

一类受媒体报道影响的随机SIS流行病模型的研究

曾 琪, 周艳丽

上海健康医学院文理教学部, 上海

收稿日期: 2022年8月7日; 录用日期: 2022年8月29日; 发布日期: 2022年9月13日

摘 要

本文研究了一类受媒体报道影响且恢复率受到环境噪声影响的随机SIS流行病模型。利用停时理论和Lyapunov分析法, 首先证明了随机模型正解的全局存在唯一性。其次, 证明了随机模型的无病平衡点的随机稳定性。当确定性模型基本再生数大于1时, 得到了随机模型的解在相应确定性模型的地方性平衡点附近的振荡行为, 并得到了强噪声可以导致疾病灭绝的结论。通过数值模拟验证了本文的理论结果。

关键词

随机SIS流行病模型, 振荡行为, 白噪声, 疾病灭绝

Stochastic SIS Epidemic Model with Media Coverage

Qi Zeng, Yanli Zhou

College of Arts and Science, Shanghai University of Medicine and Health Sciences, Shanghai

Received: Aug. 7th, 2022; accepted: Aug. 29th, 2022; published: Sep. 13th, 2022

Abstract

A stochastic SIS epidemic model with media coverage is concerned. By stopping time theory and Lyapunov analysis, we first obtain the global existence and uniqueness of the positive solution. Then, we prove the stochastic asymptotical stability of the disease-free equilibrium point. When the basic reproduction number of the deterministic model is greater than 1, the solution of the stochastic model is oscillating around the local equilibrium point of the corresponding deterministic model, and the conclusion that strong noise can lead to disease extinction is obtained. Numerical simulations verify the theoretical results.

Keywords

Stochastic SIS Epidemic Model, Oscillating Behavior, White Noise, Disease Extinction

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 模型的建立

毫无疑问, 在现代社会, 公共卫生问题已经成为全球个人和财产的巨大威胁。在疫情期间, 人们通过智能手机和社交网络等获取相关媒体发布的传染病的最新情况报道, 从而引起人们的重视并采取一些自我保护措施, 比如戴口罩、消毒、通风、勤洗手等来预防感染, 这些行为改变可以降低人们被感染的机会, 以减少染病者的数量, 说明媒体信息传播对疾病的流行有一定的消减作用。同时, 现实世界里, 疾病的传播也不可避免的会受到外界环境中的随机因素的影响。在随机流行病模型中考虑媒体报道对流行病的预防和控制具有一定的实际意义。因此, 对受媒体报道影响或白噪声影响的随机流行病动力学模型建立和研究已成为相关工作者广泛关注的课题[1]-[9]。

设 $S(t)$ 表示 t 时刻的易感者, $I(t)$ 表示 t 时刻的染病者, 文献[10]考虑了下面的 SIS 随机流行病模型

$$\begin{cases} dS(t) = [\Lambda - \lambda S(t)I(t) - \mu S(t) + \gamma I(t)]dt + \alpha I(t)dB(t), \\ dI(t) = [\lambda S(t)I(t) - (\mu + \gamma + \varepsilon)I(t)]dt - \alpha I(t)dB(t), \end{cases} \quad (1)$$

其中 Λ 为易感者的补充率; μ 表示个体的自然死亡率; ε 是染病者的因病死亡率; λ 是自然接触率, $\gamma \geq 0$ 是染病者的恢复率; $B(t)$ 是定义在完备概率空间上的标准布朗运动, α 表示环境白噪声的强度。

对于模型(1)而言, 自然接触率 λ 是一个常数, 而在实际生活中, 流行病的自然接触率 λ 在媒体报道的影响会减少[11], 故考虑媒体报道的影响, 则 λ 修改为 $\lambda_1 - \frac{\lambda_2 I(t)}{m + I(t)}$, 则在文[10]基础上考虑一类受媒

体报道影响的随机 SIS 流行病模型, 建立模型如下

$$\begin{cases} dS(t) = \left[\Lambda - \left(\lambda_1 - \frac{\lambda_2 I(t)}{m + I(t)} \right) S(t)I(t) - \mu S(t) + \gamma I(t) \right] dt + \alpha I(t) dB(t), \\ dI(t) = \left[\left(\lambda_1 - \frac{\lambda_2 I(t)}{m + I(t)} \right) S(t)I(t) - (\mu + \gamma + \varepsilon) I(t) \right] dt - \alpha I(t) dB(t), \end{cases} \quad (2)$$

这里 m 是正常数, λ_1 是自然接触率, λ_2 表示因感染者存在而减少的最大接触率(假设 $\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0$)。

与随机模型(2)相对应的确定性流行病的模型如下

$$\begin{cases} dS(t) = \left[\Lambda - \left(\lambda_1 - \frac{\lambda_2 I(t)}{m + I(t)} \right) S(t)I(t) - \mu S(t) + \gamma I(t) \right] dt, \\ dI(t) = \left[\left(\lambda_1 - \frac{\lambda_2 I(t)}{m + I(t)} \right) S(t)I(t) - (\mu + \gamma + \varepsilon) I(t) \right] dt. \end{cases} \quad (3)$$

2. 模型(3)基本再生数和平衡点的存在性

定义基本再生数 $R_0 = \frac{\lambda_1 \Lambda}{\mu(\gamma + \mu + \varepsilon)}$ 。

下面讨论模型(3)的无病平衡点和地方性平衡点的存在性。令模型(3)的右端为 0, 得到

$$\begin{cases} \Lambda - \left(\lambda_1 - \frac{\lambda_2 I(t)}{m + I(t)} \right) S(t) I(t) - \mu S(t) + \gamma I(t) dt = 0, \\ \left(\lambda_1 - \frac{\lambda_2 I(t)}{m + I(t)} \right) S(t) I(t) - (\mu + \gamma + \varepsilon) I(t) dt = 0, \end{cases} \quad (4)$$

显然, 当 $I = 0$ 得到无病平衡点 $E_0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0 \right)$ 。下面讨论地方病平衡点 $E^* = (S^*, I^*)$ 的存在性。设 $E^* = (S^*, I^*)$

是模型(4)的一个解, 将 $E^* = (S^*, I^*)$ 带入模型(4)可得

$$\begin{cases} \Lambda = \mu(S^* + I^*) + \varepsilon I^*, \\ \left(\lambda_1 - \frac{\lambda_2 I^*}{m + I^*} \right) S^* = \mu + \gamma + \varepsilon, \end{cases} \quad (5)$$

结合模型(4)的第一个方程, 进一步整理得

$$A_1 I^{*2} + A_2 I^* + A_3 = 0,$$

其中,

$$\begin{aligned} A_1 &= -(\lambda_1 - \lambda_2)(\mu + \varepsilon), \\ A_2 &= \Lambda(\lambda_1 - \lambda_2) - m\lambda_1(\mu + \varepsilon) - \mu(\mu + \gamma + \varepsilon), \\ A_3 &= m[\lambda_1 \Lambda - \mu(\mu + \gamma + \varepsilon)] = \frac{m}{\mu(\mu + \gamma + \varepsilon)} \left(\frac{\lambda_1 \Lambda}{\mu(\mu + \gamma + \varepsilon)} - 1 \right), \end{aligned}$$

当 $A_3 > 0$ 时, 关于 I^* 一元二次方程有唯一的正解。从而可得到, 当 $R_0 > 1$ 时, 模型(3)存在唯一的地方病平衡点 $E^* = (S^*, I^*)$ 。

显然, E_0 也是随机模型(2)的无病平衡点, 但是随机模型(2)不存在任何一个正平衡点。

3. 随机模型(2)全局正解的存在唯一性和有界性

定理1 任意给定初值 $(S(0), I(0)) \in R_+^2$, 模型(2)存在唯一的正解 $(S(t), I(t)) (t \geq 0)$ 依概率1存在于 R_+^2 中, 即 $(S(t), I(t)) \in R_+^2$, a.s..

证明 由于模型(2)的系数满足局部 Lipschitz 连续性, 所以对于任意给定的初值 $(S(0), I(0)) \in R_+^2$, 模型(2)存在唯一的局部解 $(S(t), I(t))$, $t \in [0, \tau_e)$, 其中 τ_e 是爆破时间[12]。要证明其解的全局存在性, 只需证明 $\tau_e = +\infty$ a.s..

记 $N(t) = S(t) + I(t)$, 由模型(2)可得

$$dN(t) = [\Lambda - \mu(S(t) + I(t)) - \varepsilon I(t)] dt \leq (\Lambda - \mu N(t)) dt.$$

设 $X(t)$ 是如下微分方程的解

$$\begin{cases} dX(t) = (\Lambda - \mu X(t)) dt, \\ X(0) = N(0), \end{cases}$$

其中 $N(0) = S(0) + I(0)$ 。由比较定理可得

$$N(t) \leq X(t) \leq \max \left\{ S(0) + I(0), \frac{\Lambda}{\mu} \right\} := C, t \in [0, \tau_c], \text{ a.s.} \quad (6)$$

设 $k_0 > 0$ 足够大, 使得 $S(0), I(0)$ 都落在区间 $\left[\frac{1}{k_0}, k_0 \right]$ 内。对任意整数 $k \geq k_0$, 定义停时

$$\tau_k = \inf \left\{ t \in [0, \tau_c] : \min \{ S(t), I(t) \} \leq \frac{1}{k} \text{ 或 } \max \{ S(t), I(t) \} \geq k \right\}.$$

在整篇文章中设 $\inf \phi = \infty$ (其中 ϕ 表示空集)。由停时定义知, τ_k 关于 k 是单调递增的。令 $\tau_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k$, 则 $\tau_\infty \leq \tau_c$, a.s.。若能证明 $\tau_\infty = \infty$, a.s., 则 $\tau_c = \infty$, 即对所有的 $t \geq 0$ $(S(t), I(t)) \in \mathbb{R}_+^2$, a.s., 故只需证明 $\tau_\infty = \infty$, a.s.。若不然, 存在常数 $T > 0$ 和 $\delta \in (0, 1)$, 使得 $P\{\tau_\infty \leq T\} > \delta$ 。故存在整数 $k_1 \geq k_0$, 对所有的 $k \geq k_1$, 满足 $P\{\tau_\eta \leq T\} > \delta$ 。

考虑函数 $V: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow [0, +\infty)$

$$V(t) = V(S, I) = (S - a - \log S) + (I - b - \log I), \quad (7)$$

其中 a, b 为待定的正常数。对(7)利用Itô公式, 得

$$\begin{aligned} dV(S, I) &= \left(1 - \frac{a}{S}\right) dS + \frac{a}{2S^2} (dS)^2 + \left(1 - \frac{b}{I}\right) dI + \frac{b}{2I^2} (dI)^2 \\ &= LVdt + \alpha \left(1 - \frac{I}{S}\right) dB \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned} LV &= \Lambda - \mu(S + I) - \varepsilon I - \frac{a\Lambda}{S} + a \left(\lambda_1 - \frac{\lambda_2 I}{m + I} \right) I + a\mu - \frac{a\gamma I}{S} + \frac{a\alpha^2 I^2}{2S^2} \\ &\quad - b \left(\lambda_1 - \frac{\lambda_2 I}{m + I} \right) S + b \left(\mu + \gamma + \varepsilon + \frac{\alpha^2}{2} \right) \\ &\leq \Lambda - \mu(S + I) - \varepsilon I + a\lambda_1 I + a\mu + \frac{a\alpha^2 I^2}{2S^2} - b\lambda_1 S + b\lambda_2 S + b \left(\mu + \gamma + \varepsilon + \frac{\alpha^2}{2} \right), \end{aligned}$$

取 $a = \frac{\mu + \varepsilon}{\lambda_1}, b = \frac{\mu}{\lambda_1 - \lambda_2}$, 则有

$$LV \leq \Lambda + a\mu + \frac{a\alpha^2 I^2}{2S^2} + b \left(\mu + \gamma + \varepsilon + \frac{\alpha^2}{2} \right) := K,$$

所以, 可得

$$dV(S, I) \leq Kdt + \alpha \left(1 - \frac{I}{S}\right) dB. \quad (8)$$

对式(8)两端分别从 0 到 $\tau_\eta \wedge T$ 积分, 然后取期望, 得

$$EV \left(S(\tau_\eta \wedge T), I(\tau_\eta \wedge T) \right) \leq V(S(0), I(0)) + KE(\tau_\eta \wedge T) \leq V(S(0), I(0)) + KT. \quad (9)$$

对所有的 $k \geq k_1$, 令 $\Omega_k = \{\tau_k \leq T\}$, 则 $P(\Omega_k) \geq \delta$ 。对每一个 $\omega \in \Omega_\eta$, 由停时的定义可知

$S(\tau_k, \omega), I(\tau_k, \omega)$ 中至少有一个等于 k 或 $\frac{1}{k}$, 故 $V(S(\tau_k, \omega), I(\tau_k, \omega))$ 不小于 $k-1-\log k$ 或者

$$\frac{1}{k}-1-\log \frac{1}{k}=\frac{1}{k}-1+\log k.$$

于是

$$V(S(\tau_k, \omega), I(\tau_k, \omega)) \geq [k-1-\log k] \wedge \left[\frac{1}{k}-1+\log k \right],$$

由 $P\{\tau_\eta \leq T\} > \delta$ 和式(9)得

$$\begin{aligned} V(S(0), I(0)) + KT &\geq E\left[1_{\Omega_k}(\omega)V(S(\tau_k, \omega), I(\tau_k, \omega))\right] \\ &\geq \delta \left[(k-1-\log k) \wedge \left(\frac{1}{k}-1+\log k \right) \right], \end{aligned}$$

其中 1_{Ω_k} 是 Ω_k 的示性函数。令 $k \rightarrow \infty$ 可得矛盾, $\infty \geq V(S(0), I(0)) + KT \geq \infty$ 。

于是证得 $\tau_\infty = \infty$, a.s., 模型(2)存在唯一全局正解。

定理 1 证明了随机模型(2)正解的全局存在唯一性, 由式(6)可得到随机模型(2)的正不变集:

$$\Gamma = \{(S, I) \in R_+^2 : S > 0, I \geq 0, S(t) + I(t) \leq C\}, \quad (11)$$

其中 $C = \max\left\{S(0) + I(0), \frac{\Lambda}{\mu}\right\}$ 。

4. 当 $R_0 \leq 1$ 时随机模型(2)的动力学行为

定理 2 当 $R_0 \leq 1$ 时, 随机模型(2)的无病平衡点 E_0 随机全局渐近稳定。

证明: 定义一个非负 Lyapunov 函数如下

$$V(t) = \left(S(t) - \frac{\Lambda}{\mu} + I(t) \right)^2 + \frac{2(2\mu + \varepsilon)}{\lambda_1} I(t),$$

由 Itô 公式得

$$dV(t) = LVdt - \alpha \frac{2(2\mu + \varepsilon)}{\lambda_1} I(t) dB(t),$$

其中,

$$\begin{aligned} LV &= 2 \left(S(t) - \frac{\Lambda}{\mu} + I(t) \right) \left[\Lambda - \mu S(t) - (\mu + \varepsilon) I(t) \right] \\ &\quad + \frac{2(2\mu + \varepsilon)}{\lambda_1} \left[\left(\lambda_1 - \frac{\lambda_2}{m + I(t)} \right) S(t) - (\mu + \gamma + \varepsilon) \right] I(t) \\ &\leq -2\mu \left(S(t) - \frac{\Lambda}{\mu} \right)^2 - 2(2\mu + \varepsilon) I^2(t), \end{aligned}$$

即 LV 负定, 所以模型(2)的无病平衡点 E_0 随机全局渐近稳定。

5. 当 $R_0 > 1$ 时随机模型(2)的动力学行为

定理 3 当 $R_0 > 1$ 时, 随机模型(2)的任意解 $(S(t), I(t))$ 满足

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \left[(S - S^*)^2 + (I - I^*)^2 \right] ds \leq \frac{(2\mu + \varepsilon) I^* \alpha^2}{2\mu \left(\lambda_1 - \frac{\lambda_2 I^*}{m + I^*} \right)},$$

其中 $E^* = (S^*, I^*)$ 是模型(3)的地方病平衡点。

证明: 定义一个非负 Lyapunov 函数如下

$$V(t) = (S(t) + I(t) - S^* - I^*)^2 + \frac{2\mu + \varepsilon}{\lambda_1 - \frac{\lambda_2 I^*}{m + I^*}} \left(I(t) - I^* - I^* \ln \frac{I(t)}{I^*} \right),$$

由 Itô 公式得

$$dV(t) = LVdt - \alpha \frac{2(2\mu + \varepsilon)}{\lambda_1 - \frac{\lambda_2 I^*}{m + I^*}} (I(t) - I^*) dB(t), \tag{12}$$

其中,

$$\begin{aligned} LV &= 2(S(t) + I(t) - S^* - I^*)(\Lambda - \mu S(t) - (\mu + \varepsilon)I(t)) \\ &\quad + \frac{2\mu + \varepsilon}{\lambda_1 - \frac{\lambda_2 I^*}{m + I^*}} (I(t) - I^*) \left[\left(\lambda_1 - \frac{\lambda_2 I(t)}{m + I(t)} \right) S(t) - (\mu + \gamma + \varepsilon) \right] + \frac{2\mu + \varepsilon}{\lambda_1 - \frac{\lambda_2 I^*}{m + I^*}} \frac{\alpha^2}{2} I^* \\ &= 2(S(t) - S^* + I(t) - I^*)(\mu S^* + (\mu + \varepsilon)I^* - \mu S(t) - (\mu + \varepsilon)I(t)) \\ &\quad + \frac{2(2\mu + \varepsilon)}{\lambda_1 - \frac{\lambda_2 I^*}{m + I^*}} (I(t) - I^*) \left[\left(\lambda_1 - \frac{\lambda_2 I(t)}{m + I(t)} \right) S(t) - \left(\lambda_1 - \frac{\lambda_2 I^*}{m + I^*} \right) S^* \right] + \frac{2(2\mu + \varepsilon)}{\lambda_1 - \frac{\lambda_2 I^*}{m + I^*}} \frac{\alpha^2}{2} I^* \\ &= 2(S(t) - S^* + I(t) - I^*)(\mu S^* + (\mu + \varepsilon)I^* - \mu S(t) - (\mu + \varepsilon)I(t)) \\ &\quad + \frac{2(2\mu + \varepsilon)}{\lambda_1 - \frac{\lambda_2 I^*}{m + I^*}} (I(t) - I^*) \left[\left(\lambda_1 - \frac{\lambda_2 I(t)}{m + I(t)} \right) S(t) - \left(\lambda_1 - \frac{\lambda_2 I^*}{m + I^*} \right) S^* \right] + \frac{2(2\mu + \varepsilon)}{\lambda_1 - \frac{\lambda_2 I^*}{m + I^*}} \frac{\alpha^2}{2} I^* \\ &= -2\mu(S(t) - S^*)^2 - 2(\mu + \varepsilon)(I(t) - I^*)^2 - 2(2\mu + \varepsilon)(S(t) - S^*)(I(t) - I^*) \\ &\quad - \frac{\lambda_2 2(2\mu + \varepsilon)}{\lambda_1 - \frac{\lambda_2 I^*}{m + I^*}} \frac{S(t)}{(m + I(t))(m + I^*)} (I(t) - I^*)^2 + 2(2\mu + \varepsilon)(S(t) - S^*)(I(t) - I^*) + \frac{2(2\mu + \varepsilon)}{\lambda_1 - \frac{\lambda_2 I^*}{m + I^*}} \frac{\alpha^2}{2} I^* \\ &\leq -2\mu(S(t) - S^*)^2 - 2(\mu + \varepsilon)(I(t) - I^*)^2 + \frac{2\mu + \varepsilon}{\lambda_1 - \frac{\lambda_2 I^*}{m + I^*}} \alpha^2 I^*. \end{aligned}$$

对式(12)两端分别从 0 到 t 积分, 得

$$V(t) - V(0) = \int_0^t LVds + M(t), \tag{13}$$

其中, $M(t) = \alpha \frac{2(2\mu + \varepsilon)}{\lambda_1 - \frac{\lambda_2 I^*}{m + I^*}} \int_0^t (I^* - I(s)) dB(s)$, 显然 $M(t)$ 是连续的局部鞅, 满足初值 $M(0) = 0$, 且

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle S(t), S(t) \rangle}{t} \leq \frac{4(2\mu + \varepsilon)^2 \alpha^2}{\left(\lambda_1 - \frac{\lambda_2 I^*}{m + I^*}\right)^2} (C + I^*)^2 < \infty.$$

由鞅的强大数定理[12]得, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M(t)}{t} = 0$ a.s.,

结合式(13)可得

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t LV ds \geq 0, \text{ a.s.}$$

所以

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \left[(S - S^*)^2 + (I - I^*)^2 \right] ds \leq \frac{(2\mu + \varepsilon) \alpha^2 I^*}{2\mu \left(\lambda_1 - \frac{\lambda_2 I^*}{m + I^*} \right)}, \text{ a.s.}$$

6. 模型(2)的疾病灭绝

定理 4 令 $(S(t), I(t))$ 是模型(2)满足任意初值 $(S(0), I(0)) \in \Gamma$ 的解, 则当 $\frac{\lambda_1 \Lambda}{\mu} - (\mu + \gamma + \varepsilon) < \frac{\alpha^2}{2}$ 时,

有 $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln I(t)}{t} \leq \frac{\lambda_1 \Lambda}{\mu} - (\mu + \gamma + \varepsilon) - \frac{\alpha^2}{2} < 0$ a.s. 成立, 即模型(2)的疾病几乎必然灭绝。

证明: 设 $(S(t), I(t))$ 是模型(2)满足初值 $(S(0), I(0)) \in \Gamma$ 的解, 对模型(2)应用 Itô 公式

$$d \ln I(t) = \left[\left(\lambda_1 - \frac{\lambda_2 I(t)}{m + I(t)} \right) S(t) - (\mu + \gamma + \varepsilon) - \frac{\alpha^2}{2} \right] dt - \alpha dB(t), \quad (15)$$

对式(15)两端分别从 0 到 t 积分, 得

$$\begin{aligned} \ln I(t) &= \int_0^t \left[\left(\lambda_1 - \frac{\lambda_2 I(s)}{m + I(s)} \right) S(s) - (\mu + \gamma + \varepsilon) - \frac{\alpha^2}{2} \right] ds + M(t) + \ln I(0) \\ &\leq \left[\lambda_1 \frac{\Lambda}{\mu} - (\mu + \gamma + \varepsilon) - \frac{\alpha^2}{2} \right] t + M(t) + \ln I(0), \end{aligned} \quad (16)$$

这里 $M(t) = \int_0^t -\alpha dB$, 式(16)两边除以 t , 得

$$\begin{aligned} \frac{\ln I(t)}{t} &\leq \left[\lambda_1 \frac{\Lambda}{\mu} - (\mu + \gamma + \varepsilon) - \frac{\alpha^2}{2} \right] + \frac{M(t)}{t} + \frac{\ln I(0)}{t} \\ &= (\mu + \gamma + \varepsilon)(R_0^s - 1) + \frac{M(t)}{t} + \frac{\ln I(0)}{t}, \end{aligned} \quad (17)$$

$M(t)$ 是连续的局部鞅, 且满足初值 $M(0) = 0$, 由鞅的强大数定理得, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M(t)}{t} = 0$ 。

因此, 当 $\frac{\lambda_1 \Lambda}{\mu} - (\mu + \gamma + \varepsilon) < \frac{\alpha^2}{2}$ 时, 有 $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln I(t)}{t} \leq \frac{\lambda_1 \Lambda}{\mu} - (\mu + \gamma + \varepsilon) - \frac{\alpha^2}{2} < 0$ a.s., 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$,

意味着疾病灭绝。

这个结论说明了当白噪声的强度较大时, 随机模型出现了完全不同于对应确定模型的动力学性质, 即噪声存在会改变对应确定模型的动力学性质。

7. 数值模拟

本节采用 Euler-Maruyama 方法, 利用 MATLAB 工具对文中结论进行数值模拟, 验证所得理论结果的正确性。为了更好地比较确定性模型(3)和随机模型(2)的动力学行为, 两个模型解的初值都取为 $(0.8, 0.8)$, 并把两个模型的解曲线放在同一个图形里, 其中蓝色曲线和红色实线分别表示模型(3)和模型(2)的解曲线。在图 1 中, 取 $\Lambda = 2, \mu = 0.4, \lambda_1 = 0.2, \lambda_2 = 0.2, \gamma = 0.2, \varepsilon = 0.4, m = 5$, 此时 $R_0 = 0.9 \leq 1, E_0 = (5, 0)$ 。在(a)中取 $\alpha = 0.1$, (b)组中取 $\alpha = 0.05$, 从图形中可以看出:

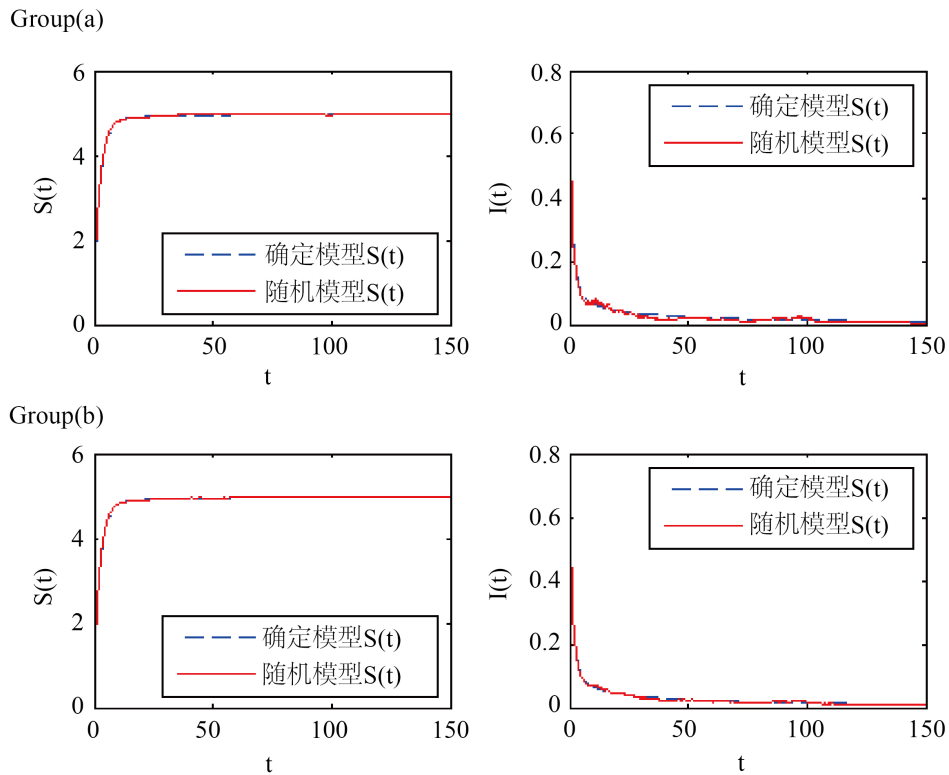


Figure 1. Solution curves of deterministic model (3) and stochastic model (2) ($R_0 \leq 1$)

图 1. 确定模型(3)和随机模型(2)解曲线的比较 ($R_0 \leq 1$)

模型(2)和模型(3)的解均收敛于无病平衡点 $E_0 = (5, 0)$, 且噪声强度不影响无病平衡点 E_0 随机渐近稳定性, 这与定理 2 的结论相吻合。

在图 2 中, 取 $\Lambda = 2, \mu = 0.4, \lambda_1 = 0.4, \lambda_2 = 0.2, \gamma = 0.2, \varepsilon = 0.4, m = 5$, 此时 $R_0 = 2 > 1$, 存在地方病平衡点 $E^* = (2.7525, 1.1238)$ 。在(a)中取 $\alpha = 0.1$, (b)中取 $\alpha = 0.05$, 从图中可以观察到随机模型(2)的解曲线围绕确定模型(3)的解曲线做随机振动, 且振幅随着白噪声强度的增大而增大, 这一现象与定理 3 的理论结果相吻合。

在图 3 中, 取 $\alpha = 1.4$, 其它参数取值与图 2 中参数取值相同, 且满足定理 4 中使得疾病灭绝的条件: $\frac{\lambda_1 \Lambda}{\mu} - (\mu + \gamma + \varepsilon) < \frac{\alpha^2}{2}$, 即噪声强度较大时可以使疾病灭绝。

本文讨论了一类受媒体报道影响的随机 SIS 流行病模型以及与对应确定性 SIS 传染病模型的动力学行为: 噪声存在对无病平衡点几乎不产生影响; 噪声对地方病平衡点的影响可以从图 3 中直观看到, 当

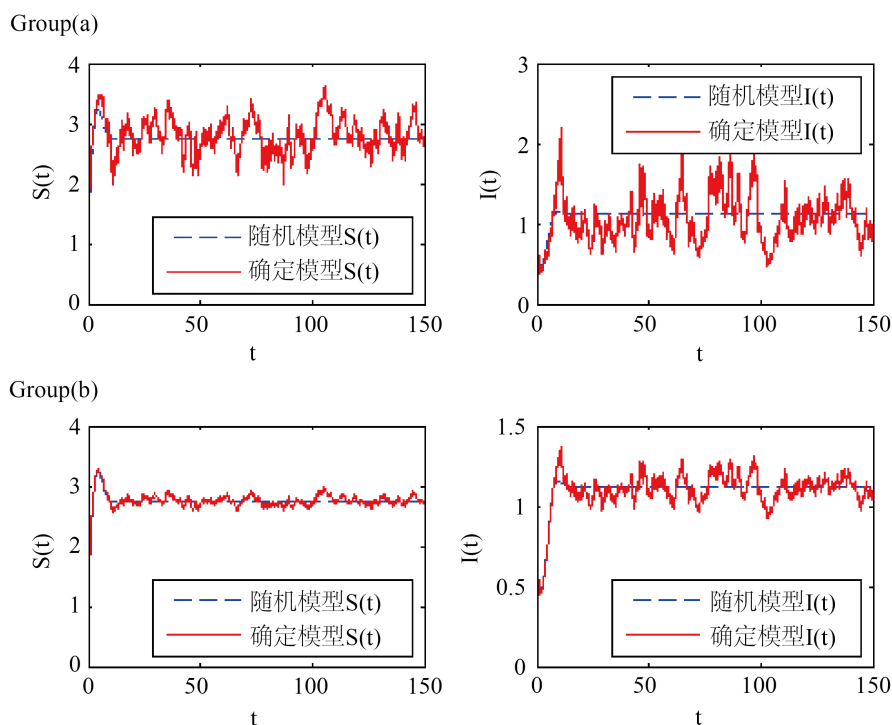


Figure 2. Solution curves of deterministic model (3) and stochastic model (2) ($R_0 > 1$)

图 2. 确定模型(3)和随机模型(2)解曲线的比较 ($R_0 > 1$)

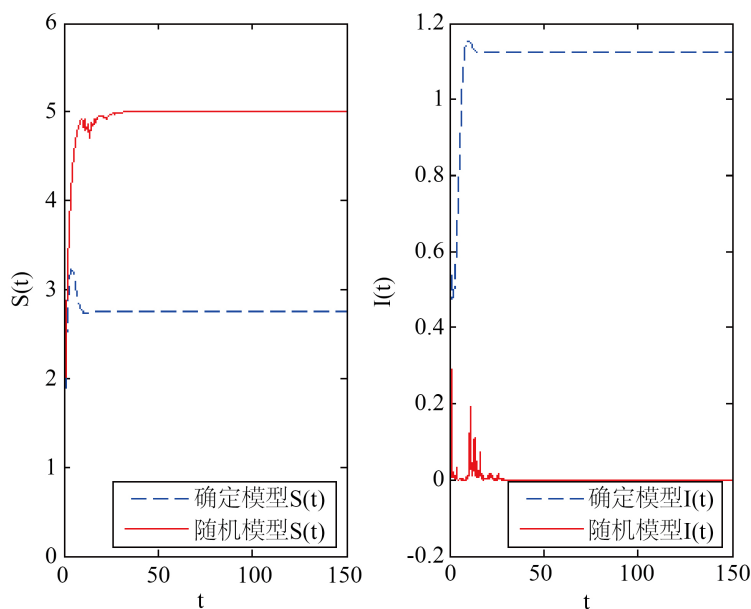


Figure 3. Solution curves of deterministic model (3) and stochastic model (2) with the large noise intensity

图 3. 确定模型(3)和噪声强度较大时随机模型(2)解曲线的比较

噪声强度足够大时, 可以导致疾病灭绝, 在图 2 中, 可以看到当噪声强度不是太大时, 随机模型的解曲线围绕对应的确定性解曲线上下震荡。

参考文献

- [1] Caraballo, T., Elfatini, M., Pettersson, R., *et al.* (2018) A Stochastic SIRI Epidemic Model with Relapse and Media Coverage. *Discrete and Continuous Dynamical Systems (Series B)*, **23**, 3483-3501. <https://doi.org/10.3934/dcdsb.2018250>
- [2] Liu, M.X., Chang, Y.T. and Zuo, L.X. (2016) Modelling the Impact of Media in Controlling the Diseases with a Piecewise Transmission Rate. *Discrete and Dynamics in Nature and Society*, **4**, 1-6. <https://doi.org/10.1155/2016/3458965>
- [3] Cui, J.A., Sun, Y.H. and Zhu, H.P. (2008) The Impact of Media on the Control of Infectious Diseases. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, **20**, 31-53. <https://doi.org/10.1007/s10884-007-9075-0>
- [4] Berrhazi, B.E., Fatini, M.E., Pettersson, R., *et al.* (2019) Media Effects on the Dynamics of a Stochastic SIRI Epidemic Model with Relapse and Lévy Noise Perturbation. *International Journal of Biomathematics*, **12**, 1-22. <https://doi.org/10.1142/S1793524519500372>
- [5] Liu, Q., Jiang, D.Q., Hayat, T., *et al.* (2020) Dynamical Behavior of a Higher Order Stochastically Perturbed SIRI Epidemic Model with Relapse and Media Coverage. *Chaos Solitons & Fractals*, **139**, Article ID: 110013. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.110013>
- [6] 赖祥鑫, 韦煜明, 彭华勤. 一类具有媒体报道影响和饱和发生率的 SIRI 传染病模型[J]. 南宁师范大学学报(自然科学报), 2020, 37(3): 20-31.
- [7] 张艳宏, 许超群, 原三领. 一类接触率受到噪声干扰的随机 SIS 流行病模型研究[J]. 上海理工大学学报(自然科学报), 2015, 37(6): 511-516.
- [8] 张丽萍, 原三领, 赵瑜. 媒体报道影响下具有 Markov 状态切换的随机 SIS 传染病模型阈值动力学行为[J]. 生物数学学报, 2017, 32(1): 31-40.
- [9] Cai, Y.L., Kang, Y., Banerjee, M., *et al.* (2015) A Stochastic Epidemic Model Incorporating Media Coverage. *Communications in Mathematical Sciences*, **14**, 1-17. <https://doi.org/10.4310/CMS.2016.v14.n4.a1>
- [10] 许超群, 原三领, 张同华. 一类随机 SIS 流行病模型全局正解的渐近行为[J]. 工程数学学报, 2013, 30(6): 804-814.
- [11] Lir, R.S., Wu, J.H. and Zhu, H.P. (2007) Media/Psychological Impact on Multiple Outbreaks of Emerging Infectious Diseases. *Computational and Mathematical Methods in Medicine*, **8**, 153-164. <https://doi.org/10.1080/17486700701425870>
- [12] Mao, X.R. (2007) *Stochastic Differential Equations and Applications*. Horwood Publishing, Chichester.