Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2022, 11(6), 3646-3650**
Published Online June 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.116389

Hans汉斯

完全二部图的强子图连通度

程 睿

绍兴文理学院数理信息学院，浙江 绍兴

收稿日期：2022年5月21日；录用日期：2022年6月11日；发布日期：2022年6月22日

摘 要

无向图G的广义k-连通度是在1985年由Hager引入的定义，这个概念后来又被人们推广到有向图中并提出了强子图k-连通度的定义。近年来，强子图k-连通度的研究在有向图上取得很多重要结果。在本文中，我们研究并给出了完全二部有向图上的强子图k-连通度的若干结果。

关键词

广义连通度，强子图k-连通度，完全二部图

Strong Subgraph Connectivity on Complete Bipartite Digraphs

Rui Cheng

School of Mathematical Information, Shaoxing University, Shaoxing Zhejiang

Received: May 21st, 2022; accepted: Jun. 11th, 2022; published: Jun. 22nd, 2022

Abstract

The definition of generalized connectivity of undirected graph G was introduced by Hager in 1985. This concept was extended to directed graph and the definition of strong subgraph k-connectivity was proposed. In recent years, the study of strong subgraph k-connectivity has achieved many important results on directed graphs. In this paper, we study this concept and give some results on the strong subgraph k-connectivity on complete bipartite digraphs.

Keywords

Generalized Connectivity, Strong Subgraph k-Connectivity, Complete Bipartite Digraphs

文章引用: 程睿. 完全二部图的强子图连通度[J]. 应用数学进展, 2022, 11(6): 3646-3650.
DOI: 10.12677/aam.2022.116389

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

无论是在组合学意义还是算法意义上，连通度都是其中最基础的概念之一，不同文献中使用的连通度符号都有差别，本文使用的是文献[1] [2]中相关术语和符号。图 G 的广义 k-连通度 $\kappa_k(G)$ 的概念在 1985 年由 Hager [3]引入，是连通度的“路版本”定义的自然推广。给定图 G 和其中的一个顶点子集 S (S 中元素个数至少为 2)，当 G 中的子树 T 满足 $S \subseteq V(T)$ 时，我们称这个树 T 为一个 S-斯坦纳树，也可以简称其为 S-树。当两个 S-树 T_1 和 T_2 满足 $E(T_1) \cap E(T_2) = \varnothing$ 时，我们称 T_1 和 T_2 为弧不交的。当两个弧不交的 S-树 T_1 和 T_2 满足 $V(T_1) \cap V(T_2) = S$ 时，我们称 T_1 和 T_2 为内部不交的。广义局部连通度 $\kappa_S(G)$ 定义为 G 中内部不交 S-树的最大个数。进一步，我们定义广义 k-连通度为

$$\kappa_k(G) = \min\{\kappa_S(G) \mid S \subseteq V(G), |S| = k\},$$

其中 k 满足 $2 \le k \le n$。容易得出，当 $k = 2$ 时，$\kappa_2(G) = \kappa(G)$。

类似的，我们可以定义 $\lambda_k(G)$ 为

$$\lambda_k(G) = \min\{\lambda_S(G) \mid S \subseteq V(G), |S| = k\},$$

其中 $\lambda_S(G)$ 为 G 中弧不交 S-树的最大个数。

在无向图广义 k-连通度的定义中，可以将“S-树”替换为“G 中包含 S 的连通子图”(这里面的 S-树本身也是 G 的一个连通子图)，将“连通”替换为“强连通”来定义有向图的“广义 k-连通度”。令 $D = (V(D), A(D))$，为一个 n 阶有向图，S 是 $V(D)$ 中的一个 k 元顶点子集，其中 $2 \le k \le n$。我们设 $D_1, \cdots, D_p$ 为 D 中包含 S 的强子图，对于任意的 D_i 和 D_j，若满足 $V(D_i) \cap V(D_j) = S$ 和 $A(D_i) \cap A(D_j) = \varnothing$，则称 D_i 和 D_j 为内部不交的 S-强子图，其中 $1 \le i \le j \le p$。将 $\kappa_S(D)$ 定义为 G 中包含的 S-内部不交强子图的最大个数，进一步定义强子图 k-连通度为

$$\kappa_k(D) = \min\{\kappa_S(D) \mid S \subseteq V(D), |S| = k\},$$

根据其定义可得，当 D 不是强连通图时，$\kappa_2(D) = 0$。类似的，引入 $\lambda_S(D)$ 和 $\lambda_k(D)$ 的定义，其中 $\lambda_S(D)$ 定义为 D 中包含 S-弧不交强子图的最大个数，定义强子图 k-弧连通度为

$$\lambda_k(D) = \min\{\lambda_S(D) \mid S \subseteq V(D), |S| = k\}.$$

若有向图 D 中任意一条弧 xy 都能够在图 D 中找出一条弧 yx 与之对应，则 D 被称为对称的有向图。给定一个无向图 G，通过将 G 中的每条边替换成对应的两个方向的弧构成一个对称有向图 D，我们称 D 是 G 的完全双定向。若 G 是一个完全二部图 $K_{a,b}$，则它对应的完全二部有向图记作 $\vec{K}_{a,b}$。

Li 等在文献[4]中给出了完全二部图 $K_{a,b}$ 边不交生成树的值和 $K_{a,b}$ 的广义 k 连通度的值。Li 和 Mao 在[5]中总结了广义连通度的诸多结果，在此基础上，Sun 等在[6] [7]中给出了完全有向图的强子图连通度的界，证明了竞赛图和对称有向图在不同情况下的复杂度。令 $k \ge 2$ 且 $l \ge 2$，Sun 等在文献[7]中通过用 WEAK k-LINKAGE PROBLEM 归约证明了能否判断 $\lambda_S(D) \ge l$ 是一个 NPC 问题，在文献[8]中通过用 DIRECTED q-LINKAGE PROBLEM 归约证明了能否判断 $\kappa_S(D) \ge l$ 也是一个 NPC 问题。在本文中，对于

$k=2,k=3$ 和 $k=a+b$，我们确定了 $\kappa_k\left(\vec{K}_{a,b}\right)$ 的精确值(引理 2.4，定理 2.5 和定理 2.6)。

2. 主要结果

引理 2.1. [7]令 D 为一个 n 阶有向图，k 为一个整数且 $k\ge 2$，则

$$\lambda_{k+1}(D)\le\lambda_k(D)(k\le n-1),$$

$$\kappa_k(D')\le\kappa_k(D),\ \lambda_k(D')\le\lambda_k(D),$$

$$\kappa_k(D)\le\lambda_k(D)\le\min\left\{\delta^+(D),\delta^-(D)\right\},$$

其中 D' 是 D 的一个生成子有向图。

引理 2.2. [6]令 D 为一个 n 阶有向图，k 为一个整数且 $k\ge 2$，则 $1\le\lambda_k(D)\le n-1$，$1\le\kappa_k(D)\le n-1$，上界是可达的当且仅当 $D\cong\vec{K}$。

引理 2.3. [9] [10]完全 S 部有向图 $\vec{K}_{r,r,\cdots,r}$ (s 次)可以被分解成 s 个哈密顿圈当且仅当 $(r,s)\ne(4,1)$ 或 $(r,s)\ne(6,1)$。

引理 2.4. [11]对于任意给定的两个正整数 a 和 b，其中 $a\le b$，我们有 $\lambda_k\left(\vec{K}_{a,b}\right)=a(2\le k\le a+b)$。

定理 2.5. 对于任意给定的两个正整数 a 和 b，其中 $a\le b$，我们有 $\kappa_{a+b}\left(\vec{K}_{a,b}\right)=a$。

证明： 令 $D\cong\vec{K}_{a,b}$，在 D 中找到一个 k 元顶点子集 S，其中 $|S|=a+b$。将 $V(D)$ 划分为 V_1 和 V_2 两个子集，其中 $V_1=\{u_i\,|1\le i\le a\}$，$V_2=\left\{v_j\,|1\le j\le b\right\}$。根据引理 2.3 可以通过由 $\left\{u_i,v_j\,|1\le i,j\le a\right\}$ 导出的 D 的子图得到 $H_i,(1\le i\le a)$ 个哈密顿圈。对每个 $1\le i\le a$，存在一个 D_i，D_i 是由 H_i 加上弧集 $\left\{u_iv_j,v_ju_i\,|\,a+1\le j\le b\right\}$ 所构成的 D 的强生成子图。此时对于任意的一对强子图 $D_i,D_j\,(1\le i\le j\le a)$，都有 $V(D_i)\cap V(D_j)=S$ 成立。再根据引理 2.4：$\lambda_{a+b}(D)=a$，可以知道图 D 中任意 a 个强子图都是弧不交的，意味着 D 中至少有 a 个内部不交的 S-强子图，即 $\kappa_{a+b}(D)\ge a$。再根据引理 2.1 我们能够得到这样一个事实：$\kappa_{a+b}(D)\le\lambda_{a+b}(D)\le\min\left\{\delta^+(D),\delta^-(D)\right\}=a$。综上所述，可以得到 $\kappa_{a+b}\left(\vec{K}_{a,b}\right)=a$。定理得证。□

定理 2.6. 对于任意给定的两个正整数 a 和 b，其中 $a\le b$，我们有 $\kappa_2\left(\vec{K}_{a,b}\right)=a$。

证明： 令 $D\cong\vec{K}_{a,b}$，将 $V(D)$ 根据两个独立集划分为 V_1 和 V_2 两个子集，其中 $V_1=\{u_i\,|1\le i\le a\}$，$V_2=\left\{v_j\,|1\le j\le b\right\}$。根据引理 2.1，我们有 $\kappa(D)\le\lambda(D)\le\min\left\{\delta^+(D),\delta^-(D)\right\}=a$，下面只需在 D 中找至少 a 个内部不交的 S-强子图。令 $S=\{x,y\}\subseteq V_1\cup V_2$，给定 a 个 S-强子图 D_i，假设每个 $D_i\,(i\in\{1,2,\cdots,a\})$ 中都包含 S。根据 x,y 在顶点子集中的分布情况，分为以下两种情形进行讨论：

情形 1： x,y 属于同一个顶点子集，即 $\{x,y\}\subseteq V_1$ 或 $\{x,y\}\subseteq V_2$。不失一般性，假设 $x=u_1$，$y=u_2$。对于每一个 $i\in\{1,2,\cdots,a\}$，令 D_i 的顶点集为 $\mathrm{V}(D_i)=\{u_1,u_2,v_i\}$，弧集为 $\mathrm{A}(D_i)=\{u_1v_i,v_iu_1,u_2v_i,v_iu_2\}$。显然 D 中有 a 个内部不交的 S-强子图。

情形 2： x,y 属于不同的顶点子集，即 $x\subseteq V_1,y\subseteq V_2$ 或 $x\subseteq V_2,y\subseteq V_1$。不失一般性，我们假设 $x=u_1$，$y=v_1$。令 D_1 包含顶点 x,y 和边 u_1v_1,v_1u_1。对于任意的 $i\in\{2,\cdots,a\}$，令 D_i 的顶点集为 $\mathrm{V}(D_i)=\{u_1,v_1,u_i,v_i\}$，弧集为 $\mathrm{A}(D_i)=\{u_1v_i,v_iu_i,u_iv_1,v_1u_i,u_iv_i,v_iu_1\}$。同样可以在 D 中找到 a 个内部不交的 S-强子图。

在两种情况中找出内部不交的 S-强子图最小值可以得到 $\kappa_2(D)=a$。定理得证。□

进一步的，当 $k=3$ 时能够得到下列定理。

定理 2.7. 对于任意给定的两个正整数 a 和 b，其中 $3<a\le b$，我们有 $\kappa_3\left(\vec{K}_{a,b}\right)=a-1$。

证明： 令 $D\cong\vec{K}_{a,b}$，将 $V(D)$ 根据两个独立集划分为 V_1 和 V_2 两个子集，其中 $V_1=\{u_i\,|1\le i\le a\}$，$V_2=\left\{v_j\,|1\le j\le b\right\}$。根据引理 2.1，我们有 $\kappa_3(D)\le\lambda_3(D)\le\min\left\{\delta^+(D),\delta^-(D)\right\}=a$，下面要在 D 中找到至少 $a-1$ 个内部不交的 S-强子图。令 $S\subseteq V(D)$ 且 $|S|=3$，给定 a 个 S-强子图 D_i，假设每个

$D_i\left(i\in\{1,2,\cdots,a\}\right)$中都包含 S。根据 x,y 在顶点子集中的分布情况，分为以下两种情形进行讨论：

情形 1： S 中的顶点在同一个顶点子集中，即 $S\subseteq V_1$ 或 $S\subseteq V_2$。不失一般性，假设 $S=\{u_1,u_2,u_3\}$，对于每一个 $i\in\{1,2,\cdots,a\}$，D_i 为 D 中的一个 S-强子图，其中 D_i 的顶点集 $V(D_i)=\{u_1,u_2,u_3,v_i\}$，弧集 $A(D_i)=\{u_1v_i,v_iu_1,u_2v_i,v_iu_2,u_3v_i,v_iu_3\}$。容易得到 D 中存在 a 个所需的内部不交强子图 D_i。

情形 2： S 中的顶点不在同一个顶点子集中，不失一般性，进一步将其分成 $S=\{u_1,v_1,v_2\}$ 和 $S=\{u_1,u_2,v_1\}$ 两种情况来考虑。

情形 2.1 当 $S=\{u_1,v_1,v_2\}$ 时，D_1 的顶点集 $V(D_1)=\{u_1,v_1,v_2\}$，弧集 $A(D_1)=\{u_1v_1,v_1u_1,u_1v_2,v_2u_1\}$。对于剩下的每个 $i\in\{2,\cdots,a\}$，令 D_i 为顶点集 $V(D_i)=\{u_1,u_i,v_1,v_2,v_{i+1}\}$，弧集 $A(D_i)=\{u_1v_{i+1},v_{i+1}u_1,v_1u_i,u_iv_1,v_2u_i,u_iv_2,u_iv_{i+1},v_{i+1}u_i\}$ 的 S-强子图。此时 D 中共有 a 个内部不交强子图 D_i 符合所求。

情形 2.2 当 $S=\{u_1,u_2,v_1\}$ 时，和情形 2.1 类似，但我们只能找到 $a-1$ 个内部不交强子图。假设 D 中有 a 个内部不交强子图 D_i，根据集合 S 包含的顶点，我们可以得到一个包含四条弧 $u_1v_1,v_1u_1,u_1v_2,v_2u_1$ 的 S-强子图，设其为 D_1。为使每个强子图 $D_i\left(i\in\{1,2,\cdots,a\}\right)$ 为内部不交的，对于任意 $i\geq 2$ 的强子图 D_i，令其顶点集为 $\{u_1,u_2,u_{i+1},v_1,v_i\}$，弧集为 $\{v_1u_{i+1},u_{i+1}v_1,u_1v,v_iu_1,u_2v_i,v_iu_2,v_iu_{i+1},u_{i+1}v_i\}$。此时顶点 v_1 的度为 $2(a+1)$，与事实不符。因此 D 中只有 $a-1$ 个内部不交强子图。

综上所述，我们可以得到 $\kappa_3(D)=\min\{\kappa_S(D)\mid S\subseteq V(D),|S|=3\}=a-1$。□

通过引理 2.1 和引理 2.2 可以得到 $\kappa_k\left(\vec{K}_{a,b}\right)$ 的界，由定理 2.5 和定理 2.5 可以得到上界是紧的。

推论 2.8. 对于任意给定的完全有向二部图 $\vec{K}_{a,b}$ 满足 $1\leq\kappa_k\left(\vec{K}_{a,b}\right)\leq a$ （$2\leq k\leq a+b$），当 $k=2$ 或 $k=a+b$ 时上界是可达的。

3. 总结和展望

本文找出了任意完全有向二部图 $\vec{K}_{a,b}$ 的界，确定了 $k=2,k=3$ 和 $k=a+b$ 时 $\kappa_k\left(\vec{K}_{a,b}\right)$ 的精确值。进一步，我们还可以研究若给出其他 k 值是否能够计算相应 $\kappa_k\left(\vec{K}_{a,b}\right)$ 的精确值，同时考虑在此情况下能否找出 $\vec{K}_{a,b}$ 更紧的下界。如果无法计算 $\kappa_k\left(\vec{K}_{a,b}\right)$ 的精确值，我们可以考虑是否能够找出一个算法证明其是多项式时间内可解的问题。

参考文献

[1] Bang-Jensen, J. and Gutin, G.Z. (2009) Digraphs: Theory, Algorithms and Applications. 2nd Edition, Springer, London. https://doi.org/10.1007/978-1-84800-998-1

[2] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. (2008) Graph Theory, Springer, Berlin.

[3] Hager, M. (1985) Pendant Tree-Connectivity. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series B*, **38**, 179-189. https://doi.org/10.1016/0095-8956(85)90083-8

[4] Li, S., Li, W. and Li, X. (2012) The Generalized Connectivity of Complete Bipartite Graphs, *Ars Combinatoria*, **104**, 65-79.

[5] Li, X. and Mao, Y. (2016) Generalized Connectivity of Graphs, Springer, Switzerland. https://doi.org/10.1007/978-3-319-33828-6

[6] Sun, Y. and Gutin, G. (2021) Strong Subgraph Connectivity of Digraphs. *Graphs and Combinatorics*, **37**, 951-970. https://doi.org/10.1007/s00373-021-02294-w

[7] Sun, Y.F. and Gutin, G., Yeo, A. and Zhang, X.Y. (2019) Strong Subgraph *k*-Connectivity. *Journal of Graph Theory*, **92**, 5-18. https://doi.org/10.1002/jgt.22437

[8] Sun, Y.F. and Gutin, G. (2021) Strong Subgraph Connectivity of Digraphs: A Survey. *Journal of Interconnection Networks*, **21**, Article No. 2142004. https://doi.org/10.1142/S0219265921420044

[9] Ng, L.L. (1997) Hamiltonian Decomposition of Complete Regular Multipartite Digraphs. Discrete Mathematics, **177**, 279-285. https://doi.org/10.1016/S0012-365X(97)00017-4

[10] Tillson, T.W. (1980) A Hamiltonian Decomposition of K_{2m}^*, $2m \geq 8$. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series B*, **29**, 68-74. https://doi.org/10.1016/0095-8956(80)90044-1

[11] Sun, Y., Gutin, G. and Zhang, X. (2021) Packing Strong Subgraph in Digraphs.