

带工作故障的M/M/1重试排队流模型系统性能分析

孙红霜, 叶晴晴

南京信息工程大学数学与统计学院, 江苏 南京

收稿日期: 2022年1月14日; 录用日期: 2022年2月10日; 发布日期: 2022年2月17日

摘要

为了拓展流排队模型的相关理论, 本文研究了带有故障和重试系统的M/M/1排队驱动系统的流模型。基于矩阵几何解法对模型的主要性能指标进行了研究, 对构建的微分方程进行推导, 得到了系统的稳态库存量的LST及其均值。最后通过数值例子说明不同参数对各项性能指标的影响, 为现实情况中的故障和重试排队服务系统提供参考。

关键词

流模型, 工作故障, 重试排队, 矩阵几何解

The Performance Analysis of a Retrieval M/M/1 Flow Queue Model with Working Breakdowns

Hongshuang Sun, Qingqing Ye

School of Mathematics and Statistics, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing Jiangsu

Received: Jan. 14th, 2022; accepted: Feb. 10th, 2022; published: Feb. 17th, 2022

Abstract

In order to expand the related theory of stream queuing model, this paper studies streaming of M/M/1 queuing drive system with faults and retry systems. Based on the matrix geometry method, the main performance indicator of the model is studied, and the construction of the differential

equation is derived, and the system's steady-state stock LST and its mean are obtained. Finally, numerical examples illustrate the influence of different parameters to various performance indicators, provide reference for the fault and retry queuing service systems in realities.

Keywords

Fluid Queue Model, Working Breakdown, Retrial Queue, Matrix Geometrical Solution

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

流排队模型是一种输入输出系统, 连续的流体流入和离开一个存储空间, 称为缓冲器(buffer), 在马尔可夫流排队模型中, 外部的马氏过程决定着流体的输入和输出率。如果顾客到达系统时服务器处于忙期, 则进入一个重试组, 一段时间后再次要求服务, 这种排队策略称为重试排队。重试排队在生活中应用场景广泛, Kerner 等人[1]通过改变重试空间的相邻时间间隔研究了顾客的等待时间以及相应的均衡策略, Wang 等人[2]对具有有限空间的重试排队系统进行了均衡策略分析, 给出了最优社会均衡策略。

在现实生活中, 常有顾客在等待过程中因服务台故障而导致服务中断的现象。早在 1963 年, Thiruvengadam [3]就对具有故障期的排队系统进行了研究。早期对于故障系统的研究都有一个潜在的假设: 当服务台处于故障期时, 服务台将进行维修且停止维修, 顾客需等待服务台维修完成后继续排队接受服务。而 Kalidass 等[4]在 2012 年提出一种带有工作故障的排队模型: 当系统随机发生故障时, 服务台没有完全停止服务, 而是以一个更低的服务速率继续服务, 这样的工作故障系统更合理, 并且能够有效较少顾客流失以及服务商的损失。张淞钰等[5]研究了在不完全故障系统中具有两类平行顾客的均衡止步策略和社会收益。Vijayalakshmi 等人[6]分析了具有工作故障和两阶段服务的有限马尔可夫排队模型, 服务台可选主服务和辅助服务以改变成本, 优化服务率。

受到流模型、工作故障和重试排队系统的研究启发, 本文对带故障和重试的 M/M/1 排队系统驱动的流程模型进行研究。本文的文章结构如下: 第 2 节中详细描述了驱动系统的性能指标。第 3 节详细描述了此驱动系统下的流模型, 给出了相应的微分方程组。第 4 节中对此系统进行稳态分析, 利用矩阵几何法算出了平稳库存量的均值。第 5 节通过几个数值例子来直观展示性能指标和参数之间的关系。

2. 驱动系统的模型描述

考虑有工作故障的 M/M/1 重试排队系统驱动的流程模型, 关于驱动系统的假设如下:

1) 缓冲器具有无限容量, 流体到达过程服从参数为 λ 的泊松分布。

2) 缓冲器有正常忙期和故障期两个状态。在正常工作时期, 系统的服务速率为 μ , 正常工作时间服从参数为 α 的指数分布; 当系统发生故障时, 服务台并非停止服务, 而是以一个服务速率为 η ($\mu > \eta$), 且维修时间服从参数为 β 的指数分布。顾客依次到达系统, 如果顾客到达时服务台空闲, 则立刻进入服务, 如果到达时服务台繁忙, 则进入重试组, 并从重试空间发出不间断的服务请求, 相邻两次重试时间服从参数为 θ 的指数分布。规定若顾客到达时系统处于故障状态, 则不能进入系统。

3) 假设顾客到达时间间隔、系统在忙期的服务时间、故障期的服务时间、重试间隔时间都是相互独

立的, 且服务顺序为先到先服务(FCFS)。

在此排队系统中, 系统在任意时刻 t 可以用两个随机变量完全描述: $Q(t)$ 表示时刻 t 系统中的顾客数, $J(t)$ 表示 t 时刻服务台的状态, 并设

$$J(t) = \begin{cases} 0, & t \text{ 时刻服务台处于故障状态, 且服务台空闲} \\ 1, & t \text{ 时刻服务台处于故障状态, 且服务台繁忙} \\ 2, & t \text{ 时刻服务台处于正常服务状态, 且服务台空闲} \\ 3, & t \text{ 时刻服务台处于正常服务状态, 且服务台繁忙} \end{cases}$$

则系统 $\{Q(t), J(t), t \geq 0\}$ 是一个二维的连续时间马尔可夫链, 状态空间为

$$\Omega = \{(k, j) : k \geq 0, j = 0, 1, 2, 3\}$$

其状态转移图见图 1。

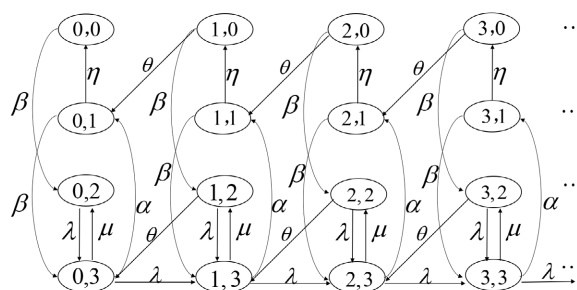


Figure 1. State transition of the queueing model
图 1. 状态转移图

根据字典排序, $(0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (1,0), (1,1), (1,2), (1,3), \dots$, 该马尔可夫过程的无穷小生成元可以写成块状雅可比矩阵

$$Q = \begin{pmatrix} A_0 & C & & & \\ B & A & C & & \\ & B & A & C & \\ & & B & A & C \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

其中

$$A_0 = \begin{pmatrix} -\beta & 0 & \beta & 0 \\ \eta & -(\beta + \eta) & 0 & \beta \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda \\ 0 & \alpha & \mu & -(\lambda + \alpha + \mu) \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} -(\beta + \theta) & 0 & \beta & 0 \\ \eta & -(\beta + \eta) & 0 & \beta \\ 0 & 0 & -(\lambda + \theta) & \lambda \\ 0 & \alpha & \mu & -(\lambda + \mu + \alpha) \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

引理 1 [7] 对于连续时间拟生灭过程 $\{Q(t), J(t)\}$, 满足条件 $R^2B + RA + C = 0$ 的最小非负解有以下显

式表达式

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & h_2 & h_3 & h_4 \end{pmatrix}$$

其中

$$h_1 = \frac{-G + \sqrt{G^2 + 4\lambda\alpha\eta^2\theta^2(\lambda + \theta + \beta)(\lambda + \theta)}}{2\eta\theta^2(\lambda + \theta + \beta)},$$

$$h_2 = \frac{\beta + \theta}{\eta}r_1,$$

$$h_3 = \frac{\lambda}{\theta}r_1,$$

$$h_4 = \frac{\lambda(\lambda + \theta)}{\mu\theta} - \frac{(\lambda + \theta + \beta)r_1}{\mu},$$

$$G = \mu\theta(\eta + \beta)(\theta + \beta) + \alpha\eta\theta(\lambda + \theta + \beta) - \lambda\eta\theta(\lambda + \theta).$$

定义关于该模型的状态转移矩阵的稳态概率为 $\pi_{kj} = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{Q(t) = k, J(t) = j\}, (k, j) \in \Omega$, 且稳态概率向量为 $\pi_k = (\pi_{k0}, \pi_{k1}, \pi_{k2}, \pi_{k3}), k \geq 0$ 。

3. 流排队模型描述

考虑带有故障和重试组的 M/M/1 排队驱动系统的流排队模型。设 $C(t)$ 表示时刻 t 的库存量, 且为非负随机变量。缓冲器的净流入率可以表示成随机过程 $\{(Q(t), J(t), C(t)), t \geq 0\}$ 的函数, 满足

$$\frac{dC(t)}{dt} = \begin{cases} \delta, & (Q(t), J(t)) = (0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), C(t) > 0, \\ 0, & (Q(t), J(t)) = (k, 0), C(t) = 0, \\ \delta_0, & (Q(t), J(t)) = (k, 0), (k, 1), k \geq 1, \\ \delta_1, & (Q(t), J(t)) = (k, 2), (k, 3), k \geq 1. \end{cases}$$

其中 $\delta < 0, \delta_0, \delta_1 > 0$, 即当驱动系统为空时, 系统中的库存量以速率 δ 减少直至为 0, 保持不变。反之, 当驱动系统非空时, 服务台处于故障期或正常工作期时, 系统中的库存量分别以 δ_0, δ_1 的速率线性增加。由于 $\{C(t), t \geq 0\}$ 的变化仅依赖于其线性速率, 且其速率的改变都依赖于过程 $\{(Q(t), J(t), C(t)), t \geq 0\}$, 因此 $\{(Q(t), J(t), C(t)), t \geq 0\}$ 是一个连续的马尔可夫过程。由于流体的变化是动态的, 为使过程达到稳态, 需要保证流体的有效净速率为负。定义服务强度为 $\rho = \lambda/\mu$, 平均漂移(Mean Drift)为 d , 且

$$d = \delta \sum_{t=0}^3 \pi_{0,t} + \delta_0 \sum_{k=1}^{\infty} \pi_{k,0} + \delta_0 \sum_{k=1}^{\infty} \pi_{k,1} + \delta_1 \sum_{k=1}^{\infty} \pi_{k,2} + \delta_1 \sum_{k=1}^{\infty} \pi_{k,3}$$

可知: 当 $\rho < 1$ 且 $d < 0$ 时, 过程 $\{(Q(t), J(t), C(t)), t \geq 0\}$ 是稳态的。定义该马尔可夫过程在 t 时刻的联合概率分布函数为

$$F_{k,j}(t, u) = P\{N(t) = k, J(t) = j, C(t) \leq u\}, k \geq 0, j = 0, 1.$$

当马尔可夫过程 $\{(Q(t), J(t), C(t)), t \geq 0\}$ 稳定时, 记其平稳随机向量为 $\{N, J, C\}$, 在稳态条件下, 令

$$\begin{aligned} F_{k,j}(u) &= \lim_{t \rightarrow \infty} P\{N(t) = k, J(t) = j, C(t) \leq u\} \\ &= P\{N = k, J = j, C(t) \leq u\}, \quad (k, j \in \Omega) \end{aligned}$$

给出库存量的平稳分布函数

$$F(u) = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{C(t) \leq u\} = \sum_{k=0}^{\infty} F_{k,0}(u) + \sum_{k=0}^{\infty} F_{k,1}(u) + \sum_{k=0}^{\infty} F_{k,2}(u) + \sum_{k=0}^{\infty} F_{k,3}(u).$$

该流排队模型的微分方程组为

$$\begin{aligned} \delta \frac{dF_{0,0}(u)}{du} &= \eta F_{0,1}(u) - \beta F_{0,0}(u), \\ \delta \frac{dF_{0,1}(u)}{du} &= \alpha F_{0,3}(u) - (\beta + \eta) F_{0,1}(u) + \theta F_{1,0}(u), \\ \delta \frac{dF_{0,2}(u)}{du} &= \beta F_{0,0}(u) - \lambda F_{0,2}(u) + \mu F_{0,3}(u), \\ \delta \frac{dF_{0,4}(u)}{du} &= \beta F_{0,1}(u) + \lambda F_{0,2}(u) - (\lambda + \mu + \alpha) F_{0,1}(u) + \theta F_{1,2}(u), \\ \delta_0 \frac{dF_{k,0}(u)}{du} &= \eta F_{k,1}(u) - (\beta + \theta) F_{k,0}(u), \quad k \geq 1, \\ \delta_0 \frac{dF_{k,1}(u)}{du} &= \theta F_{k+1,0}(u) - (\beta + \eta) F_{k,1}(u) + \alpha F_{k,3}(u), \quad k \geq 1, \\ \delta_1 \frac{dF_{k,2}(u)}{du} &= \beta F_{k,0}(u) - (\lambda + \theta) F_{k,2}(u) + \mu F_{k,3}(u), \quad k \geq 1, \\ \delta_1 \frac{dF_{k,3}(u)}{du} &= \lambda F_{k-1,3}(u) - (\lambda + \alpha + \mu) F_{k,3}(u) + \beta F_{k,1}(u) + \lambda F_{k,2}(u) + \theta F_{k+1,2}, \quad k \geq 1. \end{aligned} \quad (1)$$

方程组的边界条件为

$$F_{0,0}(0) = a, \quad F_{k,j}(0) = 0, \quad (k, j) \in \Omega / (0, 0) \quad (2)$$

为了确定常数 a 的值, 将上述常微分方程组相加, 得到

$$\delta \sum_{i=0}^3 \frac{dF_{0,i}(u)}{du} + \delta_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{dF_{k,0}(u)}{du} + \delta_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{dF_{k,1}(u)}{du} + \delta_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{dF_{k,2}(u)}{du} + \delta_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{dF_{k,3}(u)}{du} = 0$$

将上述等式左右两边从 0 到 ∞ 积分可得

$$\begin{aligned} &\delta(F_{0,0}(\infty) - F_{0,0}(0)) + \delta(F_{0,1}(\infty) - F_{0,1}(0)) + \delta(F_{0,2}(\infty) - F_{0,2}(0)) \\ &+ \delta(F_{0,3}(\infty) - F_{0,3}(0)) + \delta_0 \sum_{k=1}^{\infty} (F_{k,0}(\infty) - F_{k,0}(0)) + \delta_0 \sum_{k=1}^{\infty} (F_{k,1}(\infty) - F_{k,1}(0)) \\ &+ \delta_1 \sum_{k=1}^{\infty} (F_{k,2}(\infty) - F_{k,2}(0)) + \delta_1 \sum_{k=1}^{\infty} (F_{k,3}(\infty) - F_{k,3}(0)) = 0 \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned} F_{k,j}(\infty) &= \lim_{t \rightarrow \infty} P\{N(t) = k, J(t) = j, C(t) \leq \infty\} \\ &= P\{N = k, J = j\} = \pi_{kj}, \quad (k, j \in \Omega) \end{aligned}$$

利用边界条件(2), 将微分方程组(1)相加可得

$$\delta(\pi_{0,0} - a) + \delta\pi_{0,1} + \delta\pi_{0,2} + \delta\pi_{0,3} + \delta_0 \sum_{k=1}^{\infty} \pi_{k,0} + \delta_0 \sum_{k=1}^{\infty} \pi_{k,1} + \delta_1 \sum_{k=1}^{\infty} \pi_{k,2} + \delta_1 \sum_{k=1}^{\infty} \pi_{k,3} = 0,$$

经过化简得到

$$a = \frac{\delta\pi_{0,0} + \delta\pi_{0,1} + \delta\pi_{0,2} + \delta\pi_{0,3} + \delta_0 \sum_{k=1}^{\infty} \pi_{k,0} + \delta_0 \sum_{k=1}^{\infty} \pi_{k,1} + \delta_1 \sum_{k=1}^{\infty} \pi_{k,2} + \delta_1 \sum_{k=1}^{\infty} \pi_{k,3}}{\delta} = \frac{d}{\delta}.$$

4. 流模型的性能分析

上述常微分方程组(1)可以用矩阵形式表达为

$$\frac{d}{du}(\mathbf{F}_0(u), \mathbf{F}_1(u), \mathbf{F}_2(u), \dots) \mathbf{H} = (\mathbf{F}_0(u), \mathbf{F}_1(u), \mathbf{F}_2(u), \dots) \mathbf{Q},$$

其中

$$\mathbf{H} = \text{diag}(\delta, \delta, \delta, \delta, \delta_0, \delta_0, \delta_1, \delta_1, \delta_0, \delta_0, \delta_1, \delta_1, \dots),$$

$$\mathbf{F}_k(u) = (F_{k0}(u), F_{k1}(u), F_{k2}(u), F_{k3}(u)), k \geq 0$$

定义函数 $F_{kj}(u)$ 的拉普拉斯变换为

$$\hat{F}_{kj}(u) = \int_0^{\infty} e^{-su} F_{kj}(u) du, s \geq 0, (k, j) \in \Omega$$

代入公式对两边进行 LST (拉普拉斯 - 斯蒂尔切斯) 变换, 得到

$$(\hat{\mathbf{F}}_0(u), \hat{\mathbf{F}}_1(u), \hat{\mathbf{F}}_2(u), \hat{\mathbf{F}}_3(u), \dots)(\mathbf{Q} - s\mathbf{H}) = (-a\delta, 0, 0, 0, \dots),$$

根据边界条件(2)上述等式成立。在状态转移矩阵中我们定义

$$\mathbf{A}(s) = \begin{pmatrix} -(\beta + \theta + s\delta_0) & 0 & \beta & 0 \\ \eta & -(\beta + \eta + s\delta_0) & 0 & \beta \\ 0 & 0 & -(\lambda + \theta + s\delta_1) & \lambda \\ 0 & \alpha & \mu & -(\lambda + \mu + \alpha + s\delta_1) \end{pmatrix}$$

定理 1 对于 $s \geq 0$, 矩阵方程 $\mathbf{R}^2(s)\mathbf{B} + \mathbf{R}(s)\mathbf{A}(s) + \mathbf{C} = 0$ 有最小非负解

$$\mathbf{R}(s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \end{pmatrix}$$

其中

$$r_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}},$$

$$r_2 = \frac{\beta + \theta + s\delta_0}{\eta} r_1,$$

$$r_3 = \left(\frac{\mu(\eta + \beta + s\delta_0)(\beta + \theta + s\delta_0)}{(\lambda + \theta + s\delta_1)(\eta\theta r_1 + \alpha\eta)} + \beta \right) r_1,$$

$$r_4 = \frac{(\eta + \beta + s\delta_0)(\beta + \theta + s\delta_0)}{\eta\theta r_1 + \alpha\eta} r_1.$$

$$q = \frac{(-\alpha\eta(\lambda + \mu + \alpha + s\delta_1)WV + \lambda\alpha^2\eta^2)}{\{\beta\eta\theta^2[(V+1)W + \lambda\eta]\}} + \frac{2\left[\theta\eta\alpha\beta W(V+2) + \lambda\eta^2\theta(2\alpha\beta + \theta) + \frac{\mu\theta WV(WV + \lambda\eta)}{\lambda + \theta + s\delta_1}\right]^3}{27\{\beta\eta\theta^2[(V+1)W + \lambda\eta]\}^3}$$

$$p = \frac{\left[\theta\eta\alpha\beta W(V+2) + \lambda\eta^2\theta(2\alpha\beta + \theta) + \frac{\mu\theta WV(WV + \lambda\eta)}{\lambda + \theta + s\delta_1}\right]\left[\eta\alpha^2\beta(\lambda\eta + W) - \theta\beta(\lambda + \mu + \alpha + s\delta_1)WV + 2\lambda\alpha\eta^2\theta + \frac{\lambda\alpha\mu\eta WV}{\lambda + \theta + s\delta_1}\right]}{3\{\beta\eta\theta^2[(V+1)W + \lambda\eta]\}^2}$$

$$p = \frac{\left[\eta\alpha^2\beta(\lambda\eta + W) - \theta\beta(\lambda + \mu + \alpha + s\delta_1)WV + 2\lambda\alpha\eta^2\theta + \frac{\lambda\alpha\mu\eta WV}{\lambda + \theta + s\delta_1}\right]}{\{\beta\eta\theta^2[(V+1)W + \lambda\eta]\}}$$

$$p = \frac{\left[\theta\eta\alpha\beta W(V+2) + \lambda\eta^2\theta(2\alpha\beta + \theta) + \frac{\mu\theta WV(WV + \lambda\eta)}{\lambda + \theta + s\delta_1}\right]^2}{3\{\beta\eta\theta^2[(V+1)W + \lambda\eta]\}^2}$$

证明 由于矩阵 C 只有最后一行有元素, 根据矩阵的运算法则, 矩阵 $R(s)$ 有以下结构

$$R(s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \end{pmatrix}$$

将矩阵方程 $R^2(s)B + R(s)A(s) + C = 0$ 展开可得到以下方程组

$$\begin{cases} -(\beta + \theta + s\delta_0)r_1 + \eta r_2 = 0 \\ \theta r_1 r_4 - (\eta + \beta + s\delta_0)r_2 + \alpha r_4 = 0 \\ \beta r_1 - (\lambda + \theta + s\delta_1)r_3 + \mu r_4 = 0 \\ \theta r_3 r_4 + \beta r_2 + \lambda r_3 - (\lambda + \mu + \alpha + s\delta_1)r_4 + \lambda = 0 \end{cases}$$

通过简单运算得到关于 r_1 的方程如下

$$\begin{aligned} & \left[\theta\eta\alpha\beta W(V+2) + \lambda\eta^2\theta(2\alpha\beta + \theta) + \frac{\mu\theta WV(WV + \lambda\eta)}{\lambda + \theta + s\delta_1}\right]r_1^2 \\ & + \left[\eta\alpha^2\beta(\lambda\eta + W) - \theta\beta(\lambda + \mu + \alpha + s\delta_1)WV + 2\lambda\alpha\eta^2\theta + \frac{\lambda\alpha\mu\eta WV}{\lambda + \theta + s\delta_1}\right]r_1 \\ & + \beta\eta\theta^2[(V+1)W + \lambda\eta]r_1^3 - \alpha\eta(\lambda + \mu + \alpha + s\delta_1)WV + \lambda\alpha^2\eta^2 = 0. \end{aligned}$$

其中 $V = \eta + \beta + s\delta_0$, $W = \beta + \theta + s\delta_0$. 解此一元三次方程, 其中判别式 $\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 > 0$, 因此原方程有两个虚数根和一个实数根, 根据求根公式, **定理 1** 得证. 注意, 当 $s \rightarrow 0$ 时, $R(s) \rightarrow R$, 在此基础上, 我们可以类似得到 $\hat{F}_k(s) (k \geq 0)$ 的表达式.

定理 2 当 $d < 0$, $\rho < 1$ 时, $\hat{F}_k(s) (k \geq 0)$ 满足

$$\begin{cases} \hat{F}_0(s) = (\hat{F}_{00}(s), \hat{F}_{01}(s), \hat{F}_{02}(s), \hat{F}_{03}(s)), \\ \hat{F}_k(s) = \hat{F}_0(s)R^k(s), k \geq 1. \end{cases}$$

其中 $\mathbf{R}(s)$ 由矩阵方程 $\mathbf{R}^2(s)\mathbf{B} + \mathbf{R}(s)\mathbf{A}(s) + \mathbf{C} = 0$ 确定, 且满足

$$\begin{aligned} \hat{F}_{00}(s) &= \frac{a\delta\{\theta\beta(\lambda+s\delta)r_1 + \theta(\beta+\eta+s\delta)(\lambda+s\delta)r_3 - \alpha s\delta(\lambda+\eta+s\delta) - \lambda\alpha\eta + T_1\}}{\theta\beta[\lambda\eta+T_2]r_1 + \theta(\beta+\eta+s\delta)T_2r_3 + \alpha s\delta[(\beta+s\delta)+\lambda+T_2] + (\beta+s\delta)T_1} \\ T_1 &= -(\beta+\eta+s\delta)[(\lambda+s\delta)^2 + \mu s\delta] \\ T_2 &= (\beta+s\delta)(\lambda+s\delta) \\ \hat{F}_{01}(s) &= \frac{(\beta+s\delta)\hat{F}_{00}(s) - a\delta}{\eta}, \\ \hat{F}_{02}(s) &= \frac{\beta}{\lambda+s\delta}\hat{F}_{00}(s) + \frac{\mu(\beta+\eta+s\delta)[(\beta+s\delta)\hat{F}_{00}(s) - a\delta]}{\eta(\lambda+s\delta)(\alpha+\theta r_1)}, \\ \hat{F}_{03}(s) &= \frac{(\beta+\eta+s\delta)[(\beta+s\delta)\hat{F}_{00}(s) - a\delta]}{\eta(\alpha+\theta r_1)}. \end{aligned} \tag{3}$$

证明 微分方程可以写成以下等价方程组

$$\begin{aligned} \hat{F}_0(s)\mathbf{A}_0(s) + \hat{F}_1(s)\mathbf{B} &= (-a\delta, 0, 0, 0) \\ \hat{F}_{k-1}(s)\mathbf{C} + \hat{F}_k(s)\mathbf{A}(s) + \hat{F}_{k+1}(s)\mathbf{B} &= 0, \quad k \geq 1 \end{aligned}$$

其中

$$\mathbf{A}_0(s) = \begin{pmatrix} -(\beta+s\delta) & 0 & \beta & 0 \\ \eta & -(\beta+\eta+s\delta) & 0 & \beta \\ 0 & 0 & -(\lambda+s\delta) & \lambda \\ 0 & \alpha & \mu & -(\lambda+\alpha+\mu+s\delta) \end{pmatrix}$$

根据矩阵几何解, 可以得到

$$\begin{aligned} \hat{F}_k(s) &= \hat{F}_0(s)\mathbf{R}^k(s), \quad k \geq 1, \\ (\hat{F}_0(s), \hat{F}_1(s))\mathbf{B}[R] &= (-a\delta, 0, 0, 0). \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{B}[R] &= \mathbf{A}_0(s) + R(s)\mathbf{B} \\ &= \begin{pmatrix} -(\beta+s\delta) & 0 & \beta & 0 \\ \eta & -(\beta+\eta+s\delta) & 0 & \beta \\ 0 & 0 & -(\lambda+s\delta) & \lambda \\ 0 & \alpha+\theta r_1 & \mu & -(\lambda+\alpha+\mu+s\delta)+\theta r_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

展开上式方程

$$\begin{cases} -(\beta+s\delta)\hat{F}_{00}(s) + \eta\hat{F}_{01}(s) = -a\delta, \\ -(\beta+\eta+s\delta)\hat{F}_{01}(s) + (\alpha+\theta r_1)\hat{F}_{03}(s) = 0, \\ \beta\hat{F}_{00}(s) - (\lambda+s\delta)\hat{F}_{02}(s) + \mu\hat{F}_{03}(s) = 0, \\ \beta\hat{F}_{01}(s) + \lambda\hat{F}_{02}(s) + [\theta r_3 - (\lambda+\alpha+\mu+s\delta)]\hat{F}_{03}(s) = 0. \end{cases}$$

通过求解上述四元一次方程组可得**定理 2**。下面计算系统中库存量的 LT (拉普拉斯变换), 通过全概

率公式可以得到

$$\hat{F}(s) = \int_0^\infty e^{-su} F(u) du = \hat{F}_0(s)(I - R(s))^{-1} e \tag{4}$$

其中 I 是一个单位矩阵, e 是二维的单位列向量。根据定理 1 的分析, 矩阵 $R(s)$ 的谱半径 $\max(r_1(s), r_2(s)) < 1$, 因此 $I - R(s)$ 是可逆的, 可得

$$(I - R(s))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{r_1}{1-r_4} & \frac{r_2}{1-r_4} & \frac{r_3}{1-r_4} & \frac{1}{1-r_4} \end{pmatrix}$$

代入表达式(4)中, 可以得到

$$\hat{F}(s) = \hat{F}_{00}(s) + \hat{F}_{01}(s) + \hat{F}_{02}(s) + \frac{1+r_1+r_2+r_3}{1-r_4} \hat{F}_{03}(s)$$

现在计算平均库存量, 定义联合分布函数 $F_{ki}(u)$ 的 LST 变换为

$$f_{ki}^*(s) = \int_0^\infty e^{-su} dF_{ki}(u), (k, i) \in \Omega$$

设 $f^*(s)$ 为平稳库存量的 LST, 可得

$$f^*(s) = \int_0^\infty e^{-su} dF(u) = s\hat{F}(s),$$

在计算平稳库存量的期望时, 显然

$$E(C) = -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} f^*(s) = -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} s\hat{F}(s) \tag{5}$$

由于 $\hat{F}(s)$ 的导数为—常数, 因此 $\lim_{s \rightarrow 0} s\hat{F}'(s) = 0$, 故

$$\begin{aligned} E(C) &= -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} s\hat{F}(s) = -\lim_{s \rightarrow 0} [\hat{F}(s) + s\hat{F}'(s)] \\ &= \frac{\mu(\beta + \eta)a\delta}{\lambda\eta(\alpha + \theta r_1)} - \frac{a\delta}{\eta} + \frac{(\beta + \eta)(\eta + \eta + \beta + \theta r_1 + \eta r_3)a\delta}{\eta^2(\alpha + \theta r_1) - (\eta + \beta)(\beta + \theta) r_1} \\ &\quad + \frac{a\delta\{\theta\beta r_1 + \theta(\beta + \eta)r_3 - (\beta + \eta)\lambda - \alpha\eta\}}{\lambda\eta(\eta + \beta)\{\theta(r_1 + r_3) - \lambda\}} [(\lambda + \eta) + 1] \\ &\quad + \frac{a\delta\{\theta\beta r_1 + \theta(\beta + \eta)r_3 - (\beta + \eta)\lambda - \alpha\eta\}}{\eta\{\theta(r_1 + r_3) - \lambda\}} \frac{\eta + \eta + \beta + \theta r_1 + \eta r_3}{\eta(\alpha + \theta r_1) - (\eta + \beta)(\beta + \theta) r_1} \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} r_1' &= \sqrt[3]{-\frac{\varphi'}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varphi'}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma'}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{\varphi'}{2} - \sqrt{\left(\frac{\varphi'}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma'}{3}\right)^3}} \\ r_3' &= \left(\frac{\mu(\eta + \beta)(\beta + \theta)}{(\lambda + \theta)(\eta\theta r_1 + \alpha\eta)} + \beta\right) r_1' \\ \omega' &= (\eta + \beta)(\beta + \theta) \end{aligned}$$

$$\sigma' = \frac{\left[\eta\alpha^2\beta(\lambda\eta + \beta + \theta) - \theta\beta(\lambda + \mu + \alpha)\omega' + 2\lambda\alpha\eta^2\theta + \frac{\lambda\alpha\mu\eta\omega'}{\lambda + \theta} \right]}{\beta\eta\theta^2[\omega' + \beta + \theta + \lambda\eta]}$$

$$\varphi' = \frac{(-\alpha(\lambda + \mu + \alpha)\omega' + \lambda\alpha^2\eta)}{\beta\theta^2(\omega' + \beta + \theta + \lambda\eta)} + \frac{2\left[\theta\alpha\eta\beta(\omega' + 2\beta + 2\theta + 2\lambda\eta) + \lambda\eta^2\theta^2 + \frac{\mu\theta\omega'(\omega' + \lambda\eta)}{\lambda + \theta} \right]^3}{27[\beta\eta\theta^2(\omega' + \beta + \theta + \lambda\eta)]^3}$$

$$\frac{\left[\alpha\beta(\omega' + 2\beta + 2\theta + 2\lambda\eta) + \lambda\eta\theta + \frac{\mu\omega'(\omega' + \lambda\eta)}{\eta(\lambda + \theta)} \right] \left[\alpha^2(\lambda\eta + \beta + \theta) - \frac{\theta(\lambda + \mu + \alpha)\omega'}{\eta} + \frac{\lambda\alpha(2\eta^2\theta + \mu\omega')}{\beta(\lambda + \theta)} \right]}{3\beta\theta(\omega' + \beta + \theta + \lambda\eta)^2}$$

5. 数值例子

本节将通过数值例子对上述所得的参数灵敏度进行分析。

如图 2, 当 $\lambda=1, \alpha=0.3, \beta=0.4, \theta=0.5, \delta=-5, \delta_0=2, \delta_1=3$ 时, 随着 μ 的变化, 系统在故障期的服务率 η 和库存量 $E(C)$ 之间的变化趋势, 由图可知 $E(C)$ 随着 η 的增加而减小, 即随着故障期的服务速率增加, 系统中的库存量减小。

如图 3, 当 $\eta=1, \alpha=0.3, \beta=0.4, \theta=0.5, \delta=-5, \delta_0=2, \delta_1=3$ 时, μ 分别取 1.4, 1.5, 1.6 时, 随着 μ 的增加, 系统的最大库存量也随之增加。同时, 库存量 $E(C)$ 随着顾客到达率 λ 的增加而增加。

如图 4, 当 $\lambda=1, \eta=1, \alpha=0.3, \theta=0.5, \delta=-5, \delta_0=2, \delta_1=3$ 时, μ 分别取 1.2, 1.3, 1.4 时, 随着 μ 的增加, 系统的最大库存量也随之增加。同时, 库存量 $E(C)$ 随着系统故障维修期 β 的增加而减少。从实际情况来看, 维修需要的时间越长, 系统中能够容纳的最多顾客数越少, 因此符合实际情况。

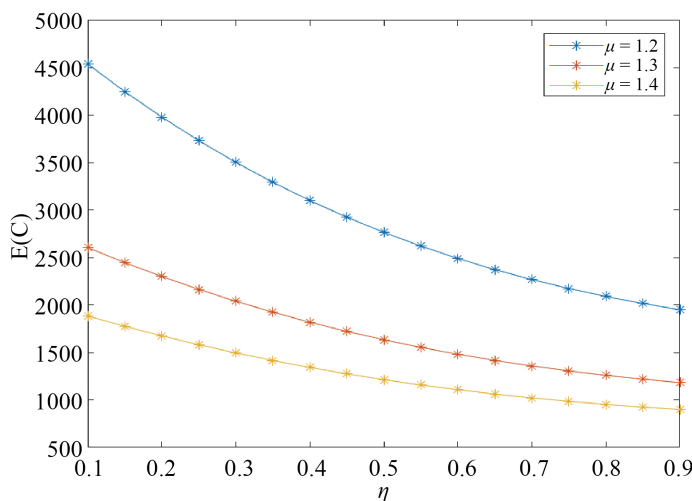


Figure 2. $E(C)$ versus η
图 2. $E(C)$ 随 η 的变化曲线

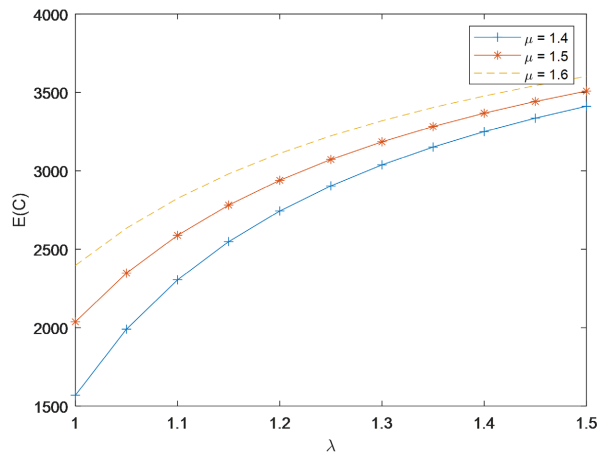


Figure 3. $E(C)$ versus λ
 图 3. $E(C)$ 随 λ 的变化曲线

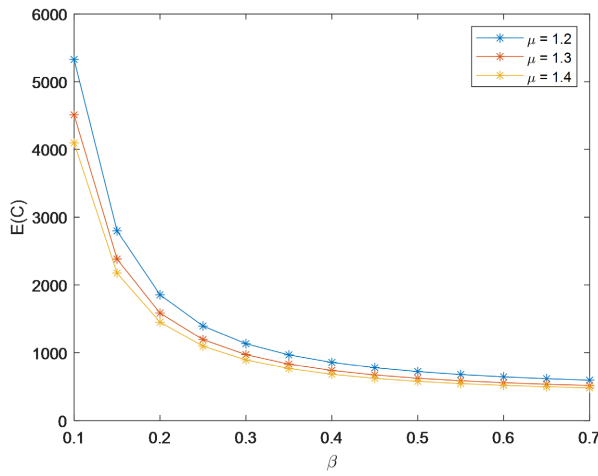


Figure 4. $E(C)$ versus β
 图 4. $E(C)$ 随 β 的变化曲线

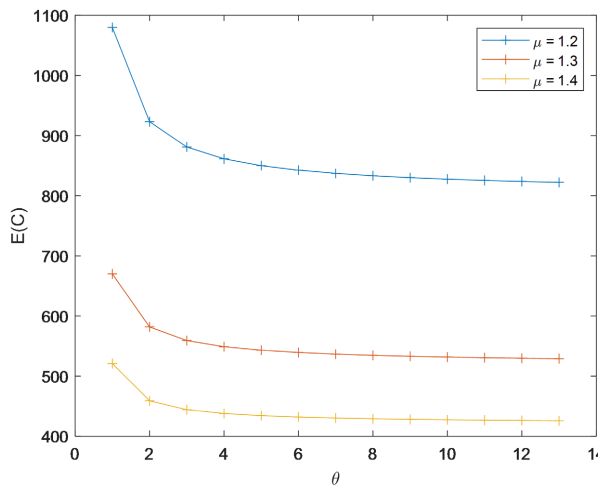


Figure 5. $E(C)$ versus θ
 图 5. $E(C)$ 随 θ 的变化曲线

如图 5, 当 $\lambda=1$, $\eta=1$, $\alpha=0.3$, $\beta=0.4$, $\delta=-5$, $\delta_0=2$, $\delta_1=3$ 时, μ 分别取 1.2, 1.3, 1.4 时, 随着 μ 的增加, 系统的最大库存量也随之增加。同时, 库存量 $E(C)$ 随着重试组发出服务请求概率 θ 的增加而减少。从实际情况来看, 相隔两次发出重试服务的时间越长, 总服务时间越长, 系统容纳的顾客数越少, 符合实际情况。

6. 结论

本文研究了带有工作故障和重试排队系统的 M/M/1 排队驱动系统的流模型。基于矩统的稳态库存量的 LST 及其均值表达式。最后通过数值例子说明不同参数对各项性能指标的影响。

基金项目

国家自然科学基金青年项目(11901307), 江苏省青年基金项目(BK20180783)。

参考文献

- [1] Kerner, Y. and Shmuel-Bittner, O. (2020) Strategic Behavior and Optimization in a Hybrid M/M/1 Queue with Retrials. *Queueing Systems*, **96**, 285-302. <https://doi.org/10.1007/s11134-020-09672-w>
- [2] Wang, J.T., Zhang, X.L. and Huang, P. (2017) Strategic Behavior and Social Optimization in a Constant Retrial Queue with the N-Policy. *European Journal of Operational Research*, **256**, 841-849. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2016.06.034>
- [3] Thiruvengadam, K. (1963) Queuing with Breakdowns. *Operations Research*, **11**, 62-71. <https://doi.org/10.1287/opre.11.1.62>
- [4] Kalidass, K. and Kasturi, R. (2012) A Queue with Working Breakdowns. *Computers & Industrial Engineering*, **63**, 779-783. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2012.04.018>
- [5] 张淞钰, 徐秀丽. 具有两类平行顾客的不完全故障排队系统均衡分析[J]. *系统科学与数学*, 2019, 39(4): 637-647.
- [6] Vijayalakshmi, V., Kalidass, K. and Deepa, B. (2021) Cost Analysis of M/M/1/N Queue with Working Breakdowns and a Two-Phase Service. *Journal of Physics: Conference Series*, **5**, 12-26. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1850/1/012026>
- [7] 荆彤, 叶晴晴, 张晓亮, 等. 带有工作故障与顾客止步的 M/M/1 重试排队性能分析[J]. *重庆师范大学学报(自然科学版)*, 2020, 37(5): 9. <https://doi.org/10.11721/cqnj20200511>