Advances in Applied Mathematics **应用数学进展, 2022, 11(5), 2868-2872**
Published Online May 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.115304

Hans汉斯

同角幻方及其之间的关系

张蓉蓉，刘兴祥

延安大学数学与计算机科学学院，陕西 延安

收稿日期：2022年4月25日；录用日期：2022年5月19日；发布日期：2022年5月27日

摘 要

根据幻方的定义及其性质，结合矩阵的初等变换，给出一系列同角幻方的规范化定义以及它们之间的转化规律，并且给予证明，使幻方的知识体系更加完善。

关键词

幻方，初等变换，同角幻方，转化规律

The Same Angle Magic Square and Its Relation

Rongrong Zhang, Xingxiang Liu

College of Mathematics and Computer Science, Yan'an University, Yan'an Shaanxi

Received: Apr. 25th, 2022; accepted: May 19th, 2022; published: May 27th, 2022

Abstract

According to the definitions and properties of magic square, and combined with the elementary transformation of matrix, a series of normalized definitions of the same angle magic square and their transformation rule are given, and the proof is given, which makes the knowledge of magic square theory more perfect.

Keywords

Magic Square, Elementary Transformation, The Same Angle Magic Square, Transformation Rule

文章引用: 张蓉蓉, 刘兴祥. 同角幻方及其之间的关系[J]. 应用数学进展, 2022, 11(5): 2868-2872.
DOI: 10.12677/aam.2022.115304

1. 引言

幻方也称纵横图、魔方，发源于中国古代的洛书——九宫图。十三世纪，中国南宋数学家杨辉在世界上首先展开了对幻方的系统研究。经过一代代数学家与数学爱好者的共同努力，关于幻方的研究成果已经相当丰富，刘兴祥等[1]给出了幻方的矩阵化等价定义，在文献[2]中将幻方和拉丁方结合起来，并且[3]进一步给出了具有更强幻性的完美和幻方的有关定义。张婧等[4]将完美和幻方和积幻方结合起来，给出了完美积幻方的定义以及构造方法，同时[5]基于完美始元和幻方，给出了双偶数阶完美始元和幻方的定义和构造方法。詹森等[6]给出奇数平方阶最完美幻方的通用构造法。但在逐渐深入探究的过程中，发现目前并没有对于一类规律性较强的幻方即本文中所给出的同角幻方有所规定，也无法开展更进一步的探索。于是本文在充分掌握幻方相关定义及其性质之后，从异元幻方入手，首先给出了同角幻方(左上角同角幻方，右上角同角幻方，左下角同角幻方，右下角同角幻方)的规范化定义，其次结合矩阵的初等变换，得到了它们之间的转化规律，即该四种同角幻方可以任意利用其中之一构造其他三种，并且给出证明，为后续该幻方构造方法的研究以及此类幻方与其他幻方之间互相构造奠定了基础，使得幻方的知识体系更加完整，同时也为幻方的应用提供了理论依据。

2. 预备知识

定义 1 [1] [7]设 $S=\left\{a_i \middle| i=1,2,\cdots,n^2\right\}$，当 $i\neq j\left(i,j=1,2,\cdots,n^2\right)$ 时 $a_i\neq a_j$，矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$，$a_{ij}\in S\left(i,j=1,2,\cdots,n\right)$，如果矩阵 A 满足下列条件

1) $A\left(\sum_{i=1}^{n}E_i\left(n,1\right)\right)=S\left(\sum_{i=1}^{n}E_i\left(n,1\right)\right)$，

2) $\left(\sum_{j=1}^{n}E_j\left(1,n\right)\right)A=S\left(\sum_{j=1}^{n}E_j\left(1,n\right)\right)$，

3) $\left(\sum_{i=1}^{n}E_i\left(1,n\right)\right)A\left(\sum_{i=1}^{n}E_i\left(n,1\right)\right)=S$，

4) $\left(\sum_{i=1}^{n}E_i\left(1,n\right)\right)A\left(\sum_{i=1}^{n}E_{n+1-i}\left(n,1\right)\right)=S$，

5) $\forall i,j,x,y\in\left\{1,2,\cdots,n\right\}$，当 $i\neq x$ 或 $j\neq y$ 时 $a_{ij}\neq a_{xy}$，

则称矩阵 A 为 n 阶异元幻方。

3. 主要结果

3.1. 定义

定义 1 设矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{(2n+2)\times(2n+2)}$，$a_{ij}\in\left\{1,2,\cdots,(2n+2)^2\right\}\left(i,j=1,2,\cdots,2n+2\right)$ $\forall i,j,x,y\in\left\{1,2,\cdots,2n+2\right\}$，当 $i\neq x$ 或 $j\neq y$ 时 $a_{ij}\neq a_{xy}$，如果 $\left(a_{ij}\right)_{u\times u}$ 是 $u\left(u=4,6,8,\cdots,2n+2\right)$ 阶异元幻方，则称矩阵 A 是 $2n+2$ 阶左上角同角幻方。

定义 2 设矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{(2n+1)\times(2n+1)}$，$a_{ij}\in\left\{1,2,\cdots,(2n+1)^2\right\}\left(i,j=1,2,\cdots,2n+1\right)$

$\forall i,j,x,y\in\{1,2,\cdots,2n+1\}$，当 $i\neq x$ 或 $j\neq y$ 时 $a_{ij}\neq a_{xy}$，如果 $\left(a_{ij}\right)_{u\times u}$ 是 $u\left(u=3,5,7,\cdots,2n+1\right)$ 阶异元幻方，则称矩阵 A 是 $2n+1$ 阶左上角同角幻方。

定义 3 设矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{(2n+2)\times(2n+2)}$，$a_{ij}\in\left\{1,2,\cdots,(2n+2)^2\right\}\left(i,j=1,2,\cdots,2n+2\right)$

$\forall i,j,x,y\in\{1,2,\cdots,2n+2\}$，当 $i\neq x$ 或 $j\neq y$ 时 $a_{ij}\neq a_{xy}$，如果 $\left(a_{i,2n+2+j-r}\right)_{r\times r}$ 是 $r\left(r=4,6,8,\cdots,2n+2\right)$ 阶异元幻方，则称矩阵 A 是 $2n+2$ 阶右上角同角幻方。

定义 4 设矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{(2n+1)\times(2n+1)}$，$a_{ij}\in\left\{1,2,\cdots,(2n+1)^2\right\}\left(i,j=1,2,\cdots,2n+1\right)$

$\forall i,j,x,y\in\{1,2,\cdots,2n+1\}$，当 $i\neq x$ 或 $j\neq y$ 时 $a_{ij}\neq a_{xy}$，如果 $\left(a_{i,2n+1+j-r}\right)_{r\times r}$ 是 $r\left(r=3,5,7,\cdots,2n+1\right)$ 阶异元幻方，则称矩阵 A 是 $2n+1$ 阶右上角同角幻方。

定义 5 设矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{(2n+2)\times(2n+2)}$，$a_{ij}\in\left\{1,2,\cdots,(2n+2)^2\right\}\left(i,j=1,2,\cdots,2n+2\right)$

$\forall i,j,x,y\in\{1,2,\cdots,2n+2\}$，当 $i\neq x$ 或 $j\neq y$ 时 $a_{ij}\neq a_{xy}$，如果 $\left(a_{2n+2+i-r,j}\right)_{r\times r}$ 是 $r\left(r=4,6,8,\cdots,2n+2\right)$ 阶异元幻方，则称矩阵 A 是 $2n+2$ 阶左下角同角幻方。

定义 6 设矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{(2n+1)\times(2n+1)}$，$a_{ij}\in\left\{1,2,\cdots,(2n+1)^2\right\}\left(i,j=1,2,\cdots,2n+1\right)$

$\forall i,j,x,y\in\{1,2,\cdots,2n+1\}$，当 $i\neq x$ 或 $j\neq y$ 时 $a_{ij}\neq a_{xy}$，如果 $\left(a_{2n+1+i-r,j}\right)_{r\times r}$ 是 $r\left(r=3,5,7,\cdots,2n+1\right)$ 阶异元幻方，则称矩阵 A 是 $2n+1$ 阶左下角同角幻方。

定义 7 设矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{(2n+2)\times(2n+2)}$，$a_{ij}\in\left\{1,2,\cdots,(2n+2)^2\right\}\left(i,j=1,2,\cdots,2n+2\right)$

$\forall i,j,x,y\in\{1,2,\cdots,2n+2\}$，当 $i\neq x$ 或 $j\neq y$ 时 $a_{ij}\neq a_{xy}$，如果 $\left(a_{2n+2+i-r,2n+2+j-r}\right)_{r\times r}$ 是 $r\left(r=4,6,8,\cdots,2n+2\right)$ 阶异元幻方，则称矩阵 A 是 $2n+2$ 阶右下角同角幻方。

定义 8 设矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{(2n+1)\times(2n+1)}$，$a_{ij}\in\left\{1,2,\cdots,(2n+1)^2\right\}\left(i,j=1,2,\cdots,2n+1\right)$

$\forall i,j,x,y\in\{1,2,\cdots,2n+1\}$，当 $i\neq x$ 或 $j\neq y$ 时 $a_{ij}\neq a_{xy}$，如果 $\left(a_{2n+1+i-r,2n+1+j-r}\right)_{r\times r}$ 是 $r\left(r=3,5,7,\cdots,2n+1\right)$ 阶异元幻方，则称矩阵 A 是 $2n+1$ 阶右下角同角幻方。

3.2. 同角幻方之间的关系

定理 1 设矩阵 A 是 $2n+1$ $\left(n=1,2,3,\cdots\right)$ 阶左上角同角幻方，则

1) $AP_{1,2n+1}P_{2,2n}\cdots P_{n-1,n+3}P_{n,n+2}$ 是 $2n+1$ 阶右上角同角幻方。

2) $P_{n,n+2}P_{n-1,n+3}\cdots P_{2,2n}P_{1,2n+1}A$ 是 $2n+1$ 阶左下角同角幻方。

3) $P_{n,n+2}P_{n-1,n+3}\cdots P_{2,2n}P_{1,2n+1}AP_{1,2n+1}P_{2,2n}\cdots P_{n-1,n+3}P_{n,n+2}$ 是 $2n+1$ 阶右下角同角幻方。

证明：接下来将用第一归纳法来证明上述定理。

当 $n=1$ 时，即矩阵 A 为 3 阶异元幻方。矩阵 A 分别经过定理中(1) (2) (3)线性变换之后可证分别为 3 阶右上角同角幻方、3 阶左下角同角幻方、3 阶右下角同角幻方。

即成立。

当 $n=2$ 时，由于矩阵 A 是 5 阶左上角同角幻方，根据定义知 $\left(a_{ij}\right)_{3\times3}$，$\left(a_{ij}\right)_{5\times5}$ 分别是 3 阶异元幻方和 5 阶异元幻方。

1) 中矩阵 A 经过线性变换后，可知 $\left(a_{i,j+2}\right)_{3\times3}$，$\left(a_{i,j+2}\right)_{5\times5}$ 分别是 3 阶异元幻方和 5 阶异元幻方，满足右上角同角幻方的定义。

2) 3)证明同理可得。

即成立。

假设 $n=k$ 时，即矩阵 A 是 $2k+1$ 阶左上角同角幻方，定理 1 成立。

当 $n=k+1$ 时，根据以上归纳和假设可知定理 1 中(1) (2) (3)依然成立。

即可证明定理 1 成立

定理 2 设矩阵 A 是 $2n+2$ 阶左上角同角幻方，则

1) $AP_{1,2n+2}P_{2,2n+1}\cdots P_{n,n+3}P_{n+1,n+2}$ 是 $2n+2$ 阶右上角同角幻方。

2) $P_{n+1,n+2}P_{n,n+3}\cdots P_{2,2n+1}P_{1,2n+2}A$ 是 $2n+2$ 阶左下角同角幻方。

3) $P_{n+1,n+2}P_{n,n+3}\cdots P_{2,2n+1}P_{1,2n+2}AP_{1,2n+2}P_{2,2n+1}\cdots P_{n,n+3}P_{n+1,n+2}$ 是 $2n+2$ 阶右下角同角幻方。

定理 3 设矩阵 A 是 $2n+1$ 阶右上角同角幻方，则

1) $AP_{1,2n+1}P_{2,2n}\cdots P_{n-1,n+3}P_{n,n+2}$ 是 $2n+1$ 阶左上角同角幻方。

2) $P_{n,n+2}P_{n-1,n+3}\cdots P_{2,2n}P_{1,2n+1}A$ 是 $2n+1$ 阶右下角同角幻方。

3) $P_{n,n+2}P_{n-1,n+3}\cdots P_{2,2n}P_{1,2n+1}AP_{1,2n+1}P_{2,2n}\cdots P_{n-1,n+3}P_{n,n+2}$ 是 $2n+1$ 阶左下角同角幻方。

定理 4 设矩阵 A 是 $2n+2$ 阶右上角同角幻方，则

1) $AP_{1,2n+2}P_{2,2n+1}\cdots P_{n,n+3}P_{n+1,n+2}$ 是 $2n+2$ 阶左上角同角幻方。

2) $P_{n+1,n+2}P_{n,n+3}\cdots P_{2,2n+1}P_{1,2n+2}A$ 是 $2n+2$ 阶右下角同角幻方。

3) $P_{n+1,n+2}P_{n,n+3}\cdots P_{2,2n+1}P_{1,2n+2}AP_{1,2n+2}P_{2,2n+1}\cdots P_{n,n+3}P_{n+1,n+2}$ 是 $2n+2$ 阶左下角同角幻方。

定理 5 设矩阵 A 是 $2n+1$ 阶左下角同角幻方，则

1) $AP_{1,2n+1}P_{2,2n}\cdots P_{n-1,n+3}P_{n,n+2}$ 是 $2n+1$ 阶右下角同角幻方。

2) $P_{n,n+2}P_{n-1,n+3}\cdots P_{2,2n}P_{1,2n+1}A$ 是 $2n+1$ 阶左上角同角幻方。

3) $P_{n,n+2}P_{n-1,n+3}\cdots P_{2,2n}P_{1,2n+1}AP_{1,2n+1}P_{2,2n}\cdots P_{n-1,n+3}P_{n,n+2}$ 是 $2n+1$ 阶右上角同角幻方。

定理 6 设矩阵 A 是 $2n+2$ 阶左下角同角幻方，则

1) $AP_{1,2n+2}P_{2,2n+1}\cdots P_{n,n+3}P_{n+1,n+2}$ 是 $2n+2$ 阶右下角同角幻方。

2) $P_{n+1,n+2}P_{n,n+3}\cdots P_{2,2n+1}P_{1,2n+2}A$ 是 $2n+2$ 阶左上角同角幻方。

3) $P_{n+1,n+2}P_{n,n+3}\cdots P_{2,2n+1}P_{1,2n+2}AP_{1,2n+2}P_{2,2n+1}\cdots P_{n,n+3}P_{n+1,n+2}$ 是 $2n+2$ 阶右上角同角幻方。

定理 7 设矩阵 A 是 $2n+1$ 右下角同角幻方，则

1) $AP_{1,2n+1}P_{2,2n}\cdots P_{n-1,n+3}P_{n,n+2}$ 是 $2n+1$ 阶左下角同角幻方。

2) $P_{n,n+2}P_{n-1,n+3}\cdots P_{2,2n}P_{1,2n+1}A$ 是 $2n+1$ 阶右上角同角幻方。

3) $P_{n,n+2}P_{n-1,n+3}\cdots P_{2,2n}P_{1,2n+1}AP_{1,2n+1}P_{2,2n}\cdots P_{n-1,n+3}P_{n,n+2}$ 是 $2n+1$ 阶左上角同角幻方。

定理 8 设矩阵 A 是 $2n+2$ 阶右下角同角幻方，则

1) $AP_{1,2n+2}P_{2,2n+1}\cdots P_{n,n+3}P_{n+1,n+2}$ 是 $2n+2$ 阶左下角同角幻方。

2) $P_{n+1,n+2}P_{n,n+3}\cdots P_{2,2n+1}P_{1,2n+2}A$ 是 $2n+2$ 阶右上角同角幻方。

3) $P_{n+1,n+2}P_{n,n+3}\cdots P_{2,2n+1}P_{1,2n+2}AP_{1,2n+2}P_{2,2n+1}\cdots P_{n,n+3}P_{n+1,n+2}$ 是 $2n+2$ 阶左上角同角幻方。

定理 2 到定理 8 的证明同理可得。

4. 小结

通过幻方和矩阵的初等变换相结合的思路展开研究，给出了一系列同角幻方的定义，并且得到了它们之间的关系，为后续的进一步探索奠定了基础。

基金项目

地区科学基金项目(12161086)。

参考文献

[1] 刘兴祥, 董朦朦, 田雨禾. 幻阵的等价定义[J]. 延安大学学报(自然科学版), 2018, 37(2): 21-25. https://doi.org/10.13876/J.cnki.ydnse.2018.02.021

[2] 董朦朦, 刘兴祥, 田雨禾. 幻方可以分解为两个正交拉丁方的线性组合[J]. 重庆理工大学学报(自然科学), 2018, 32(8): 181-188.

[3] 张婧, 刘兴祥, 施钊. 完美和幻方的定义及其构造方法[J]. 湖北民族大学学报(自然科学版), 2020, 38(4): 420-423. https://doi.org/10.13501/j.cnki.42-1908/n.2020.12.013

[4] 张婧, 刘兴祥, 刘娟娟. 完美积幻方的定义及其构造[J]. 延安大学学报(自然科学版), 2020, 39(4): 90-93. https://doi.org/10.13876/J.cnki.ydnse.2020.04.090

[5] 张婧, 刘兴祥, 董朦朦. 双偶数阶完美和幻方的定义及其构造方法[J]. 河南科学, 2020, 38(7): 1043-1046.

[6] 詹森, 王辉丰. 构造奇数平方阶最完美幻方的方法[J]. 海南师范大学学报(自然科学版), 2021, 34(3): 274-278+348.

[7] 郭萍, 刘兴祥. 和幻阵的定义及代数性质[J]. 延安大学学报(自然科学版), 2017, 36(1): 21-27. https://doi.org/10.13876/J.cnki.ydnse.2017.01.021