Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2022, 11(4), 1945-1954
Published Online April 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.114211

Hans汉斯

可压缩磁流体动力学方程组密度的上界估计

贡曲杰[1]，王建国[2]

[1]中央民族大学理学院，北京
[2]北京建筑大学附属中学，北京

收稿日期：2022年3月20日；录用日期：2022年4月14日；发布日期：2022年4月22日

摘　要

本文证明了具有大初值的一维可压缩磁流体动力学(MHD)方程组的初边值问题的密度具有正上界。在无穷远处存在真空的情况下，利用精确的能量估计和方程结构可以得到方程组的密度具有正上界。

关键词

可压缩磁流体动力学，整体适定性，真空

Upper Bound Estimation of Density for Compressible Magnetohydrodynamic Equations

Qujie Gong[1], Jianguo Wang[2]

[1]College of Science, Minzu University of China, Beijing
[2]Middle School Affiliated to Beijing University of Civil Engineering and Architecture, Beijing

Received: Mar. 20th, 2022; accepted: Apr. 14th, 2022; published: Apr. 22nd, 2022

Abstract

In this paper, we prove that the density of the initial boundary value problem of one-dimensional compressible MHD equations with large initial values has a positive upper bound. In the case of vacuum at infinity, the density of the equations has a positive upper bound using accurate energy estimation and the structure of the equations.

文章引用: 贡曲杰, 王建国. 可压缩磁流体动力学方程组密度的上界估计[J]. 应用数学进展, 2022, 11(4): 1945-1954. DOI: 10.12677/aam.2022.114211

Keywords

Compressible Magnetohydrodynamics, Global Well-Posedness, Vacuum

1. 引言

磁流体动力学方程组在现代偏微分方程研究中起着桥梁的作用，它是流体动力学与电动力学的交叉学科，是由流体力学方程和电磁学方程共同组成的。美日等航空航天大国对磁流体动力学的研究开展较早且理论和实际应用较全面，而国内该研究主要集中于数值仿真，实验方面近几年才开始入手，总体来说与其他国家先进水平存在一定的差距。因此研究磁流体动力学有着很大的意义。从 1930 年法国数学家 Jean-Leray 给出了不可压缩流体方程组弱解的整体存在性以来，数学家和物理学家先后建立了各种各样的数学模型，关心的问题是相变的数学机理、解的奇性、动力学方程组解的整体存在性和正则性以及奇性的动力学。其中基本问题即解的适定性和渐近性态问题一直以来为非线性偏微分方程研究者所热衷的问题。本课题研究的成果对于证明此方程组的各种问题有很大的帮助。

欧拉坐标系下的平面可压缩磁流体动力学(MHD)方程组如下(见[1] [2])：

$$\begin{cases}\tilde{\rho}_t+\left(\tilde{\rho}\tilde{u}\right)_x=0,\\ \left(\tilde{\rho}\tilde{u}\right)_t+\left(\tilde{\rho}\left(\tilde{u}\right)^2+\tilde{p}+\dfrac{1}{8\pi}\left|\tilde{\boldsymbol{b}}\right|^2\right)_x=\left(\lambda\tilde{u}_x\right)_x,\\ \left(\tilde{\rho}\tilde{\boldsymbol{w}}\right)_t+\left(\tilde{\rho}\tilde{u}\tilde{\boldsymbol{w}}-\dfrac{1}{4\pi}\tilde{\boldsymbol{b}}\right)_x=\left(\mu\tilde{\boldsymbol{w}}_x\right)_x,\\ \tilde{\boldsymbol{b}}_t+\left(\tilde{u}\tilde{\boldsymbol{b}}-\tilde{\boldsymbol{w}}\right)_x=\left(\nu\tilde{\boldsymbol{b}}_x\right)_x,\\ \tilde{\mathcal{E}}_t+\left(\tilde{u}\left(\tilde{\mathcal{E}}+\tilde{p}+\dfrac{1}{8\pi}\left|\tilde{\boldsymbol{b}}\right|^2\right)-\dfrac{1}{4\pi}\tilde{\boldsymbol{w}}\cdot\tilde{\boldsymbol{b}}\right)_x=\left(\lambda\tilde{u}\tilde{u}_x+\mu\tilde{\boldsymbol{w}}\cdot\tilde{\boldsymbol{w}}_x+\dfrac{\nu}{4\pi}\tilde{\boldsymbol{b}}\cdot\tilde{\boldsymbol{b}}_x+\kappa\tilde{\theta}_x\right)_x,\end{cases}\tag{1.2}$$

其中 $(t,x)\in(0,T)\times\Omega$，$\Omega=(0,L)$ 是 $\mathbb{R}$ 中的一个区域，$t\geq 0$ 为时间，x 为欧拉坐标，未知函数 $\tilde{\rho}$，$u\in\mathbb{R}^3$，$\tilde{\boldsymbol{w}}=(w_1,w_2)\in\mathbb{R}^2$，$\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)\in\mathbb{R}^2$，$p$ 和 θ 分别表示流体的密度、纵向速度、横向速度、横向磁场、压力和温度。λ 和 μ 为黏性系数。参数 ν 为磁场的磁扩散系数，热传导系数 $\kappa\geq 0$，$\tilde{\mathcal{E}}$ 为平面磁流体流动力学的总能量，即

$$\tilde{\mathcal{E}}=\tilde{\rho}\left(\tilde{e}+\frac{1}{2}\left(\tilde{u}^2+\left|\tilde{\boldsymbol{w}}\right|^2\right)\right)+\frac{1}{8\pi}\left|\tilde{\boldsymbol{b}}\right|^2.$$

其中(1.1)表示内能。

本文主要研究(1.1)的一个初边值问题。理想气体和内能的状态方程为

$$\tilde{p}=\tilde{p}\left(\tilde{\rho},\tilde{\theta}\right)=R\tilde{\rho}\tilde{\theta},\quad \tilde{e}=\tilde{e}\left(\tilde{\rho},\tilde{\theta}\right)=C_v\tilde{\theta}=\frac{R\tilde{\theta}}{\gamma-1}.$$

其中 R 是正常数，C_v 是气体在恒容下的热容。

当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{w}\equiv 0$ 时，(1.1)简化为一维可压缩的 Navier-Stokes 方程。Kazhiklov 和 Shelukhin 在[3]中，证明了初边值问题整体解的存在性和唯一性，其中密度上下界的思想一直沿用至今。李和梁在[4]中研究了初边值问题和解的大时间行为，证明了温度的上下界与时间和空间无关。最近，李和辛[5]中证明了一维无热传导可压缩 Navier-Stokes 方程的 Cauchy 问题，即当初始密度只在无穷远处含有真空，且在无穷远处衰减率适当慢时，理想气体可以保持熵的一致有界性。李和辛在[6]在具有热传导的 Navier-Stokes 方程中证明了类似的结果。

可压缩磁流体动力学已得到广泛的研究。用 Hoff 和 Tsyganov 在[7]中证明了弱解的唯一性和对初始值的连续依赖性，Ducomet 和 Feireisl 在[8]中证明了磁流体动力学方程整体时间弱解的存在性。Ye 和 Li [9]通过加权估计证明了具有磁扩散的等熵平面 MHD 方程组 Cauchy 问题的大强解的存在性，Jang 和 Zhang 在[10]中证明了一维初边值问题大强解的存在性。在[11]中，Tan 和 Wang 讨论了平稳问题解的正则性和唯一性，并研究了这类弱解的大时间行为。在 γ 充分接近 1 的条件下，Hu [12]证明了大初值平面磁流体动力学方程组整体解的存在性和渐近性。对于某 $q\ge 2$ 和 $\kappa(\rho,\theta)$，满足

$$C^{-1}\left(1+\theta^{q}\right)\le\kappa(\rho,\theta)\le C\left(1+\theta^{q}\right),$$

且大初始值满足

$$0<\inf\rho_0\le\rho_0(x)\le\sup\rho_0<\infty,\quad \rho_0,u_0,\boldsymbol{b}_0,\boldsymbol{w}_0,\theta_0\in H^1(\Omega).$$

Chen 和 Wang [13]研究了 MHD 大解的唯一性、存在性和连续依赖性。Chen 和 Wang 在[14]中证明了具有不连续初始值的自由边值问题的弱解。Fan 和 Hu 在[15]中当 $\nu=0$ 和 $\rho_0\ge 0$，以及对于任意 $q>0$，热传导系数 κ 满足以下条件时，证明了相似的结果。

$$\kappa\in C^2[0,\infty),\ C^{-1}\left(1+\theta^{q}\right)\le\kappa(\rho,\theta)\le C\left(1+\theta^{q}\right)$$

且初始值 $(\rho_0,u_0,\boldsymbol{b}_0,\theta_0)$ 满足

$$\rho_0>0,\ \theta_0>0,\ \rho_0,u_0,\boldsymbol{b}_0,\theta_0\in H^2(\Omega),\ \left.(u_0,\theta_0')\right|_{\partial\Omega}=0$$

对于任意正常数 C 满足 $|b_0|\le C\rho_0$，具有相容条件如下：

$$u_0''-\left(\rho_0\theta_0+\frac{1}{2}|\boldsymbol{b}_0|^2\right)'=\sqrt{\rho_0}\,g_1$$

$$\left(\kappa(\theta_0)\theta_0'\right)'+|u_0'|^2=\sqrt{\rho_0}\,g_2$$

其中任意 $g_1,g_2\in L^2(\Omega)$。

Kawashima 和 Okanda 在[16]中解决了小初始值的整体光滑的存在性。李和李[17]将柯西问题转化为无热传导系数的平面非典阻性磁流体动力学方程组，并建立了具有大初始值的强解的整体适定性。后来被很多数学家所认可。Yu 在[18]中建立的一维零磁电阻率可压缩磁流体力学方程组初边值问题经典解的整体时间存在唯一性，可以参见 Fan 和 Yu [19]以及其中的参考文献。

本文首先得到了包含粘性耗散效应的基本能量估计，这对于推导密度的下界具有重要意义，这个的主要灵感来自于 Kazhiklov 和 Selukhin 文章[3]。其次得出密度的正上界估计。

2. 重新推导拉格朗日坐标下的方程及主要定理

在本节中，我们根据 Li-xin [5] [6]，Li-Li [17]，Li [20] [21]的思想来重新定义拉格朗日坐标下的方程组(1.1)。我们假设 y 为拉格朗日坐标，则定义拉格朗日坐标 y 和欧拉坐标 x 之间的坐标变换作为

$$x=\eta(y,t)$$

其中$\eta(y,t)$是由$\tilde{u}$决定的 flow map，即，

$$\begin{cases}\partial_t\eta(y,t)=\tilde{u}(\eta(y,t),t),\\ \eta(y,0)=y.\end{cases} \tag{2.1}$$

我们令$\rho,u,\boldsymbol{b},\boldsymbol{w},\theta$和$p$分别为拉格朗日坐标下的密度，速度，横向速度，横向磁场，温度和压强，并定义

$$\rho(y,t)=\tilde{\rho}(\eta(y,t),t),\ \boldsymbol{b}(y,t)=\tilde{\boldsymbol{b}}(\eta(y,t),t),\ u(y,t)=\tilde{u}(\eta(y,t),t),$$

$$\theta(y,t)=\tilde{\theta}(\eta(y,t),t),\ \boldsymbol{w}(y,t)=\tilde{\boldsymbol{w}}(\eta(y,t),t),\ p(y,t)=\tilde{p}(\eta(y,t),t).$$

我们回顾$\eta(y,t)$的定义，通过简单的计算，可以得到

$$\left(\tilde{u}_x,\tilde{\theta}_x,\tilde{\boldsymbol{w}}_x,\tilde{\boldsymbol{b}}_x,\tilde{p}_x\right)=\left(\frac{u_y}{\eta_y},\frac{\theta_y}{\eta_y},\frac{\boldsymbol{w}_y}{\eta_y},\frac{\boldsymbol{b}_y}{\eta_y},\frac{p_y}{\eta_y}\right),\ \left(\tilde{u}_{xx},\tilde{\boldsymbol{w}}_{xx}\right)=\left(\frac{1}{\eta_y}\left(\frac{u_y}{\eta_y}\right),\frac{1}{\eta_y}\left(\frac{\boldsymbol{w}_y}{\eta_y}\right)\right),$$

和

$$\tilde{\rho}_t+\tilde{u}\tilde{\rho}_x=\rho_t,\ \tilde{u}_t+\tilde{u}\tilde{u}_x=u_t,\ \tilde{p}_t+\tilde{u}\tilde{p}_x=p_t,$$

$$\tilde{\boldsymbol{b}}_t+\tilde{u}\tilde{\boldsymbol{b}}_x=\boldsymbol{b}_t,\ \tilde{\boldsymbol{w}}_t+\tilde{u}\tilde{\boldsymbol{w}}_x=\boldsymbol{w}_t,\ \tilde{\theta}_t+\tilde{u}\tilde{\theta}_x=\theta_t.$$

我们根据 Li-xin [5] [6]，Li-Li [17]，Li [20] [21]的思想定义了一个新的函数$J=J(y,t)$，则欧拉坐标和拉格朗日坐标之间的雅可比矩阵如下

$$J(y,t)=\eta_y(y,t)$$

进一步得到

$$J_t=u_y. \tag{2.2}$$

我们将$(1.1)_1$在拉格朗日坐标下可以写为

$$\rho_t+\frac{u_y}{J}\rho=0 \tag{2.3}$$

利用上面的等式，我们把$(1.1)_2$可以写成以下形式

$$\rho u_t+\frac{p_y}{J}+\frac{1}{8\pi}\frac{\left(|\boldsymbol{b}|^2\right)_y}{J}=\frac{\lambda}{J}\left(\frac{u_y}{J}\right)_y. \tag{2.4}$$

同理，方程组$(1.1)_3$~$(1.1)_5$在拉格朗日坐标下可写为

$$\begin{cases}\rho\boldsymbol{w}_t-\dfrac{\boldsymbol{b}_y}{4\pi J}=\dfrac{\mu}{J}\left(\dfrac{\boldsymbol{w}_y}{J}\right)_y,\\ \boldsymbol{b}_t+\dfrac{u_y}{J}\boldsymbol{b}-\dfrac{\boldsymbol{w}_y}{J}=0,\\ p_t+\gamma\dfrac{u_y}{J}p=(\gamma-1)\left(\lambda\left(\dfrac{u_y}{J}\right)^2+\mu\left|\dfrac{\boldsymbol{w}_y}{J}\right|^2\right).\end{cases} \tag{2.5}$$

本文研究平面 MHD 方程组初边值问题强解的整体存在性和唯一性。这里既不考虑流体的磁电阻率，也

不考虑流体的热传导，即我们假设 $\nu=0$ 和 $\kappa=0$。由(2.2)和(2.3)，我们得到

$$(Jp)_t = J_t\rho+\rho_t J = u_y\rho - J\frac{u_y}{J}\rho = 0$$

因此，注意到 $\rho|_{t=0}=\rho_0$ 和 $J|_{t=0}=1$，我们有

$$J\rho=\rho_0$$

综上所述，本文所考虑的平面无电阻可压缩磁流体动力学方程组为如下：

$$\begin{cases} J_t = u_y, \\ \rho_0 u_t - \lambda\left(\dfrac{u_y}{J}\right)_y + p_y + \dfrac{1}{4\pi}\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}_y = 0, \\ \rho_0 \boldsymbol{w}_t = \mu\left(\dfrac{\boldsymbol{w}_y}{J}\right)_y + \dfrac{1}{4\pi}\boldsymbol{b}_y, \\ \boldsymbol{b}_t + \boldsymbol{b}\dfrac{u_y}{J} - \dfrac{\boldsymbol{w}_y}{J} = 0, \\ p_t + \gamma\dfrac{u_y}{J}p = (\gamma-1)\left(\lambda\left(\dfrac{u_y}{J}\right)^2 + \mu\left|\dfrac{\boldsymbol{w}_y}{J}\right|^2\right). \end{cases} \tag{2.6}$$

我们在给定时间 $T>0$ 和长度 $L>0$ 的条件下考虑系统(2.6)初边值问题，也就是说，系统(2.6)定义在时间和空间 $(0,L)\times(0,T)$ 上。该系统的以边界条件和初始条件如下：

$$u(t,0)=u(t,L)=\boldsymbol{b}(t,0)=\boldsymbol{b}(t,L)=\boldsymbol{w}(t,0)=\boldsymbol{w}(t,L)=0, \tag{2.7}$$

和

$$(J,u,p,\boldsymbol{b},\boldsymbol{w})|_{t=0} = (J_0,u_0,p_0,\boldsymbol{b}_0,\boldsymbol{w}_0). \tag{2.8}$$

边界条件(2.7)表示边界具有防滑、不渗透和热绝缘。

本文将使用以下记号。对于 $1\le q\le\infty$ 和正整数 m，定义 $L^q=L^q(\Omega)$ 和 $W^{m,q}=W^{m,q}(\Omega)$ 表示 Lebesgue 和 Sobolev 空间，其中 $H^m=W^{m,2}$。我们总是用 $\|u\|_q$ 来表示 u 的 L^q 范数。

问题(2.6)~(2.8)的整体强解的定义如下。

定义 2.1 给定正时间 $T\in(0,\infty)$，$(J,u,\boldsymbol{w},\boldsymbol{b},p)$ 称为问题(2.6)~(2.8)在 $\Omega\times(0,T)$ 上的强解。如果它具有这些性质

$$\inf_{y\in\Omega,t\in(0,T)} J(y,t)>0,\quad J-J_0\in C\left([0,T];L^2(\Omega)\right),$$

$$J_y\in C\left(0,T;L^2(\Omega)\right),\quad J_t\in L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right)\cap L^2\left(0,T;H^1(\Omega)\right),$$

$$\left(\sqrt{\rho_0}u,\sqrt{\rho_0}\boldsymbol{w}\right)\in C\left([0,T];L^2(\Omega)\right),\quad \left(\sqrt{\rho_0}u_t,\sqrt{\rho_0}\boldsymbol{w}_t\right)\in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right),$$

$$\left(u_y,\boldsymbol{w}_y\right)\in L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right)\cap L^2\left(0,T;H^1(\Omega)\right),\quad \left(\sqrt{t}u_{yt},\sqrt{t}\boldsymbol{w}_{yt}\right)\in L^2\left(0,T;L^2\right),$$

$$p\in C\left([0,T];L^2(\Omega)\right),\quad p_y\in C\left(0,T;L^2(\Omega)\right),\quad p_t\in L^4\left(0,T;L^2(\Omega)\right)\cap L^{\frac{4}{3}}\left(0,T;H^1\right),$$

$$\boldsymbol{b}\in C\left([0,T];H^1\right),\quad \boldsymbol{b}_t\in L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right)\cap L^2\left(0,T;H^1(\Omega)\right),$$

方程(2.6)在 $\mathbb{R}\times(0,T)$ 中处处满足上述性质，且满足初值和边界条件(2.7)~(2.8)。

本文有如下存在唯一性定理。

定理 2.1 我们假设对任意正整数 $\bar{\rho}$ 有 $0 \le \rho_0 \le \bar{\rho}$，初始值 $(J_0, u_0, \boldsymbol{w}_0, p_0)$ 满足

$$J_0 \equiv 1, \quad \left(\sqrt{\rho_0}u_0, \sqrt{\rho_0}\boldsymbol{w}_0, u_0', \boldsymbol{w}_0'\right) \in L^2, \quad \boldsymbol{b}_0 \in H^1, \quad 0 \le p_0 \in L^1, \quad p_0' \in L^2.$$

然而，在(2.7)~(2.8)的基础上，方程组(2.6)有一个唯一整体强解。

注 2.1 1) 根据定义 2.1 中速度的正则性，我们可以将拉格朗日坐标下建立的整体强解定理 2.1 转回到相应的欧拉坐标下的整体强解。

2) 注意到我们只需要初始密度是非负且一致有界，初始密度可以是非常普遍的，特别是，它允许有一个紧支集或者是单点真空或者是不连续点。

3) 因为 J 有正的上下界，$\rho = \frac{\rho_0}{J}$，可以看出，真空的系统(2.6)在以后的时间中既不能消失也不能重新生成，以及不连续点的密度沿特征线传播。

3. 先验估计

在本节的其余部分建立了对任意 $T > 0$ 在区间 $[0, T]$ 上的 $(J, u, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{h}, P)$ 的一系列先验估计，这对下一节显示整体适定性至关重要。在本节的其余部分，始终假设 $J_0 \equiv 1$。

我们从下面这个命题的基本能量恒等式开始。

命题 3.1 对任意 $t \in (0, \infty)$ 有

$$\int_0^L J(y,t)\mathrm{d}y = L,$$

和

$$\left(\int_0^L \left(\rho_0 \frac{u^2}{2} + \rho_0 \frac{|\boldsymbol{w}|^2}{2} + \frac{J|\boldsymbol{b}|^2}{8\pi} + \frac{Jp}{\gamma - 1}\right)\mathrm{d}y\right)(t) = E_0,$$

其中 $E_0 := \int_0^L \left(\rho_0 \frac{u_0^2}{2} + \rho_0 \frac{|\boldsymbol{w}_0|^2}{2} + \frac{|\boldsymbol{b}_0|^2}{8\pi} + \frac{p_0}{\gamma - 1}\right)\mathrm{d}y$。

证明： 我们将方程$(2.6)_1$两边在 $y \in (0, L)$ 上积分并利用边界条件(2.7)，直接得到第一个结论。将$(2.6)_2$乘以 u，所得结果在 $y \in (0, L)$ 上进行积分得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^L \rho_0 \frac{u^2}{2}\mathrm{d}y - \int_0^L u_y p\mathrm{d}y - \int_0^L \frac{1}{8\pi}|\boldsymbol{b}|^2 u_y \mathrm{d}y + \int_0^L \lambda \frac{(u_y)^2}{J}\mathrm{d}y = 0. \tag{3.1}$$

将$(2.6)_3$乘以 $\boldsymbol{w}$，对结果 $y \in (0, L)$ 上积分，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^L \rho_0 \frac{|\boldsymbol{w}|^2}{2}\mathrm{d}y + \frac{1}{4\pi}\int_0^L \boldsymbol{w}_y \cdot \boldsymbol{b}\mathrm{d}y + \int_0^L \mu \frac{|\boldsymbol{w}_y|^2}{J}\mathrm{d}y = 0. \tag{3.2}$$

将$(2.6)_4$乘以 $\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{b}$，对结果 $y \in (0, L)$ 上积分，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^L \frac{J|\boldsymbol{b}|^2}{8\pi}\mathrm{d}y + \frac{1}{8\pi}\int_0^L u_y |\boldsymbol{b}|^2 \mathrm{d}y - \frac{1}{4\pi}\int_0^L \boldsymbol{w}_y \cdot \boldsymbol{b}\mathrm{d}y = 0. \tag{3.3}$$

我们已知

DOI: 10.12677/aam.2022.114211

$$(Jp)_t = J_t p + Jp_t = pu_y + Jp_t$$
$$= pu_y + \gamma pu_y + (\gamma-1)\lambda\frac{u_y^2}{J} + (\gamma-1)\mu\frac{|\boldsymbol{w}_y|^2}{J},$$

因此，我们得到

$$\frac{(Jp)_t}{\gamma-1} = -pu_y + \lambda\frac{u_y^2}{J} + \mu\frac{|\boldsymbol{w}_y|^2}{J},$$

对 $y\in(0,L)$ 上积分，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^L \frac{Jp}{\gamma-1}\mathrm{d}y + \int_0^L pu_y\mathrm{d}y - \int_0^L \lambda\frac{u_y^2}{J}\mathrm{d}y - \int_0^L \mu\frac{|\boldsymbol{w}_y|^2}{J}\mathrm{d}y = 0, \tag{3.4}$$

求和等式(3.1)~(3.4)并对 $y\in(0,L)$ 上积分，得到

$$\int_0^L\left(\rho_0\frac{u^2}{2} + \rho_0\frac{|\boldsymbol{w}|^2}{2} + \frac{J|\boldsymbol{b}|^2}{8\pi} + \frac{Jp}{\gamma-1}\right)\mathrm{d}y = E_0. \tag{3.5}$$

接下来，我们受 Kazhiklov 和 Selukhin [9]、Xin 和 Li 引用[5] [6]和，Li [20] [21]的启发，推导出了 J 的一个有用的概念。由于$(2.6)_1$，从来自$(2.6)_2$可得

$$\rho_0 u_t + p_y + \frac{1}{8\pi}\left(|\boldsymbol{b}|^2\right)_y - \lambda(\ln J)_{ty} = 0.$$

上面的方程对 $t\in(0,t)$ 上积分得

$$\rho_0(u-u_0) - \lambda(\ln J)_y + \int_0^t\left(p + \frac{1}{8\pi}|\boldsymbol{b}|^2\right)_y \mathrm{d}\tau = 0,$$

由此，对

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^L \frac{J|\boldsymbol{b}|^2}{8\pi}\mathrm{d}y + \frac{1}{8\pi}\int_0^L u_y|\boldsymbol{b}|^2\mathrm{d}y - \frac{1}{4\pi}\int_0^L \boldsymbol{w}_y\cdot\boldsymbol{b}\mathrm{d}y = 0.$$

我们已知 $y\in(y,z)$ 进行积分，得到

$$\int_0^y \rho_0(u-u_0)\mathrm{d}\xi - \lambda\ln J(y,t) + \int_0^t\left(p(y,\tau) + \frac{1}{8\pi}|\boldsymbol{b}|^2(y,\tau)\right)\mathrm{d}\tau$$
$$= \int_0^z \rho_0(u-u_0)\mathrm{d}\xi + \lambda\ln J(z,t) + \int_0^t\left(p(z,\tau) + \frac{1}{8\pi}|\boldsymbol{b}|^2(z,\tau)\right)\mathrm{d}\tau.$$

我们发现方程

$$\int_0^z \rho_0(u-u_0)\mathrm{d}\xi + \lambda\ln J(z,t) + \int_0^t\left(p(z,\tau) + \frac{1}{8\pi}|\boldsymbol{b}|^2(z,\tau)\right)\mathrm{d}\tau$$

只依赖于 y，因此我们用 $h(t)$ 来表示，即

$$\frac{1}{\lambda}\int_0^y \rho_0(u-u_0)\mathrm{d}\xi - \ln J(y,t) + \frac{1}{\lambda}\int_0^t\left(p(y,\tau) + \frac{1}{8\pi}|\boldsymbol{b}|^2(y,\tau)\right)\mathrm{d}\tau = \frac{1}{\lambda}h(t),$$

进一步，我们得到

$$\exp\left\{\int_0^t\left(\frac{p}{\lambda} + \frac{1}{8\pi\lambda}|\boldsymbol{b}|^2\right)\mathrm{d}\tau\right\} = J(x,t)K(t)B(y,t), \tag{3.6}$$

其中

$$\begin{cases} K(t) = \exp\left\{\dfrac{h(t)}{\lambda}\right\}, \\ B(y,t) = \exp\left\{-\dfrac{1}{\lambda}\int_0^y \rho_0 (u-u_0)\,\mathrm{d}\xi\right\}. \end{cases} \tag{3.7}$$

(3.6)乘以 $\frac{p}{\lambda}+\frac{1}{8\pi\lambda}J|\boldsymbol{b}|^2$，得到

$$\partial_t\left(\exp\left\{\int_0^t\left(\frac{p}{\lambda}+\frac{1}{8\pi\lambda}|\boldsymbol{b}|^2\right)\mathrm{d}\tau\right\}\right)=\frac{1}{\lambda}pJKB+\frac{1}{8\lambda\pi}J|\boldsymbol{b}|^2 KB,$$

进一步计算得

$$\exp\left\{\int_0^t\left(\frac{p}{\lambda}+\frac{1}{8\lambda\pi}|\boldsymbol{b}|^2\right)\mathrm{d}\tau\right\}=1+\frac{1}{\lambda}\int_0^t pJKB\mathrm{d}\tau+\frac{1}{8\lambda\pi}\int_0^t J|\boldsymbol{b}|^2 KB\mathrm{d}\tau.$$

将其与(3.6)相加，对任意 $y\in(0,L)$ 和 $t\in[0,\infty)$ 得到

$$1+\frac{1}{\lambda}\int_0^t pJKB\mathrm{d}\tau+\frac{1}{8\lambda\pi}\int_0^t J|\boldsymbol{b}|^2 KB\mathrm{d}\tau = J(x,t)K(t)B(y,t) \tag{3.8}$$

下面的命题证明了 J 的一个先验正下界，以及根据 pJ 和 $J|\boldsymbol{b}|^2$ 控制 J 的上界。

命题 3.2 对任意 $t\in(0,\infty)$ 我们有以下估计

$$\left(m_2 f(t)\right)^{-1}\le J(y,t)\le m_1^{-1}m_2+\frac{1}{\lambda}(m_2)^2 m_1^{-1} f(t)\int_0^t pJ\mathrm{d}\tau+\frac{1}{8\lambda\pi}(m_2)^2 m_1^{-1} f(t)\int_0^t J|\boldsymbol{b}|^2\,\mathrm{d}\tau$$

其中

$$m_2=\exp\left\{\frac{2}{\lambda}\sqrt{\|\rho_0\|_1 E_0}\right\},\quad f_1(t)=m_1^{-1}+\frac{m_2E_0\gamma t}{\lambda m_1^2 L}\exp\left\{\frac{m_2E_0\gamma t}{\lambda m_1 L}\right\}.$$

证明： 由命题 3.1 和 Hölder 不等式得到

$$\left|\int_0^y \rho_0(u-u_0)\mathrm{d}\xi\right|\le\int_0^L\left(|\rho_0 u|+|\rho_0 u_0|\right)\mathrm{d}\xi\le 2\|\rho_0\|_1^{\frac{1}{2}}(E_0)^{\frac{1}{2}},$$

和

$$m_1:=\exp\left\{-\frac{2}{\lambda}\sqrt{\|\rho_0\|_1 E_0}\right\}\le B(y,t)\le\exp\left\{\frac{2}{\lambda}\sqrt{\|\rho_0\|_1 E_0}\right\}=:m_2. \tag{3.9}$$

不等式(3.8)两边对 $y\in(0,L)$ 上积分，由(3.9)和命题 3.1 有

$$\begin{aligned} L &\le \int_0^L\left(1+\frac{1}{\lambda}\int_0^t pJKB\mathrm{d}\tau+\frac{1}{8\lambda\pi}\int_0^t J|\boldsymbol{b}|^2 KB\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}y \\ &= K(t)\int_0^L J(y,t)B(y,t)\mathrm{d}y \\ &\le m_2K(t)\int_0^L J\mathrm{d}y = m_2LK(t) \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} m_1 L K(t) &= K(t) m_1 \int_0^L J \mathrm{d}y \le K(t) \int_0^L J B \mathrm{d}y \\ &= \int_0^L \left(1 + \frac{1}{\lambda} \int_0^t pJKB \mathrm{d}\tau + \frac{1}{8\lambda\pi} \int_0^t J |\boldsymbol{b}|^2 KB \mathrm{d}\tau \right) \mathrm{d}y \\ &\le L + \frac{m_2}{\lambda} \int_0^t \int_0^L \left(Jp + \frac{1}{8\pi} J |\boldsymbol{b}|^2 \right) \mathrm{d}y K \mathrm{d}\tau \\ &\le L + \frac{m_2 E_0 \gamma}{\lambda} \int_0^t H \mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

利用 Gronwall 不等式，我们进一步得到

$$m_2^{-1} \le K(t) \le m_1^{-1} \exp\left\{ \frac{m_2 E_0 \gamma t}{\lambda m_1 L} \right\} =: f(t), \quad t \in [0, T]. \tag{3.10}$$

由(3.9)和(3.10)，以及(3.8)可以得出

$$1 \le 1 + \frac{1}{\lambda} \int_0^t pJKB \mathrm{d}\tau + \frac{1}{8\lambda\pi} \int_0^t J |\boldsymbol{b}|^2 KB \mathrm{d}\tau = J(x,t) K(t) B(y,t) \le J(y,t) m_2 f(t),$$

和

$$\begin{aligned} m_2^{-1} m_1 J(y,t) \le K(t) B(y,t) J(y,t) &= 1 + \frac{1}{\lambda} \int_0^t pJKB \mathrm{d}\tau + \frac{1}{8\lambda\pi} \int_0^t J |\boldsymbol{b}|^2 KB \mathrm{d}\tau \\ &\le 1 + \frac{1}{\lambda} m_2 f(t) \int_0^t pJ \mathrm{d}\tau + \frac{1}{8\lambda\pi} m_2 f(t) \int_0^t J |\boldsymbol{b}|^2 \mathrm{d}\tau. \end{aligned}$$

则对任意 $t \in (0, \infty)$，和任意 $y \in (0, L)$ 有

$$(m_2 f(t))^{-1} \le J(y,t) \le m_1^{-1} m_2 + \frac{1}{\lambda} (m_2)^2 m_1^{-1} f(t) \int_0^t pJ \mathrm{d}\tau + \frac{1}{8\lambda\pi} (m_2)^2 m_1^{-1} f(t) \int_0^t J |\boldsymbol{b}|^2 \mathrm{d}\tau$$

证明完毕。

4. 总结

本课题得到的是可压缩磁流体动力学方程组密度的上界估计，这对求解大初值条件下可压磁流体动力学方程组 MHD 方程组的 Cauchy 问题和初边值问题有着很大的帮助，在存在真空的情况下，利用本课题得到的结果和非线性泛函分析中的一些方法，我们可以证明这个方程组强解的整体存在性。

参考文献

[1] Landau, L.D. and Lifshitz, E.M. (1984) Electrodynamics of Continuous Media. 2nd Edition, Pergamon, New York.

[2] Wang, D. (2003) Large Solutions to the Initial-Boundary Value Problem for Planar Magnetohydrodynamics. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **63**, no. 4, 1424-1441. https://doi.org/10.1137/S0036139902409284

[3] Kazhikhov, A.V. and Shelukhin, V.V. (1977) Unique Globle Solution with Respect to Time of Initial-Boundary Value Problems for One-Dimensional Equations of a Viscous Gas. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **41**, 273-282. https://doi.org/10.1016/0021-8928(77)90011-9

[4] Li, J. and Liang, Z.L. (2016) Some Uniform Estimates and Large-Time Behavior of Solutions to One-Dimensional Compressible Navier-Stokes System in Unbounded Domains with Large Data. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **220**, 1195-1208. https://doi.org/10.1007/s00205-015-0952-0

[5] Li, J. and Xin, Z. (2020) Entropy Bounded Solutions to the One-Dimensional Compressible Navier-Stokes Equations with Zero Heat Conduction and Far Field Vacuum. *Advances in Mathematics*, **361**, Article ID: 106923. https://doi.org/10.1016/j.aim.2019.106923

[6] Li, J. and Xin, Z. (2020) Entropy-Bounded Solutions to the One-Dimensional Heat Conductive Compressible Navier-Stokes Equations with Far Field Vacuum. *Communications on Pure and Applied Mathematics*. (To Appear)

https://doi.org/10.1002/cpa.22015

[7] Hoff, D. and Tsyganov, E. (2005) Uniqueness and Continuous Dependence of Weak Solutions in Compressible Magnetohydrodynamics. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, **56**, 791-804. https://doi.org/10.1007/s00033-005-4057-8

[8] Ducomet, B. and Feireisl, E. (2006) The Equations of Magnetohydrodynamics: On the Interaction between Matter and Radiation in the Evolution of Gaseous Stars. *Communications in Mathematical Physics*, **266**, 595-629. https://doi.org/10.1007/s00220-006-0052-y

[9] Ye, Y.L. and Li, Z.L. (2019) Global Strong Solution to the Cauchy Problem of 1D Compressible MHD Equations with Large Initial Data and Vacuum. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, **70**, Article No. 38. https://doi.org/10.1007/s00033-019-1078-2

[10] Jiang, S. and Zhang, J.W. (2017) On the Non-Resistive Limit and the Magnetic Boundary-Layer for one Dimensional Compressible Magnetohydrodynamics. *Nonlinearity*, **30**, 3587-3612. https://doi.org/10.1088/1361-6544/aa82f2

[11] Tan, Z. and Wang, Y.J. (2009) Global Existence and Large-Time Behavior of Weak Solutions to the Compressible Magnetohydrodynamic Equations with Coulomb Force. *Communications in Mathematical Physics*, **71**, 5866-5884. https://doi.org/10.1016/j.na.2009.05.012

[12] Hu, Y.X. (2015) On Global Solutions and Asymptotic Behavior of Planar Magnetohydrodynamics with Large Data. *Quarterly of Applied Mathematics*, **73**, 759-772. https://doi.org/10.1090/qam/1413

[13] Chen, G.Q. and Wang, D.H. (2003) Existence and Continuous Dependence of Large Solutions for the Magnetohydrodynamic Equations. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, **54**, 608-632. https://doi.org/10.1007/s00033-003-1017-z

[14] Chen, G.Q. and Wang, D.H. (2002) Global Solutions of Nonlinear Magnetohydrodynamics with Large Initial Data. *Journal of Differential Equations*, **182**, 344-376. https://doi.org/10.1006/jdeq.2001.4111

[15] Fan, J.S. and Hu, Y.X. (2015) Global Strong Solutions to the 1-D Compressible Magnetohydrodynamic Equations with Zero Resistivity. *Journal of Mathematical Physics*, **56**, Article ID: 023101. https://doi.org/10.1063/1.4906902

[16] Kawashima, S. and Okada, M. (1982) Smooth Global Solutions for the One-Dimensional Equations in Magnetohydrodynamics. *Proceedings of the Japan Academy Series A*: *Mathematical Sciences*, **58**, 384-387. https://doi.org/10.3792/pjaa.58.384

[17] Li, J.K. and Li, M.J. (2022) Global Strong Solutions to the Cauchy Problem of the Planar Non-Resistive Magnetohydrdynamic Equations with Large Initial Data. *Journal of Differential Equations*, **316**, 136-157. https://doi.org/10.1016/j.jde.2022.01.041

[18] Yu, H.B. (2013) Global Classical Large Solutions with Vacuum to 1D Compressible MHD with Zero Resistivity. *Acta Applicandae Mathematicae*, **128**, 193-209. https://doi.org/10.1007/s10440-013-9826-3

[19] Fan, J.S. and Yu, W.H. (2009) Strong Solution to the Compressible Magnetohydrodynamic Equations with Vacuum. *Nonlinear Analysis*: *Real World Applications*, **10**, 392-409. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2007.10.001

[20] Li, J.K. (2019) Global Well-Posedness of the One-Dimensional Compressible Navier-Stokes Equations with Constant Heat Conductivity and Nonnegative Density. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **51**, 3666-3693. https://doi.org/10.1137/18M1167905

[21] Li, J.K. (2020) Global Well-Posedness of Non-Heat Conductive Compressible Navier-Stokes Equations in 1D. *Nonlinearity*, **33**, 2181-2210. https://doi.org/10.1088/1361-6544/ab6c7b