Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2022, 11(6), 4079-4087**
Published Online June 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.116436

Hans汉斯

带阻尼项三维新MHD方程弱解的存在性

宋　悦

辽宁师范大学数学学院，辽宁　大连

收稿日期：2022年5月29日；录用日期：2022年6月21日；发布日期：2022年6月30日

摘　要

本文给出了带阻尼项的新MHD方程在三维空间中弱解的存在性。我们通过标准Galerkin近似方法、Hölder不等式、Gromwall不等式、Schwartz不等式等基本不等式以及Parseval等式、先验估计和Fourier变换等得到弱解的存在性。

关键词

新MHD方程，阻尼项，弱解

The Existence of Weak Solutions for the New MHD Equations with Damping in the Three Dimensional Space

Yue Song

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: May 29th, 2022; accepted: Jun. 21st, 2022; published: Jun. 30th, 2022

Abstract

In this paper, we show the existence of weak solutions for the new MHD equations with damping in the three dimensional space. The existence of the weak solutions is proved by standard Galerkin approximation method, Hölder inequality, Gromwall inequality, Schwartz inequality and Parseval equality, prior estimation and Fourier transform.

文章引用: 宋悦. 带阻尼项三维新 MHD 方程弱解的存在性[J]. 应用数学进展, 2022, 11(6): 4079-4087.
DOI: 10.12677/aam.2022.116436

Keywords

New MHD Equations, Damping Term, Weak Solutions

1. 介绍

本文考虑三维空间中带有阻尼项的新 MHD 方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+(u\cdot\nabla)u+\alpha|u|^{\beta-1}u=\nu\Delta u-\dfrac{1}{\rho_0}\nabla P+\dfrac{\rho_e}{\rho_0}u\times curlA+f(x), & (x,t)\in R^3\times(0,T),\\ \dfrac{\partial^2 A}{\partial t^2}=\dfrac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\Delta A+\dfrac{\rho_e}{\varepsilon_0}u-\nabla\Phi, & (x,t)\in R^3\times(0,T),\\ \nabla\cdot u=0,\ \ \nabla\cdot A=0, & (x,t)\in R^3\times(0,T),\\ u(0,x)=\varphi(x),\ \ A(0,x)=\psi(x),\ \ A_t(0,x)=\eta(x), & x\in R^3,\\ |u|\to 0,\ \ |A|\to 0, & 当|x|\to\infty \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $T>0$ 是时间，$u(x,t)=(u_1(x,t),u_2(x,t),u_3(x,t))$，$A(x,t)=(A_1(x,t),A_2(x,t),A_3(x,t))$，$p(x,t)$ 分别表示速度场、磁势和压强函数，$\Phi=\dfrac{\partial A_0}{\partial t}$ 代表带有标量电磁势 A_0 的时间变化率。常数 $\nu,\rho_0,\rho_e,\varepsilon_0,\mu_0$ 分别表示运动粘性系数、质量密度、等效电荷密度、介电常数和自由空间磁导率。在阻尼项中，是 α,β 两个常数且 $\beta\geq 1$，$\alpha>0$。

不可压缩新 MHD 方程是一个混合模型，结合了 Navier-Stokes 方程和双曲型方程，Liu 和 Yang 在[1]中基于牛顿第二定律和 Maxwell 电磁场方程的基本物理原理，提出了一种新的三维不可压缩磁流体动力学模型。该模型描述了移动导电流体流动与电磁场之间的相互作用，并利用 Galerkin 技术和能量估计，得到了有界边界情况下三维 MHD 模型初值问题的整体弱解。Chandrasekhar [2]建立了 N 维($N\geq 2$)古典 MHD 模型，并且关于解的存在性已经有了大量的数学研究。之后 Duvaut 和 Loins [3]构造了在有界边界情况下三维古典 MHD 模型初值问题的整体弱解和局部强解。[4]中研究了在有界边界情况下二维新 MHD 模型初值问题的整体强解的存在性和正则性。关于更多 Navier-Stokes 方程和 MHD 方程的研究，请读者参考[5]-[12]。

接下来我们将介绍一些函数空间的符号。当 $1\leq p\leq\infty$ 时，$L^p(R^3)$ 表示标量函数和向量值函数的 Lebesgue 空间，其范数为 $\|\cdot\|_p$。$C_{0,\sigma}^\infty(R^3)$ 表示 C^∞ 实向量值函数 $u=(u_1,u_2,u_3)$ 的集合，在 R^3 中具有紧支集，使得 $\operatorname{div}u=0$。当 $1<p<\infty$ 时，我们定义函数空间 $L_\sigma^p(R^3)$ 是 $C_{0,\sigma}^\infty(R^3)$ 在 $L^p(R^3)$ 上的闭包，其范数为 $\|\cdot\|_p$。$W^{k,p}(R^3)$ 是 Sobolev 空间，通常范数是 $\|\cdot\|_{k,p}$，并且 $W_{0,\sigma}^{k,p}(\Omega)$ 是 $C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)$ 关于 $\|\cdot\|_{k,p}$ 的闭包。当 $p=2$ 时，我们用 $H^k(R^3)$ 来表示 $W^{k,2}(R^3)$。当 $1\leq p\leq\infty$ 时，X 是 Banach 空间，我们用 $L^p(0,T;X)$ 表示，其范数为 $\|\cdot\|_X$。

我们的主要结论为如下定理：

定理 1 假设 $\beta\geq 1$ 并且 $u_0\in L_\sigma^2(R^3)$，$A_{t0}\in L_\sigma^2(R^3)$，$A_0\in W_{0,\sigma}^{1,2}(R^3)$。那么对于任意的 $T>0$，问题(1.1)

存在弱解 (u,A)，使得

$$u\in L^{\infty}\left(0,T;L_{\sigma}^{2}\left(R^{3}\right)\right)\cap L^{2}\left(0,T;W_{0,\sigma}^{1,2}\left(R^{3}\right)\right)\cap L^{\beta+1}\left(0,T;L^{\beta+1}\left(R^{3}\right)\right),$$
$$A\in L^{\infty}\left(0,T;W_{0,\sigma}^{1,2}\left(R^{3}\right)\right),\ A_{t}\in L^{\infty}\left(0,T;L_{\sigma}^{2}\left(R^{3}\right)\right) \tag{1.2}$$

此时

$$\|u(t)\|^{2}+\|A_{t}(t)\|^{2}+2\nu\int_{0}^{T}\|\nabla u\|^{2}\mathrm{d}\tau+2\alpha\int_{0}^{T}|u|^{\beta-1}u\mathrm{d}\tau+\frac{1}{\varepsilon_{0}\mu_{0}}\|\nabla A\|^{2}$$
$$\leq\|u(0)\|^{2}+\|A_{t}(0)\|^{2}+\frac{1}{\varepsilon_{0}\mu_{0}}\|\nabla A(0)\|^{2}+\frac{\rho_{e}}{\varepsilon_{0}\mu_{0}}\left(\int_{0}^{T}\|u(\tau)\|^{2}\mathrm{d}\tau+\int_{0}^{T}\|A_{t}(\tau)\|^{2}\mathrm{d}\tau\right) \tag{1.3}$$

我们给出带有阻尼项的新 MHD 方程在 R^3 中弱解的存在性，主要定义及引理如下。

2. 准备知识

本节主要介绍了带有阻尼项新 MHD 方程弱解的定义以及在证明中用到的重要引理。

定义 2.1

1) $u\in L^{\infty}\left(0,T;L_{\sigma}^{2}\left(R^{3}\right)\right)\cap L^{2}\left(0,T;W_{0,\sigma}^{1,2}\left(R^{3}\right)\right)\cap L^{\beta+1}\left(0,T;L^{\beta+1}\left(R^{3}\right)\right),$
$A\in L^{\infty}\left(0,T;W_{0,\sigma}^{1,2}\left(R^{3}\right)\right),\ A_{t}\in L^{\infty}\left(0,T;L_{\sigma}^{2}\left(R^{3}\right)\right)$

2) 对于任意的 $\phi\in C_{0,\sigma}^{\infty}\left(\left[0,T\right]\times R^{3}\right)$，其中 $\phi(\cdot,T)=0$，我们有

$$-\int_{0}^{T}(u,\phi_{t})\mathrm{d}t+\nu\int_{0}^{T}\int_{R^{3}}\nabla u:\nabla\phi\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\int_{0}^{T}\int_{R^{3}}(u\cdot\nabla)u\phi\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\alpha\int_{0}^{T}\int_{R^{3}}|u|^{\beta-1}u\phi\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$
$$-\int_{0}^{T}\int_{R^{3}}\frac{\rho_{e}}{\rho_{0}}u\times curlA\cdot\phi\mathrm{d}x\mathrm{d}t=(u_{0},\phi_{0}), \tag{2.1}$$

$$-\int_{0}^{T}(A_{t},\phi_{t})\mathrm{d}t+\int_{0}^{T}\int_{R^{3}}\left(\frac{1}{\varepsilon_{0}\rho_{0}}\nabla A\cdot\nabla\phi-\frac{\rho_{e}}{\varepsilon_{0}\rho_{0}}u\cdot\phi\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=(A_{t0},\phi_{0}) \tag{2.2}$$

3) $\mathrm{div}u(x,t)=0$， $\mathrm{div}A(x,t)=0$ 对几乎处处的 $(x,t)\in R^{3}\times[0,T)$。

引理 2.2 设 X_0,X 是 Hilbert 空间并且满足 X_0 紧嵌入到 X 中。设 $0<\gamma\leq1$ 且 $(\upsilon_j)_{j=1}^{\infty}$ 是一个属于 $L^2(R;X_0)$ 的序列，满足

$$\sup_{j}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\|\upsilon_{j}\|_{X_{0}}^{2}\mathrm{d}t\right)<\infty,\ \sup_{j}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|\tau|^{2\gamma}\|\hat{\upsilon}_{j}\|_{X}^{2}\mathrm{d}\tau\right)<\infty,$$

此时 $\hat{\upsilon}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}\upsilon(t)\exp(-2\pi i\tau t)\mathrm{d}t$ 是 $\upsilon(t)$ 关于时间变量上的傅里叶变换。那么对于 $\upsilon\in L^2(R;X)$ 就会存在一个序列 $(\upsilon_j)_{j=1}^{\infty}$ 在 $L^2(R;X)$ 上强收敛。

引理 2.3 假设 $\beta\geq1$ 并且 $u_0\in L_{\sigma}^{2}(R^3)$， $A_{t0}\in L_{\sigma}^{2}(R^3)$， $A_0\in W_{0,\sigma}^{1,2}(R^3)$。那么对于任意的 $T>0$，我们有

$$\|u_{m}(t)\|^{2}+\|A_{m}'(t)\|^{2}+2\nu\int_{0}^{T}\|\nabla u_{m}\|^{2}\mathrm{d}\tau+2\alpha\int_{0}^{T}|u_{m}|^{\beta-1}u_{m}\mathrm{d}\tau+\frac{1}{\varepsilon_{0}\mu_{0}}\|\nabla A_{m}\|^{2}$$
$$\leq\|u_{m}(0)\|^{2}+\|A_{m}'(0)\|^{2}+\frac{1}{\varepsilon_{0}\mu_{0}}\|\nabla A_{m}(0)\|^{2}+\frac{\rho_{e}}{\varepsilon_{0}\mu_{0}}\left(\int_{0}^{T}\|u_{m}(\tau)\|^{2}\mathrm{d}\tau+\int_{0}^{T}\|A_{m}'(\tau)\|^{2}\mathrm{d}\tau\right)$$

3. 弱解存在性的证明

在本节中我们将证明定理 1。

证明：我们利用 Galerkin 近似来证明这个定理。因为 $W_{0,\sigma}^{1,2}$ 是可分的，$C_{0,\sigma}^{\infty}$ 在 $W_{0,\sigma}^{1,2}$ 中稠密，因此存在 $C_{0,\sigma}^{\infty}$ 的元素序列 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m$。对于每个 m 我们定义近似解 u_m,A_m 如下：

$$u_m=\sum_{i=1}^{m}g_{im}(t)\omega_i(x),\quad A_m=\sum_{i=1}^{m}h_{im}(t)\omega_i(x)$$

和

$$\begin{aligned}&\left(u_m'(t),\omega_j\right)+\nu\left(\nabla u_m(t),\nabla\omega_j\right)+\left(u_m(t)\cdot\nabla u_m(t),\omega_j\right)+\left(\alpha\left|u_m\right|^{\beta-1}u_m(t),\omega_j\right)\\&-\left(\frac{\rho_e}{\rho_0}u_m(t)\times curlA_m,\omega_j\right)=0,\end{aligned}\tag{2.3}$$

$$\left(A_m''(t),\omega_j\right)+\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\left(\nabla A_m(t),\nabla\omega_j\right)-\frac{\rho_e}{\varepsilon_0\mu_0}\left(u_m(t),\omega_j\right)=0,\tag{2.4}$$

其中 $t\in[0,T]$， $j=1,2,\cdots,m$，并且在 L_σ^2 中当 $m\to\infty$ 时 $u_{0m}\to u_0$， $A_{t0m}\to A_{t0}$。

我们对近似解 u_m,A_m 有如下先验估计。

将(2.3)，(2.4)的两端分别乘以 $g_{im}(t),h_{im}'(t)$，对于 $j=1,\cdots,m$ 求和有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|u_m\right\|_{L^2}^2+\nu\left\|\nabla u_m\right\|_{L^2}^2+\alpha\left\|u_m\right\|_{\beta+1}^{\beta+1}\le 0,\tag{2.5}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left\|A_m'\right\|_{L^2}^2+\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\left\|\nabla A_m\right\|_{L^2}^2\right)\le\int_{R^3}\frac{\rho_e}{\varepsilon_0\mu_0}u_m\cdot A_m'\mathrm{d}x,\tag{2.6}$$

其中

$$\left(\frac{\rho_e}{\rho_0}u_m(t)\times curlA_m\right)\cdot u_m=\frac{\rho_e}{\rho_0}\int_{R^3}\left(u_m\times\left(\nabla\times A_m\right)\right)u_m\mathrm{d}x=0,$$

$$\begin{aligned}\left(\left(u_m(t)\cdot\nabla\right)u_m(t),u_m\right)&=\int_{R^3}\left(u_m(t)\cdot\nabla u_m(t)\right)u_m\mathrm{d}x=\int_{R^3}u_m(t)\cdot\nabla\frac{\left|u_m(t)\right|^2}{2}\mathrm{d}x\\&=-\int_{R^3}\left(\nabla\cdot u_m(t)\right)\frac{\left|u_m(t)\right|^2}{2}\mathrm{d}x=0\end{aligned}$$

将(2.5)和(2.6)相加，得

$$\begin{aligned}&\left\|u_m(t)\right\|^2+\left\|A_m'(t)\right\|^2+2\nu\int_0^T\left\|\nabla u_m\right\|^2\mathrm{d}\tau+2\alpha\int_0^T\left|u_m\right|^{\beta-1}u_m\mathrm{d}\tau+\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\left\|\nabla A_m\right\|^2\\&\le\frac{2\rho_e}{\varepsilon_0\mu_0}\int_0^T\int_{R^3}u_m\cdot A_m'\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau,\end{aligned}$$

利用 Hölder 不等式，我们得到

$$\begin{aligned}&\left\|u_m(t)\right\|^2+\left\|A_m'(t)\right\|^2+2\nu\int_0^T\left\|\nabla u_m\right\|^2\mathrm{d}\tau+2\alpha\int_0^T\left|u_m\right|^{\beta-1}u_m\mathrm{d}\tau+\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\left\|\nabla A_m\right\|^2\\&\le\left\|u_m(0)\right\|^2+\left\|A_m'(0)\right\|^2+\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\left\|\nabla A_m(0)\right\|^2+\frac{\rho_e}{\varepsilon_0\mu_0}\left(\int_0^T\left\|u_m(\tau)\right\|^2\mathrm{d}\tau+\int_0^T\left\|A_m'(\tau)\right\|^2\mathrm{d}\tau\right)\end{aligned}\tag{2.7}$$

显然地是

$$\left\|u_m(0)\right\|=\left\|\varphi_m\right\|\le\left\|\varphi\right\|,\ \left\|A_m'(0)\right\|=\left\|\eta_m\right\|\le\left\|\eta\right\|,\ \left\|\nabla A_m(0)\right\|=\left\|\nabla\psi_m\right\|\le\left\|\nabla\psi\right\|$$

利用 Gromwall 不等式，我们得到以下估计

$$
\begin{aligned}
&\left\|u_m(t)\right\|^2+\left\|A_m'(t)\right\|^2 \le \left(\|\phi\|+\|\eta\|+\|\nabla\psi\|\right)\mathrm{e}^{(1+\rho_e/\varepsilon_0\mu_0)T},\\
&\left\|\nabla A_m(t)\right\|^2 \le \left(\|\phi\|+\|\eta\|+\|\nabla\psi\|\right)\mathrm{e}^{(1+\rho_e/\varepsilon_0\mu_0)T},\\
&\int_0^T\left\|\nabla u_m\right\|^2\mathrm{d}\tau \le \left(\|\phi\|+\|\eta\|+\|\nabla\psi\|\right)\mathrm{e}^{(1+\rho_e/\varepsilon_0\mu_0)T},\\
&\int_0^T\left\|u_m\right\|_{\beta+1}^{\beta+1}\mathrm{d}\tau \le \left(\|\phi\|+\|\eta\|+\|\nabla\psi\|\right)\mathrm{e}^{(1+\rho_e/\varepsilon_0\mu_0)T}
\end{aligned}
$$

上式为(2.7)左半部分，所以等式成立，则引理 2.3 证明完毕。

利用标准方法和引理 2.4，我们得到了近似解的整体存在性：

$$
\begin{aligned}
&u_m\in L^\infty\left(0,T;L_\sigma^2\left(R^3\right)\right)\cap L^2\left(0,T;W_{0,\sigma}^{1,2}\left(R^3\right)\right)\cap L^{\beta+1}\left(0,T;L^{\beta+1}\left(R^3\right)\right),\\
&A_m\in L^\infty\left(0,T;W_{0,\sigma}^{1,2}\left(R^3\right)\right),\ A_m'\in L^\infty\left(0,T;L_\sigma^2\left(R^3\right)\right)
\end{aligned}
$$

然后，我们将利用引理 2.3 证明 u_m 在 $L^2\cap L^\beta\left(\left[0,T\right]\times\Omega\right)$ 上强收敛且 $\Omega\in R^3$。为此，我们用 $\tilde{u}_m$ 和 $\tilde{A}_m$ 来表示从 R 到 $W_{0,\sigma}^{1,2}$ 的函数，等于 u_m 在 $\left[0,T\right]$ 上和在这个区间的补集上为零。相似地，我们定义将 $\tilde{g}_{im}(t)$ 和 $\tilde{h}_{im}(t)$ 分别延拓到 R，其中在 $t\in R\setminus\left[0,T\right]$ 上定义 $\tilde{g}_{im}(t)=0$，$\tilde{h}_{im}(t)=0$。$\tilde{u}_m$ 和 $\tilde{g}_{im}(t)$，$\tilde{A}_m$ 和 $\tilde{h}_{im}(t)$ 关于时间变量的 Fourier 变换分别用 $\hat{\tilde{u}}_m$ 和 $\hat{\tilde{g}}_{im}(t)$，$\hat{\tilde{A}}_m$ 和 $\hat{\tilde{h}}_{im}(t)$ 来表示。

近似解 $\tilde{u}_m$ 满足

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\tilde{u}_m,\omega_j\right)&=\nu\left(\nabla\tilde{u}_m(t),\nabla\omega_j\right)+\left(\tilde{u}_m(t)\cdot\nabla\tilde{u}_m(t),\omega_j\right)+\left(\alpha\left|\tilde{u}_m\right|^{\beta+1}\tilde{u}_m(t),\omega_j\right)\\
&\quad+\left(\frac{\rho_e}{\rho_0}\tilde{u}_m(t)\times curl\tilde{A}_m,\omega_j\right)+\left(u_{0m},\omega_j\right)\delta_0-\left(u_m(T),\omega_j\right)\delta_T\\
&\equiv\left(\tilde{f},\omega_j\right)+\left(\alpha\left|\tilde{u}_m\right|^{\beta+1}\tilde{u}_m(t),\omega_j\right)+\left(u_{0m},\omega_j\right)\delta_0-\left(u_m(T),\omega_j\right)\delta_T,\ \ j=1,2,\cdots,m
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

其中的 δ_0 和 δ_T 分别是 0 和 T 处的 Dirichlet 函数分布，并且

$$
\left(\tilde{f}_m,\omega_j\right)=\nu\left(\nabla\tilde{u}_m(t),\nabla\omega_j\right)+\left(\tilde{u}_m(t)\cdot\nabla\tilde{u}_m,\omega_j\right)+\left(\frac{\rho_e}{\rho_0}\tilde{u}_m(t)\times curl\tilde{A}_m,\omega_j\right),
$$

对时间变量进行 Fourier 变换，(2.8)给出

$$
2\pi i\tau\left(\hat{\tilde{u}}_m,\omega_j\right)=\left(\hat{\tilde{f}}_m,\omega_j\right)+\alpha\left(\widehat{\left|\tilde{u}_m\right|^{\beta-1}\tilde{u}_m}(t),\omega_j\right)+\left(u_{0m},\omega_j\right)-\left(u_m(T),\omega_j\right)\exp\left(-2\pi iT\tau\right),\tag{2.9}
$$

其中 $\hat{\tilde{f}}_m$ 表示 $\tilde{f}_m$ 的 Fourier 变换。将(2.9)的两端同乘 $\hat{\tilde{g}}_{jm}(\tau)$，得到

$$
2\pi i\tau\left\|\hat{\tilde{u}}_m(\tau)\right\|_2^2=\left(\hat{\tilde{f}}_m(\tau),\hat{\tilde{u}}_m\right)+\alpha\left(\widehat{\left|\tilde{u}_m\right|^{\beta+1}\tilde{u}_m}(\tau),\hat{\tilde{u}}_m\right)+\left(u_{0m},\hat{\tilde{u}}_m\right)-\left(u_m(T),\hat{\tilde{u}}_m\right)\exp\left(-2\pi iT\tau\right),\tag{2.10}
$$

对任意的 $v\in L^2\left(0,T;H_0^1\right)\cap L^{\beta+1}\left(0,T;L^{\beta+1}\right)$，我们有

$$
\left(f_m(t),v\right)=\left(\nabla u_m,\nabla v\right)+\left(u_m\cdot\nabla u_m,v\right)+\left(u_m\times curlA_m,v\right),
$$

其中

$$
\left(\nabla u_m,\nabla v\right)=\left\|\nabla u_m\right\|_{L^2}\cdot\left\|\nabla v\right\|_{L^2}\le C\left\|\nabla u_m\right\|_{L^2}\left\|v\right\|_{H^1},
$$

$$
\begin{aligned}
\left(u_m\cdot\nabla u_m,v\right)&=\left(u_m\otimes u_m\right):\nabla v=\left\|u_m\otimes u_m\right\|_{L^2}\left\|\nabla v\right\|_{L^2}\le\left\|u_m\right\|_{L^4}^2\left\|\nabla v\right\|_{L^2}\\
&\le C\left\|u_m\right\|_{L^2}\left\|\nabla u_m\right\|_{L^2}\left\|v\right\|_{H^1}\le C\left(\left\|u_m\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla u_m\right\|_{L^2}^2\right)\left\|v\right\|_{H^1},
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}(u_m \times curlA_m, v) &\le \|u_m\|_{L^4} \|\nabla A_m\|_{L^2} \|v\|_{L^4} \le C\|\nabla u_m\|_{L^2} \|\nabla A_m\|_{L^2} \|v\|_{H^1} \\ &\le C\left(\|\nabla u_m\|_{L^2}^2 + \|\nabla A_m\|_{L^2}^2\right)\|v\|_{H^1}\end{aligned}$$

所以可得

$$\left(f_m(t), v\right) \le C\left(\|u_m\|_2^2 + \|\nabla u_m\|_2^2 + \|\nabla u_m\|_2 + \|\nabla A_m\|_2^2\right)\|v\|_{H^1}$$

因此对于任何给定的$T>0$，有

$$\int_0^T \|f_m(t)\|_{H^{-1}} \mathrm{d}t \le \int_0^T C\left(\|u_m\|_2^2 + \|\nabla u_m\|_2^2 + \|\nabla u_m\|_2 + \|\nabla A_m\|_2^2\right)\mathrm{d}t \le C(T),$$

因此

$$\sup_{\tau \in R} \left\|\hat{\tilde{f}}_m(\tau)\right\|_{H^{-1}} \le \int_0^T \|f_m(t)\|_{H^{-1}} \mathrm{d}t \le C(T)$$

此外，从引理 2.3 可以得出

$$\int_0^T \left\||u_m|^{\beta-1} u_m\right\|_{\frac{\beta+1}{\beta}} \mathrm{d}t \le \int_0^T \|u_m\|_{\beta+1}^{\beta} \mathrm{d}t \le C(T),$$

这意味着

$$\sup_{\tau \in R} \left\|\widehat{|\tilde{u}_m|^{\beta-1} \tilde{u}}(\tau)\right\|_{\frac{\beta+1}{\beta}} \le C(T)$$

从引理 2.2 中，我们知道

$$\|u_m(0)\|_2 \le C,\ \|u_m(T)\|_2 \le C \tag{2.11}$$

我们从(2.6)~(2.9)可以推导出

$$|\tau|\left\|\hat{\tilde{u}}_m(\tau)\right\|_2^2 \le C\left(\left\|\hat{\tilde{u}}_m(\tau)\right\|_{H^1} + \left\|\hat{\tilde{u}}_m(\tau)\right\|_{\beta+1}\right)$$

对于任意固定的γ，$0<\gamma<\frac{1}{4}$，我们可以得到$|\tau|^{2\gamma} \le C\frac{1+|\tau|}{1+|\tau|^{1-2\gamma}}$，$\forall \tau \in R$。因此

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^{2\gamma} \left\|\hat{\tilde{u}}_m(\tau)\right\|_2^2 \mathrm{d}\tau &\le C\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+|\tau|}{1+|\tau|^{1-2\gamma}} \left\|\hat{\tilde{u}}_m(\tau)\right\|_2^2 \mathrm{d}\tau \\ &\le C\int_{-\infty}^{+\infty} \left\|\hat{\tilde{u}}_m(\tau)\right\|_2^2 \mathrm{d}\tau + C\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left\|\hat{\tilde{u}}_m(\tau)\right\|_{H^1}}{1+|\tau|^{1-2\gamma}} \mathrm{d}\tau + C\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left\|\hat{\tilde{u}}_m(\tau)\right\|_{\beta+1}}{1+|\tau|^{1-2\gamma}} \mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{2.12}$$

由于 Parseval 等式和引理 2.3，(2.12)右边的第一个积分一致有界于m。

通过 Schwartz 不等式、Parseval 等式和引理 2.3，我们有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left\|\hat{\tilde{u}}_m(\tau)\right\|_{H^1}}{1+|\tau|^{1-2\gamma}} \mathrm{d}\tau \le \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\tau}{\left(1+|\tau|^{1-2\gamma}\right)^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \|u_m(\tau)\|_{H^1}^2 \mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{2}} \le C(T), \tag{2.13}$$

其中$0<\gamma<\frac{1}{4}$，类似地，当$0<\gamma<\frac{1}{2(\beta+1)}$时，我们有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left\|\hat{\tilde{u}}_m(\tau)\right\|_{\beta+1}}{1+|\tau|^{1-2\gamma}}\mathrm{d}\tau\le\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\tau}{\left(1+|\tau|^{1-2\gamma}\right)^{\frac{\beta+1}{\beta}}}\right)^{\frac{\beta}{\beta+1}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\left\|\hat{\tilde{u}}_m(\tau)\right\|_{\beta+1}^{\beta+1}\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{\beta+1}}$$
$$\le C\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\left\|\tilde{u}_m(\tau)\right\|_{\beta+1}^{\frac{\beta+1}{\beta}}\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{\beta}{\beta+1}}\le CT^{\frac{\beta-1}{\beta+1}}\left(\int_0^T\left\|u_m(\tau)\right\|_{\beta+1}^{\beta+1}\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{\beta+1}} \tag{2.14}$$

从(2.12)中可以得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\tau|^{2\gamma}\left\|\hat{\tilde{u}}_m(\tau)\right\|_2^2\mathrm{d}\tau\le C(T) \tag{2.15}$$

由于引理 2.2 存在一个函数 $u(x,t)$，使得

$$u\in L^{\infty}\left(0,T;L_{\sigma}^2\left(R^3\right)\right)\cap L^2\left(0,T;W_{0,\sigma}^{1,2}\left(R^3\right)\right)\cap L^{\beta+1}\left(0,T;L^{\beta+1}\left(R^3\right)\right) \tag{2.16}$$

并且存在一个可以由自己表示的序列 $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$，使得在 $L^{\infty}\left(0,T;L_{\sigma}^2\left(R^3\right)\right)$ 上 u_m 弱$*$收敛于 u；在 $L^2\left(0,T;W_{0,\sigma}^{1,2}\left(R^3\right)\right)$ 上 u_m 弱收敛于 u 并且在 $L^{\beta+1}\left(0,T;L^{\beta+1}\left(R^3\right)\right)$ 上 u_m 收敛于 u。我们选择有光滑边界的 $\Omega_1\subset\Omega_2\subset\Omega_3\subset\cdots$，且满足 $\bigcup_{i=1}^{\infty}\Omega_i=R^3$。对于任意固定的 $i=1,2,\cdots$，在引理 2.2 中我们取 $X_0=W_0^{1,2}(\Omega_i)$，$X=L^2(\Omega_i)$，然而对于引理 2.2，引理 2.3 以及(2.15)，我们得到存在一个可以由自己表示的序列 $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$，使得在 $L^2\left(0,T;L^2(\Omega_i)\right)$ 上 u_m 强收敛于 u。通过对角线原则，因此在 $L^p\left(0,T;L_{loc}^p\left(R^3\right)\right)$ 上存在 $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ 的一个子序列 $\{u_{mj}\}_{j=1}^{\infty}$，使得在 $L^2\left(0,T;L^2(\Omega_i)\right)$ 上 u_{mj} 强收敛于 u，其中对于任意的 $i=1,2,\cdots$。由于 $\int_0^T\int_{R^3}|u_m|^{\beta+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le C$，我们得到如果 $\beta>1$ 且 $2\le p<\beta+1$，那么在 $L^p\left(0,T;L_{loc}^p\left(R^3\right)\right)$ 上 u_{mj} 强收敛于 u。这些收敛保证了 $u(x,t)$ 是问题(1.1)1 的弱解。

近似解 $\tilde{A}_m$ 满足

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\tilde{A}_m',\omega_j\right)=\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\left(\nabla\tilde{A}_m(t),\nabla\omega_j\right)-\frac{\rho_e}{\varepsilon_0\mu_0}\left(\tilde{u}_m(t),\omega_j\right)+\left(A_{0m}',\omega_j\right)\delta_0\\&-\left(A_m'(T),\omega_j\right)\delta_T\equiv\left(\tilde{l},\omega_j\right)+\left(A_{0m}',\omega_j\right)\delta_0-\left(A_m'(T),\omega_j\right)\delta_T,\ j=1,2,\cdots,m\end{aligned} \tag{2.17}$$

其中 $\left(\tilde{l}_m,\omega_j\right)=\dfrac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\left(\nabla\tilde{A}_m(t),\nabla\omega_j\right)-\dfrac{\rho_e}{\varepsilon_0\mu_0}\left(\tilde{u}_m(t),\omega_j\right)$。

对时间变量进行 Fourier 变换，(2.17)给出

$$2\pi i\tau\left(\hat{\tilde{A}}_m',\omega_j\right)=\left(\hat{\tilde{l}},\omega_j\right)+\left(A_{0m}',\omega_j\right)-\left(A_m'(T),\omega_j\right)\exp(-2\pi iT\tau), \tag{2.18}$$

其中 $\hat{\tilde{l}}_m$ 表示 $\tilde{l}_m$ 的 Fourier 变换。将(2.18)的两端同乘 $\hat{\tilde{h}}_{jm}'(\tau)$，得到

$$2\pi i\tau\left\|\hat{\tilde{A}}_m'(\tau)\right\|_2^2=\left(\hat{\tilde{l}}_m,\hat{\tilde{A}}_m'\right)+\left(A_{0m}',\hat{\tilde{A}}_m'\right)-\left(A_m'(T),\hat{\tilde{A}}_m'\right)\exp(-2\pi iT\tau), \tag{2.19}$$

对任意的 $v\in L^2\left(0,T;H_0^1\right)$，我们有 $\left(l_m(t),v\right)=(\nabla A_m,\nabla v)-(u_m,v)$，
其中

$$(\nabla A_m,\nabla v)=\left\|\nabla A_m\right\|_{L^2}\cdot\left\|\nabla v\right\|_{L^2}\le C\left\|\nabla A_m\right\|_{L^2}\left\|v\right\|_{H^1},$$
$$(u_m,v)=\left\|u_m\right\|_{L^2}\left\|v\right\|_{L^2}\le C\left\|u_m\right\|_{L^2}\left\|v\right\|_{H^1}$$

所以可得 $\left(l_m(t),v\right)\le C\left(\left\|\nabla A_m\right\|_2+\left\|u_m\right\|_2\right)\left\|v\right\|_{H^1}$。

因此对于任何给定的 $T>0$，有

$$\int_0^T \left\|l_m(t)\right\|_{H^{-1}} \mathrm{d}t \le \int_0^T C\left(\left\|\nabla A_m\right\|_2 + \left\|u_m\right\|_2\right)\mathrm{d}t \le C(T),$$

因此

$$\sup_{\tau\in R}\left\|\hat{\tilde{l}}_m(t)\right\|_{H^{-1}} \le \int_0^T \left\|l_m(t)\right\|_{H^{-1}} \mathrm{d}t \le C(T) \tag{2.20}$$

从引理 2.3 中，我们知道

$$\left\|A_m'(0)\right\|_2 \le C,\ \left\|A_m'(T)\right\|_2 \le C \tag{2.21}$$

我们从(2.19)~(2.21)可以推导出 $|\tau|\left\|\hat{\tilde{A}}_m'(\tau)\right\|_2^2 \le C\left\|\hat{\tilde{A}}_m'(\tau)\right\|_{H^1}$。

对于任意固定的 γ，$0<\gamma<\dfrac{1}{4}$，我们可以得到 $|\tau|^{2\gamma} \le C\dfrac{1+|\tau|}{1+|\tau|^{1-2\gamma}}$，$\forall\tau\in R$。

因此

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\tau|^{2\gamma}\left\|\hat{\tilde{A}}_m'(\tau)\right\|_2^2 \mathrm{d}\tau \le C\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+|\tau|}{1+|\tau|^{1-2\gamma}}\left\|\hat{\tilde{A}}_m'(\tau)\right\|_2^2 \mathrm{d}\tau \le C\int_{-\infty}^{+\infty}\left\|\hat{\tilde{A}}_m'(\tau)\right\|_2^2 \mathrm{d}\tau + C\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left\|\hat{\tilde{A}}_m'(\tau)\right\|_{H^1}}{1+|\tau|^{1-2\gamma}}\mathrm{d}\tau \tag{2.22}$$

由于 Parseval 等式和引理 2.4，(2.22)右边的第一个积分一致有界于 m。

通过 Schwartz 不等式、Parseval 等式和引理 2.3，我们有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left\|\hat{\tilde{A}}_m'(\tau)\right\|_{H^1}}{1+|\tau|^{1-2\gamma}}\mathrm{d}\tau \le \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\tau}{\left(1+|\tau|^{1-2\gamma}\right)^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T\left\|\hat{\tilde{A}}_m'(\tau)\right\|_{H^1}^2\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{2}} \le C(T) \tag{2.23}$$

其中 $0<\gamma<\dfrac{1}{4}$。从(2.22)中可以得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\tau|^{2\gamma}\left\|\hat{\tilde{A}}_m'(\tau)\right\|_2^2 \mathrm{d}\tau \le C(T) \tag{2.24}$$

由于引理 2.3 存在一个函数 $A_t(x,t)$，使得

$$A\in L^\infty\left(0,T;W_{0,\sigma}^{1,2}\left(R^3\right)\right),\ A_t\in L^\infty\left(0,T;L_\sigma^2\left(R^3\right)\right) \tag{2.25}$$

由于本文过于基础，所以弱解的收敛性不予证明。

定理 1 证明完毕。

参考文献

[1] Liu, R. and Yang, J. (2017) Magneto-Hydrodynamical Model for Plasma. *Zeitschrift Für Angewandte Mathematik Und Physik*, **68**, Article No. 114. https://doi.org/10.21136/AM.2020.0208-19

[2] Chandrasekhar, S. (1981) Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. International Series of Monographs on Physics, Clarendon Press, Oxford, 1961.

[3] Duvaut, G. and Lions, J.L. (1972) Inéquations en thermoélasticité et magnétohydrodynamique. *Archive for Rational Mechanics & Analysis*, **46**, 241-279. https://doi.org/10.21136/AM.2020.0208-19

[4] Liu, R. and Yang, J. (2020) Global Strong Solutions of a 2-D New Magnetohydrodynamic System. *Applications of*

Mathematics, **65**, 105-120. https://doi.org/10.21136/AM.2020.0208-19

[5] Song, X.L. and Hou, Y.R. (2011) Attractors for the Three-Dimensional Incompressible Navier-Stokes Equations with Damping. *Discrete & Continuous Dynamical Systems*, **31**, 239-252. https://doi.org/10.21136/AM.2020.0208-19

[6] Sermange, M. and Temam, R. (1983) Some Mathematical Questions Related to the MHD Equations. *Computer Compacts*, **1**, 212. https://doi.org/10.1016/0167-7136(83)90286-X

[7] Cheng, H. and Xin, Z. (2005) On the Regularity of Weak Solutions to the Magnetohydrodynamic Equations. *Journal of Differential Equations*, **213**, 235-254. https://doi.org/10.1016/j.jde.2004.07.002

[8] Wang, S. and Sengul, T. (2017) Pattern Formation and Dynamic Transition for Magnetohydrodynamic Convection. *Communications on Pure & Applied Analysis*, **13**, 2609-2639. https://doi.org/10.1016/j.jde.2004.07.002

[9] Escauriaza, L., Seregin, G. and SˇVera´K, V. (2003) L3,∞-Solutions of the Navier-Stokes Equations and Backward Uniqueness. *Russian Mathematical Surveys*, **58**, 211. https://doi.org/10.1016/j.jde.2004.07.002

[10] Foia, C. (1961) Une remarque sur l'unicité des solutions des équations de Navier-Stokes en dimension n. *Bulletin De La Societe Mathematique De France*, **89**, 1-8.

[11] Giga, Y. (1986) Solutions for Semilinear Parabolic Equations in L^P and Regularity of Weak Solutions of the Navier-Stokes System. *Journal of Differential Equations*, **62**, 186-212. https://doi.org/10.1016/0022-0396(86)90096-3

[12] Masuda, K. (1984) Weak Solutions of Navier-Stokes Equations. *Tohoku Mathematical Journal*, **36**, 623-646. https://doi.org/10.2748/tmj/1178228767