$ 时，$C(\chi_i)$ 为平凡结。由引理 2.1 有 $V(C(\chi_1))=\delta^2=\left(t^{-\frac{1}{2}}+t^{\frac{1}{2}}\right)^2$，$V(C(\chi_2))=V(C(\chi_3))=\delta=-\left(t^{-\frac{1}{2}}+t^{\frac{1}{2}}\right)$，$V(C(\chi_4))=V(C(\chi_5))=1$。此外，对 $C(\chi_6)$ 应用拆接关系有

$t^{-1}V($  $)-tV(\bigcirc\bigcirc)=(t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}})V(\bigcirc)$，

得到 $V(C(\chi_6))=-t^{\frac{5}{2}}-t^{\frac{1}{2}}$。因此，

$$V(C(T))=\left(t^{-\frac{1}{2}}+t^{\frac{1}{2}}\right)^2 p_1-\left(t^{-\frac{1}{2}}+t^{\frac{1}{2}}\right)p_2-\left(t^{-\frac{1}{2}}+t^{\frac{1}{2}}\right)p_3+p_4+p_5-\left(t^{\frac{5}{2}}+t^{\frac{1}{2}}\right)p_6。$$

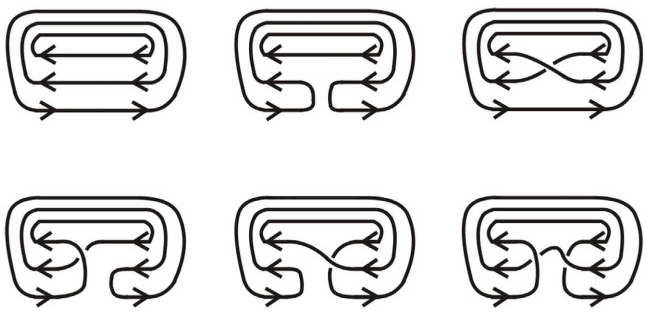


Figure 10. Link $C(\chi_i)(i=1,2,\cdots,6)$

图 10. 链环 $C(\chi_i)(i=1,2,\cdots,6)$

定理 4.3 链环 $C(\varepsilon^{2k})$ 的 Jones 多项式为

$$V(C(\varepsilon^{2k}))=\left(t^{-\frac{1}{2}}+t^{\frac{1}{2}}\right)^2\alpha_{1_k}-\left(t^{-\frac{1}{2}}+t^{\frac{1}{2}}\right)\alpha_{2_k}-\left(t^{-\frac{1}{2}}+t^{\frac{1}{2}}\right)\alpha_{3_k}+\alpha_{4_k}+\alpha_{5_k}-\left(t^{\frac{5}{2}}+t^{\frac{1}{2}}\right)\alpha_{6_k}。$$

证明：由定理 4.1 有 $V(\varepsilon^{2k})=\sum_{i=1}^{6}\alpha_{i_k}V(\chi_i)$。再由定理 4.2 可得

$$V(C(\varepsilon^{2k}))=\left(t^{-\frac{1}{2}}+t^{\frac{1}{2}}\right)^2\alpha_{1_k}-\left(t^{-\frac{1}{2}}+t^{\frac{1}{2}}\right)\alpha_{2_k}-\left(t^{-\frac{1}{2}}+t^{\frac{1}{2}}\right)\alpha_{3_k}+\alpha_{4_k}+\alpha_{5_k}-\left(t^{\frac{5}{2}}+t^{\frac{1}{2}}\right)\alpha_{6_k}。$$

5. 结语

本文主要讨论了一类 3-缠绕的 Jones 多项式。通过 Giller 的房间理论给出两个 3-缠绕的复合的 Jones 多项式。其次，给出一类特殊 3-缠绕的 Jones 多项式计算公式，并在此基础上计算了 3-缠绕闭包方法得到的链环的 Jones 多项式。

参考文献

[1] Alexander, J.W. (1928) Topological Invariants of Knots and Links. *Transactions of the American Mathematical Society*, **30**, 275-306. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1928-1501429-1

[2] Conway, J.H. (1970) An Enumeration of Knots and Links and Some of Their Algebraic Properties. *Computational Problems in Abstract Algerbra*, **22**, 329-358. https://doi.org/10.1016/B978-0-08-012975-4.50034-5

[3] Jones, V.F.R. (1985) A Polynomial Invariants for knots via von Neumann Algebras. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **12**, 103-111. https://doi.org/10.1090/S0273-0979-1985-15304-2

[4] Freyd, P., Yetter, D., Hoste, J., *et al*. (1985) A New Polynomial Invariant of Knots and Links. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **12**, 239-246. https://doi.org/10.1090/S0273-0979-1985-15361-3

[5] Cabrera-Ibarra, H. (2003) On the Classification of Rational 3-Tangles. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, **12**, 921-946. https://doi.org/10.1142/S021821650300286X

[6] Cabrera-Ibarra, H. (2004) Conway Polynomial of the Closures of Oriented 3-String Tangles. *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*, **10**, 55-62.

[7] Cabrera-Ibarra, H. (2004) Results on the Classification of Rational 3-Tangles. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, **13**, 175-192. https://doi.org/10.1142/S021821650400307X

[8] Cabrera-Ibarra, H. and Lizárraga, D.A.L. (2010) An Algorithm Based on 3-Braids to Solve Tangle Equations Arising in the Action of Gin DNA Invertase. *Applied Mathematics and Computation*, **216**, 95-106. https://doi.org/10.1016/j.amc.2010.01.007

[9] Lizárraga, D.A., Hernández, L.Y. and Cabrera-Ibarra, H. (2012) Computing the Conway Polynomial of Several Closures of Oriented 3-Braids. *Topology and Its Applications*, **159**, 1195-1209. https://doi.org/10.1016/j.topol.2011.11.032

[10] de los Angeles Guevara Hernández, M. and Cabrera-Ibarra, H. (2019) Infinite Families of Prime Knots with alt(K) = 1 and Their Alexander Polynomials. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, **28**, Article ID: 1950010. https://doi.org/10.1142/S021821651950010X

[11] Adams, C. (1994) The Knot Book. W. H. Freeman and Company, New York.

[12] Giller, C.A. (1982) A Family of Links and the Conway Calculus. *Transactions of the American Mathematical Society*, **270**, 75-109. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1982-0642331-X

[13] 姜伯驹. 绳圈的数学[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 2011.

[14] Murasugi, K. (2007) Knot Theory and Its Applications. Springer Science & Business Media, Berlin. https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4719-3