Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2022, 11(7), 4683-4689
Published Online July 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.117494

Hans汉斯

弱链对角占优M-矩阵逆的无穷范数新上界估计

李慧君，莫宏敏*

吉首大学，数学与统计学院，湖南 吉首

收稿日期：2022年6月15日；录用日期：2022年7月12日；发布日期：2022年7月19日

摘 要

根据弱链对角占优M-矩阵A的逆矩阵元素，定义新的参数，结合不等式放缩技巧，给出$\left\|A^{-1}\right\|_\infty$的新上界估计式。理论分析和数值例子说明，新估计式改进了现有文献的有关结果。

关键词

弱链对角占优M-矩阵，逆矩阵，无穷范数的上界

New Upper Bound Estimates of the Infinite Norm for the Inverse of Weakly Chain Diagonally Dominant M-Matrices

Huijun Li, Hongmin Mo*

College of Mathematics and Statistics, Jishou University, Jishou Hunan

Received: Jun. 15th, 2022; accepted: Jul. 12th, 2022; published: Jul. 19th, 2022

Abstract

According to the inverse matrix elements of weakly chain diagonally dominant M-matrix A, the new parameters are defined and the inequality scaling technique is used to obtain $\left\|A^{-1}\right\|_\infty$. Theoretical analysis and numerical examples show that the new estimate improves the relevant results in the existing literature.

*通讯作者。

文章引用：李慧君，莫宏敏．弱链对角占优 M-矩阵逆的无穷范数新上界估计[J]．应用数学进展，2022，11(7): 4683-4689. DOI: 10.12677/aam.2022.117494

Keywords

Weak Chain Diagonally Dominant Matrices, Inverse Matrices, Upper Bound on an Infinite Norm

1. 引言

弱链对角占优矩阵在现代经济学、网络、信息论和算法设计等领域都有着广泛的应用。从 1974 年开始，众多学者对弱链对角占优 M-矩阵的逆矩阵的无穷范数的上界估计进行了广泛研究，得到了一些不同的估计结果并将其进行了应用(见文献[1]-[8])。本文将通过定义关于弱链对角占优 M-矩阵 A 的元素的新参数，同时结合 A^{-1} 的元素，从新的角度给出弱链对角占优 M-矩阵 $\left\|A^{-1}\right\|_\infty$ 的新上界估计式，并验证结果的有效性。

$C^{n\times n}\left(R^{n\times n}\right)$ 表示 n 阶复(实)矩阵集，设 $A=\left(a_{ij}\right)\in C^{n\times n}$，$N=\{1,2,\cdots,n\}$，为方便叙述给出下列符号：

$$R_i=\sum_{k\neq i}\left|a_{ik}\right|,$$

$$d_i=\frac{R_i}{\left|a_{ii}\right|},$$

$$r_{ij}=\frac{\left|a_{ij}\right|}{\left|a_{ii}\right|-\sum_{k\neq i,j}\left|a_{ik}\right|}\qquad j\neq i,$$

$$s_{ij}=\frac{\left|a_{ij}\right|+\sum_{k\neq i,j}\left|a_{ik}\right|r_{kj}}{\left|a_{ii}\right|}\qquad j\neq i,$$

$$v_{ij}=\frac{\left|a_{ij}\right|+\sum_{k\neq i,j}\left|a_{ik}\right|s_{kj}}{\left|a_{ii}\right|}\qquad j\neq i,$$

$$v_i=\max_{j\neq i}\left\{v_{ji}\right\},$$

$$m_{ki}=\begin{cases}\dfrac{\left|a_{ki}\right|}{\left|a_{kk}\right|-\sum\limits_{j=i+1,j\neq k}^{n}\left|a_{kj}\right|s_{ji}} & \left|a_{ki}\right|\neq 0,\\ 0 & \left|a_{ki}\right|=0.\end{cases}$$

$$m_i=\begin{cases}\max\limits_{i+1\leq k\leq n}\left\{m_{ki}\right\} & 1\leq i\leq n-1,\\ 0 & i=n.\end{cases}$$

定义 1 [1] 设 $A=\left(a_{ij}\right)\in R^{n\times n}$，若 $\forall i\in N$，有 $d_i\leq 1$，$J(A)=\{i\in N\mid d_i<1\}\neq\phi$，且 $\forall i\in N$，$i\notin J(A)$，有 $a_{ii_1}a_{i_1i_2}\cdots a_{i_ri_k}\neq 0$，$(i\neq i_1,i_1\neq i_2,\cdots,i_r\neq i_k)$，$0\leq r\leq k-1$，$i_k\in J(A)$，则称 A 为弱链对角占优矩阵。

定义 2 [1] 设 $A=\left(a_{ij}\right)\in Z_n=\left\{A=\left(a_{ij}\right)\in R^{n\times n}\mid a_{ij}\leq 0,i,j\in N,i\neq j\right\}$，若 $A^{-1}\geq 0$，则称 A 为 M-矩阵；

若 $\forall i \in N$，有 $a_{ii} > 0$，则称 A 为 L-矩阵。弱链对角占优 L-矩阵为 M-矩阵。

定义 3 [1] 设 $A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$，$A$ 为弱链对角占优矩阵，若 $A = (a_{ij}) \in Z_n$，$A^{-1} \ge 0$，则称 A 为弱链对角占优矩阵 M-矩阵。

引理 1 [1] 设 A 为 n 阶弱链对角占优 M-矩阵，则 $A^{(k,n)}\,(k = 1,2,\cdots,n-1)$ 为弱链对角占优 M-矩阵。

引理 2 [1] 若 $A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$ 为弱链对角占优 M-矩阵，$B = A^{(2,n)} \in R^{(n-1)\times(n-1)}$，$A^{-1} = (\alpha_{ij})$，$B^{-1} = (\beta_{ij})$，则

$$\alpha_{11} = \frac{1}{\Delta},$$

$$\alpha_{i1} = \frac{1}{\Delta}\sum_{k=2}^{n}\beta_{ik}(-a_{k1}),$$

$$\alpha_{1j} = \frac{1}{\Delta}\sum_{k=2}^{n}\beta_{kj}(-a_{1k}),$$

$$\alpha_{ij} = \beta_{ij} + \alpha_{1j}\sum_{k=2}^{n}\beta_{ik}(-a_{k1}),$$

$$\Delta = a_{11} - \sum_{k=2}^{n}a_{1k}\left(\sum_{k=2}^{n}\beta_{ki}a_{i1}\right) > 0.$$

引理 3 [1] 若 $A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$ 为弱链对角占优 M-矩阵，$A^{-1} = (\alpha_{ij})$，则 $\forall i, j \in N$，$i \ne j$，有

$$|\alpha_{ij}| \le d_i |\alpha_{jj}| \le |\alpha_{jj}|.$$

引理 4 [2] 若 $A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$ 为弱链对角占优 M-矩阵，且 $J(A) = \{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$，那么存在一个 N 的置换 $\{i_1, i_2, \cdots, i_n\}$，使得对所有的 $j \in N$，有

$$g_i = |a_{i_j i_j}| - \sum_{l=j+1}^{n}|a_{i_j i_l}| > 0.$$

引理 5 若 $A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$ 为弱链对角占优 M-矩阵，$n \ge 2$，$A^{-1} = (\alpha_{ij})$，满足 $u_1 < 1$，则

$$\alpha_{11} \le \frac{1}{a_{11}(1 - m_1 d_1)}.$$

证明

因 A 为 M-矩阵，则 $A^{-1} \ge 0$，设 $Am = x$，其中 $m = (1, m_1, \cdots, m_1)^{\mathrm{T}}$，$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$，因为 $0 \le m_1 \le 1$，$u_1 = \sum_{k=2}^{n}|a_{1k}| / |a_{11}| < 1$，则

$$x_1 = a_{11} + \sum_{k=2}^{n}a_{1k}m_1 = |a_{11}| - \sum_{k=2}^{n}|a_{1k}|m_1 \ge |a_{11}| - \sum_{k=2}^{n}|a_{1k}| > 0,$$

对 $\forall i \in N$，$2 \le i \le n$，有

$$\sum_{k=2}^{n}a_{ik} = |a_{ii}| - \sum_{k\in N, k\ne 1,i}|a_{ik}| \ge |a_{ii}| - \sum_{k\in N, k\ne i}|a_{ik}| \ge 0.$$

当 $a_{i1} = 0$ 时，$x_i = \sum_{k=2}^{n}a_{ik}m_1 \ge 0$；当 $a_{i1} \ne 0$ 时，$x_i = a_{i1} + \sum_{k=2}^{n}a_{ik}m_1 \ge a_{i1} + \left(\sum_{k=2}^{n}a_{ik}\right)m_{i1} = 0$，即

$$x_1 > 0,\ x_i \ge 0\ \ (i = 2, \cdots, n).$$

再由 $A^{-1}x = m$，$A^{-1} \ge 0$，有

$$\alpha_{11} \le \frac{1}{x_1} = \frac{1}{a_{11} + m_1 \sum_{k=2}^{n} a_{1k}} = \frac{1}{a_{11}(1 - m_1 d_1)}.$$

引理 6 设 $A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$ 为弱链对角占优 M-矩阵，且 $A^{-1} = (\alpha_{ij})$，对 $\forall i, j \in N$ ， $i \ne j$，有

$$|\alpha_{ij}| \le \frac{|a_{ij}| + \sum_{k\ne i,j} |a_{ik}| s_{kj}}{|a_{ii}|} |\alpha_{jj}| \le v_j |\alpha_{jj}| \le |\alpha_{jj}|.$$

证明

根据引理 3，设

$$s_{ji}(\varepsilon,1) = \begin{cases} \dfrac{|a_{ij}| + \sum_{k\ne i,j} |a_{ik}| r_{kj} + \varepsilon}{|a_{ii}|} & i \in J(A), \\ 1 & i \in N, i \notin J(A). \end{cases}$$

其中 $\varepsilon > 0$ 足够小，使得 $0 < s_{ji}(\varepsilon,1) \le 1 (i, j \in N, i \ne j)$。

设

$$S_j(\varepsilon,1) = diag(s_{j1}(\varepsilon,1), \cdots, s_{jj-1}(\varepsilon,1), 1, s_{jj+1}(\varepsilon,1), \cdots, s_{jn}(\varepsilon,1)), j \in N.$$

显然，当 $S_j(\varepsilon,1) = diag(1,1,\cdots,1) = I$ 时，$AS_j(\varepsilon,1)$ 是弱链对角占优矩阵，且当 $S_j(\varepsilon,1) \ne I$ 时，$AS_j(\varepsilon,1)$ 是严格对角占优矩阵，所以，$AS_j(\varepsilon,1)$ 一定是一个弱链对角占优矩阵，从而

$$\frac{|\alpha_{ij}|}{s_{ji}(\varepsilon,1)} \le \frac{|a_{ij}| + \sum_{k\ne i,j} |a_{ik}| s_{kj}(\varepsilon,1)}{|a_{ii}| s_{ji}(\varepsilon,1)} |\alpha_{jj}|, \quad i \ne j$$

也就是

$$|\alpha_{ij}| \le \frac{|a_{ij}| + \sum_{k\ne i,j} |a_{ik}| s_{kj}(\varepsilon,1)}{|a_{ii}|} |\alpha_{jj}|, \quad i \ne j$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时，得

$$|\alpha_{ij}| \le \frac{|a_{ij}| + \sum_{k\ne i,j} |a_{ik}| s_{kj}}{|a_{ii}|} |\alpha_{jj}| \le v_j |\alpha_{jj}| \le |\alpha_{jj}|, \quad i \ne j.$$

2. 主要结果

1974 年，P N Shivakumar 在文献[1]中给出弱链对角占优 M-矩阵 A 的 $\|A^{-1}\|_\infty$ 的上界：

$$\|A^{-1}\|_\infty \le \sum_{i=1}^{n} \left[a_{ii} \prod_{j=1}^{i-1} (1 - u_j) \right]^{-1}. \tag{1}$$

2012 年，潘淑珍在文献[3]中给出优于文献[1]的弱链对角占优 M-矩阵 A 的 $\|A^{-1}\|_\infty$ 的上界估计式：

$$\|A^{-1}\|_\infty \le \frac{1}{|a_{11}|(1 - u_1 t_1)} + \sum_{i=2}^{n} \left[\frac{1}{|a_{ii}|(1 - u_i t_i)} \prod_{j=1}^{i-1} \left(1 + \frac{u_j}{1 - u_j t_j}\right) \right]. \tag{2}$$

其中

$$t_i=\begin{cases}\max\limits_{i+1\le k\le n}\{t_{ki}\} & 1\le i\le n-1,\\ 0 & i=n.\end{cases}\quad 0\le t_i\le 1,\forall i\in N$$

$$t_{ki}=\begin{cases}\dfrac{|a_{ki}|}{|a_{kk}|-\sum\limits_{j=i+1,j\ne k}^{n}|a_{kj}|} & |a_{ki}|\ne 0,\\ 0 & |a_{ki}|=0.\end{cases}\quad \forall k\in N, i+1\le k\le n, 1\le i\le (n-1)$$

本文继续给出弱链对角占优 M-矩阵 A 的 $\|A^{-1}\|_\infty$ 的新上界估计式。

2.1. 定理 1

设 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$ 为弱链对角占优 M-矩阵，$n\ge 2$，$A^{-1}=(\alpha_{ij})$，$B=A^{(2,n)}$，$B^{-1}=(\beta_{ij})$，满足 $u_1<1$，则

$$\|A^{-1}\|_\infty\le\max\left\{\frac{1}{a_{11}(1-m_1d_1)}+\frac{d_1\|B^{-1}\|_\infty}{1-m_1d_1},\frac{v_1}{a_{11}(1-m_1d_1)}+\left(\frac{v_1d_1}{1-m_1d_1}+1\right)\|B^{-1}\|_\infty\right\}.$$

证明

记 $r_i=\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_{ij}$，$M_A=\|A^{-1}\|_\infty$，$M_B=\|B^{-1}\|_\infty$，即 $M_A=\max\limits_{i\in N}\{r_i\}$，$M_B=\max\limits_{2\le i\le n}\left\{\sum\limits_{j=2}^{n}\beta_{ij}\right\}$，由引理 2 和引理 5 可得

$$\begin{aligned}r_1&=\alpha_{11}+\sum_{j=2}^{n}\alpha_{1j}=\frac{1}{\Delta}+\frac{1}{\Delta}\sum_{k=2}^{n}(-a_{1k})\sum_{j=2}^{n}\beta_{kj}\le\frac{1}{\Delta}+\frac{1}{\Delta}\sum_{k=2}^{n}(-a_{1k})M_B\\&=\frac{1}{\Delta}+\frac{1}{\Delta}a_{11}d_1M_B\le\frac{1}{a_{11}(1-m_1d_1)}+\frac{d_1}{1-m_1d_1}M_B,\end{aligned}\tag{3}$$

对 $2\le i\le n$，由引理 3 知，

$$\alpha_{i1}\le\alpha_{11},$$

对 $2\le j\le n$，由引理 6 知，

$$\alpha_{ij}=\beta_{ij}+\alpha_{1j}\sum_{k=2}^{n}\beta_{ik}(-a_{k1})\le\beta_{ij}+\alpha_{1j}v_1,$$

则

$$\begin{aligned}r_i&=\alpha_{i1}+\sum_{j=2}^{n}\alpha_{ij}\le v_1\alpha_{11}+\sum_{j=2}^{n}(\beta_{ij}+\alpha_{1j}v_1)=r_1v_1+M_B\le v_1\left(\frac{1}{a_{11}(1-m_1d_1)}+\frac{d_1M_B}{1-m_1d_1}\right)+M_B\\&=\frac{v_1}{a_{11}(1-m_1d_1)}+\left(\frac{v_1d_1}{1-m_1d_1}+1\right)M_B,\end{aligned}\tag{4}$$

由(3)式和(4)式可得

$$\begin{aligned}M_A&=\max\{r_1,r_i:2\le i\le n\}\\&\le\max\left\{\frac{1}{a_{11}(1-m_1d_1)}+\frac{d_1\|B^{-1}\|_\infty}{1-m_1d_1},\frac{v_1}{a_{11}(1-m_1d_1)}+\left(\frac{v_1d_1}{1-m_1d_1}+1\right)\|B^{-1}\|_\infty\right\}.\end{aligned}$$

2.2. 定理 2

设 $A=\left(a_{ij}\right)\in R^{n\times n}$ 为弱链对角占优 M-矩阵，且对 $\forall k\in N$，有 $u_k<1$，则

$$M_A\le\max\left\{\frac{1}{a_{11}\left(1-m_1u_1\right)}+\sum_{i=2}^{n}\left[\frac{1}{a_{ii}\left(1-m_iu_i\right)}\prod_{j=1}^{i-1}\left(\frac{u_j}{1-m_ju_j}\right)\right],\right.$$
$$\left.\frac{v_1}{a_{11}\left(1-m_1u_1\right)}+\sum_{i=2}^{n}\left[\frac{v_i}{a_{ii}\left(1-m_iu_i\right)}\prod_{j=1}^{i-1}\left(\frac{v_ju_j}{1-m_ju_j}+1\right)\right]\right\}. \tag{5}$$

证明

设 A 为弱链对角占优 M-矩阵，对 $\forall k\in N$，$1\le k\le n-1$，$A^{(k,n)}$ 为弱链对角占优 M-矩阵，由定理 1 关于 k 对 $A^{(k,n)}$ 做数学归纳法可得。

注

设 $A=\left(a_{ij}\right)\in R^{n\times n}$ 为弱链对角占优 M-矩阵，且对 $\forall k\in N$，满足 $u_k<1$，由 v_i，m_i，t_i 表达式可知 $0\le v_i\le 1$，$0\le m_i\le t_i\le 1$，那么(5)式中 $\left\|A^{-1}\right\|_\infty$ 的上界小于等于(2)式中的上界，即

$$\max\left\{\frac{1}{a_{11}\left(1-m_1u_1\right)}+\sum_{i=2}^{n}\left[\frac{1}{a_{ii}\left(1-m_iu_i\right)}\prod_{j=1}^{i-1}\left(\frac{u_j}{1-m_ju_j}\right)\right],\frac{v_1}{a_{11}\left(1-m_1u_1\right)}+\sum_{i=2}^{n}\left[\frac{v_i}{a_{ii}\left(1-m_iu_i\right)}\prod_{j=1}^{i-1}\left(\frac{v_ju_j}{1-m_ju_j}+1\right)\right]\right\}$$
$$\le\frac{1}{\left|a_{11}\right|\left(1-u_1t_1\right)}+\sum_{i=2}^{n}\left[\frac{1}{\left|a_{ii}\right|\left(1-u_it_i\right)}\prod_{j=1}^{i-1}\left(1+\frac{u_j}{1-u_jt_j}\right)\right].$$

3. 数值算例

例 1 设

$$A=\begin{pmatrix}4&-1&-1\\-2&5&-3\\-1&-2&4\end{pmatrix}.$$

$J=\{1,3\}$，易得到 A 为弱链对角占优 M-矩阵，$\left\|A^{-1}\right\|_\infty=1.100$。

应用(1)式得

$$\left\|A^{-1}\right\|_\infty\le 2.7500;$$

应用(2)式得

$$\left\|A^{-1}\right\|_\infty\le 1.500;$$

应用定理 2 得

$$\left\|A^{-1}\right\|_\infty\le 1.1503.$$

例 2 设

$$A=\begin{pmatrix}4&-2&-1\\-1&3&-2\\-1&0&2\end{pmatrix}.$$

易得到 A 为弱链对角占优 M-矩阵，$\left\|A^{-1}\right\|_\infty=1.54$。

应用(1)式得

$$\left\|A^{-1}\right\|_{\infty} \le 11;$$

应用(2)式得

$$\left\|A^{-1}\right\|_{\infty} \le 5.6667;$$

应用定理 2 得

$$\left\|A^{-1}\right\|_{\infty} \le 1.996.$$

4. 结论

理论证明本文所得弱链对角占优 M-矩阵逆矩阵无穷范数的新上界估计式优于文献[1] [3]中的结果，数值算例亦说明了本文所得新上界估计式的有效性和可行性。

致　谢

感谢莫宏敏老师对本篇论文的悉心指导和帮助。

基金项目

吉首大学研究生科研项目(JDY21012)。

参考文献

[1] Shivakumar, P.N., Wiliams, J.J., Ye, Q., *et al.* (1996) On Two-Sided Bounds Related to Weakly Diagonally Dominant M-Matrices with Application to Digital Circuit Dynamics. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **17**, 298-312. https://doi.org/10.1137/S0895479894276370

[2] Huang, T.Z. and Zhu, Y. (2010) Estimation of $\left\|A^{-1}\right\|_{\infty}$ for Weakly Chained Diagonally Dominant M-Matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, **432**, 670-677. https://doi.org/10.1016/j.laa.2009.09.012

[3] 潘淑珍，陈神灿. 弱链对角占优矩阵$\left\|A^{-1}\right\|_{\infty}$的上界估计[J]. 福州大学学报(自然科学版), 2012, 40(3): 281-284.

[4] 李艳艳，蒋建新. 弱链对角占优矩阵的$\left\|A^{-1}\right\|_{\infty}$的新界[J]. 云南民族大学学报(自然科学版), 2014, 23(4): 259-261.

[5] 赵仁庆，刘鹏. 弱链对角占优 M-矩阵的逆矩阵的无穷大范数的上界估计[J]. 楚雄师范学院学报，2014，29(3): 5-10.

[6] 蒋建新，李艳艳. 弱链对角占优矩阵的逆矩阵无穷范数的新上界[J]. 咸阳师范学院学报, 2016, 31(2): 53-55.

[7] Sang, C. and Chen, Z. (2021) A New Error Bound for Linear Complementarity Problems of Weakly Chained Diagonally Dominant B-Matrices. *Linear and Multilinear Algebra*, **69**, 1909-1921. https://doi.org/10.1080/03081087.2019.1649995

[8] Zhao, R., Zheng, B. and Liang, M. (2020) A New Error Bound for Linear Complementarity Problems with Weakly Chained Diagonally Dominant B-Matrices. *Applied Mathematics and Computation*, **367**, Article ID: 124788. https://doi.org/10.1016/j.amc.2019.124788