**Advances in Applied Mathematics** 应用数学进展, 2023, 12(2), 728-733
Published Online February 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.122074

# 一类连通图的Tutte多项式

**祁　禄**

辽宁师范大学，辽宁 大连

收稿日期：2023年1月26日；录用日期：2023年2月21日；发布日期：2023年2月28日

## 摘　要

**近年来，随着拓扑学家对纽结理论的深入研究，空间图理论逐渐成为学者们的研究热点。Tutte多项式在空间图理论中具有重要地位，本文利用缩边与减边的性质，借助二元的数学归纳法计算了一类连通图的Tutte多项式，最终得出这类连通图的Tutte多项式。**

## 关键词

**Tutte多项式，二元数学归纳法，$(A,m,n)$图**

# The Tutte Polinomials of a Kind of Connected Graphs

**Lu Qi**

Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Jan. 26th, 2023; accepted: Feb. 21st, 2023; published: Feb. 28th, 2023

## Abstract

**In recent years, with the in-depth research of mathematicians in the field of topology, spatial graph theory gradually becomes a hot topic for scholars. The Tutte polynomials occupy a central place in spatial graph theory. In this paper, we calculate the Tutte polynomials of a kind of connected graphs by quality of edge and Mathematical induction of two variables, lastly, we get the Tutte polynomials of this kind of connected graphs.**

## Keywords

**Tutte Polynomial, Mathematical Induction of Two Variables, Graph $(A,m,n)$**

文章引用: 祁禄. 一类连通图的 Tutte 多项式[J]. 应用数学进展, 2023, 12(2): 728-733.
DOI: 10.12677/aam.2023.122074

## 1. 引言

Tutte 多项式是空间图多项式不变量的一个重要代表，Tutte 多项式包含了图的大量信息[1]，由 Tutte 多项式可以得到图的生成森林数、连通子图数、无圈定向数等[2]，且由 Tutte 多项式可以得到链多项式、Flow 多项式等图的多项式不变量[3]。近年来，学者们提出了许多关于 Tutte 多项式的研究课题，Doslic 直接利用 Tutte 多项式删边与减边的性质计算出书图的具体表达式[4]，Brennan 利用生成函数的方法计算出扇图的 Tutte 多项式[5]，廖云华利用生成子图展开定义得到了几类网格图的 Tutte 多项式，并且通过计算出其某些特殊点的值来得到图的重要参数[6]。Kung 从多角度对 Tutte 多项式进行阐述[7]。

本文计算一类图的 Tutte 多项式，共分为两部分，第一部分介绍了相关的基础知识，在第二部分中，首先计算得到图 $(4,m,n)$ 的 Tutte 多项式。在此基础上，计算得到图 $(A,m,n)$ 的 Tutte 多项式。

## 2. 预备知识

### 2.1. 图

**定义 1.1** 将有序三元组 $(V(G),E(G),\varphi(G))$ 称作图，记为 $G$。将 $V(G)$ 记为图 $G$ 的顶点集，$E(G)$ 记为图 $G$ 的边集，并且 $E(G)\cap V(G)=\varnothing$，$\varphi(G)$ 将 $G$ 的每条边对应 $G$ 的定点对(顶点可以是同一个)。若边 $e$ 与两个顶点 $u,v$ 满足 $\varphi(e)=uv$，则称顶点 $u,v$ 是用边 $e$ 连接的，$e$ 的两个端点是顶点 $u,v$。

**注释 1.1** 若在图 $G$ 中删除边 $e$ 后，图 $G$ 的分支数增加，则称边 $e$ 为图 $G$ 的割边。

**注释 1.2** 若边 $e$ 的两个端点是相同的顶点，则 $e$ 为环边。

**注释 1.3** 若连接同一对顶点的边数大于 1，则这样的边称为多重边。

### 2.2. 连通图

**定义 1.4** 若从顶点 $V_1$ 到顶点 $V_2$ 有路径，则称顶点 $V_1$ 与顶点 $V_2$ 是连通的。如果图中任意一对顶点都是连通的，则称此图为连通图。即图中任意两顶点间至少有一条路径。如图 1 左图为连通图，右图为非连通图。(注：本文涉及的图均为连通平面图。)

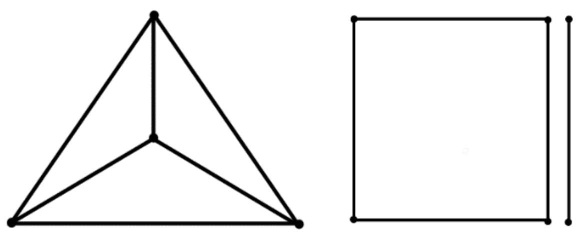


**Figure 1.** Connected graph and unconnected graph
**图 1.** 连通图与非连通图

### 2.3. Tutte 多项式

性质 1：当图 $G$ 的边集是空集时，$T_G(x,y)=1$；

性质 2：当 $e$ 是环边时，$T_G(x,y)=yT(G-e;x,y)$；

性质 3：当 $e$ 是割边时，$T_G(x,y)=xT(G/e;x,y)$；

性质 4：当 $e$ 不是环边也不是割边时，$T_G(x,y)=T(G/e;x,y)+T(G-e;x,y)$。

# 3. $(A,m,n)$图的 Tutte 多项式

## 3.1. $(4,m,n)$ 图的 Tutte 多项式的计算

**定义 2.1** 在四边形的基础上，任意选择一组对边，分别增加 $m$ 条边和 $n$ 条边，得到的图称为 $(4,m,n)$ 图(如图 2)。

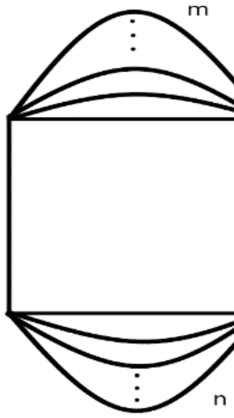


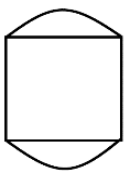
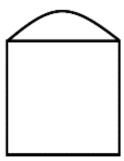
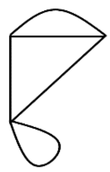

**Figure 2.** Graph $(4,m,n)$

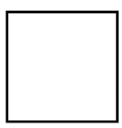
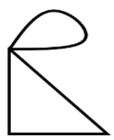
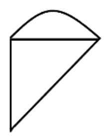
**图 2.** 图 $(4,m,n)$

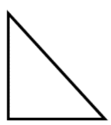
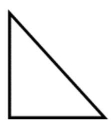
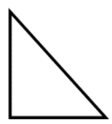
**定理 2.1** 图 $G$ $(4,m,n)$ 的 Tutte 多项式为：

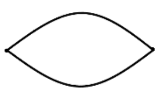
$$T_{(4,m,n)}(x,y)=x^3+(x^2+x+y)(\sum_{i=0}^{m}y^i+\sum_{i=1}^{n}y^i)+(x+y)\sum_{i=1}^{m}y^i\sum_{i=1}^{n}y^i$$

证明：当 $m=1$，

$n=1$时，$T$ (  ) $=T$ (  ) $+T$ (  )

$=T$ (  ) $+T$ (  ) $+yT$ (  )

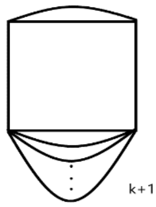
$=x^3+T$ (  ) $+yT$ (  ) $+y[T$ (  )

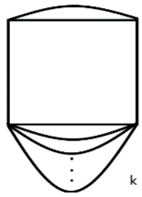
$+yT$ (  )]

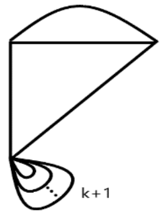
$$=x^3+(x^2+x+y)(1+y)+y(x^2+x+y)+y^2(x+y)$$

$$=x^3+(x^2+x+y)(\sum_{i=0}^{1}y^i+\sum_{i=1}^{1}y^i)+(x+y)\sum_{i=1}^{1}y^i\sum_{i=1}^{1}y^i$$

假设 $n=k$ 时，$T(1,k)=x^3+(x^2+x+y)(\sum_{i=0}^{1}y^i+\sum_{i=1}^{k}y^i)+(x+y)\sum_{i=1}^{1}y^i\sum_{i=1}^{k}y^i$，

下证 $n=k+1$ 成立，$T(1,k+1)=T$ ( 

 ) $=T$ ( 

 ) $+T$ ( 

 )

$$=x^3+(x^2+x+y)(\sum_{i=0}^{1}y^i+\sum_{i=1}^{k}y^i)+(x+y)\sum_{i=1}^{1}y^i\sum_{i=1}^{k}y^i$$
$$+y^{k+1}[(x^2+x+y)+y(x+y)]$$
$$=x^3+(x^2+x+y)(\sum_{i=0}^{1}y^i+\sum_{i=1}^{k+1}y^i)+(x+y)\sum_{i=1}^{1}y^i\sum_{i=1}^{k+1}y^i$$

则 $T(1,n)=x^3+(x^2+x+y)(\sum_{i=0}^{1}y^i+\sum_{i=1}^{n}y^i)+(x+y)\sum_{i=1}^{1}y^i\sum_{i=1}^{n}y^i$ 成立。

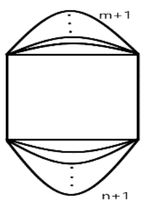
与 $T(1,n)$ 同理，利用 Tutte 多项式减边缩边性质可以证得：

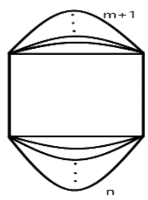
$$T(m,1)=x^3+(x^2+x+y)(\sum_{i=0}^{m}y^i+\sum_{i=1}^{1}y^i)+(x+y)\sum_{i=1}^{m}y^i\sum_{i=1}^{1}y^i\text{.}$$

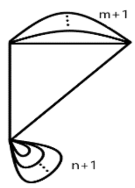
设 $T(m+1,n)=x^3+(x^2+x+y)(\sum_{i=0}^{m+1}y^i+\sum_{i=1}^{n}y^i)+(x+y)\sum_{i=1}^{m+1}y^i\sum_{i=1}^{n}y^i$；

$$T(m,n+1)=x^3+(x^2+x+y)(\sum_{i=0}^{m}y^i+\sum_{i=1}^{n+1}y^i)+(x+y)\sum_{i=1}^{m}y^i\sum_{i=1}^{n+1}y^i\text{，}$$

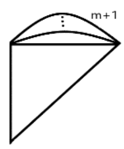
下证 $T(n+1,m+1)$ 成立，

$T(n+1,m+1)=T$ ( 

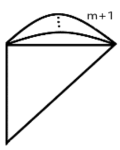
 ) $=T$ ( 

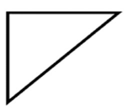
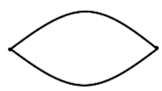
 ) $+T$ ( 

 )

$=x^3+(x^2+x+y)(\sum_{i=0}^{m+1}y^i+\sum_{i=1}^{n}y^i)+(x+y)\sum_{i=1}^{m+1}y^i\sum_{i=1}^{n}y^i+y^{n+1}T$ ( 

 )

其中，$T$ ( 

 ) $=T$ (  ) $+\ (y+y^2+\cdots+y^{m+1})T$ (  )

$$=x^2+x+y+(x+y)\sum_{i=1}^{m+1}y^i$$

则

$$T(n+1,m+1)=x^3+(x^2+x+y)(\sum_{i=0}^{m+1}y^i+\sum_{i=1}^{n}y^i)+(x+y)\sum_{i=1}^{m+1}y^i\sum_{i=1}^{n}y^i+y^{n+1}[x^2+x+y+(x+y)\sum_{i=1}^{m+1}y^i]$$
$$=x^3+(x^2+x+y)(\sum_{i=0}^{m+1}y^i+\sum_{i=1}^{n+1}y^i)+(x+y)\sum_{i=1}^{m+1}y^i\sum_{i=1}^{n+1}y^i$$

定理 2.1 得证。

## 3.2. $(A,m,n)$ 图的 Tutte 多项式的计算

**定义 5.1** 在 $A$ 边形( $A\ge 5$ )的基础上，任选两邻边，分别为其增加 $m$ 条边和 $n$ 条边，得到的图称为 $(A,m,n)$ 图(如图 3)。

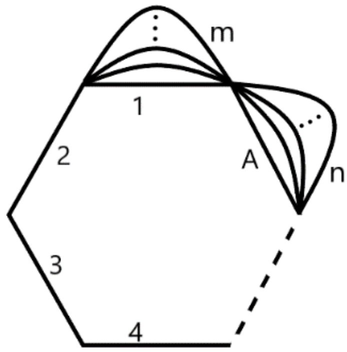



**Figure 3.** Graph $(A,m,n)$
**图 3.** 图 $(A,m,n)$

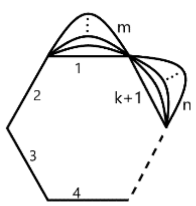
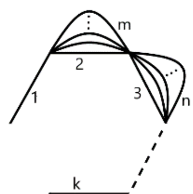
**定理 5.1** $(A,m,n)$ 图的 Tutte 多项式为：

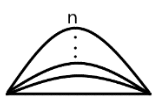
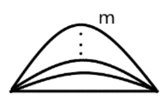
$$T_{(A,m,n)}(x,y)=x^{A-1}+T_{C_{A-1}}(\sum_{i=0}^{m}y^i+\sum_{i=1}^{n}y^i)+T_{C_{A-2}}\sum_{i=1}^{m}y^i\sum_{i=1}^{n}y^i$$

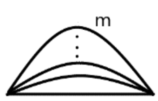
证明：当 $n=5$ 时，与 $(4,m,n)$ 图的 Tutte 多项式一样，借助二变量的数学归纳法即可证明成立。

设 $A=k$ 成立，即 $T_{(k,m,n)}(x,y)=x^{k-1}+T_{C_{k-1}}(\sum_{i=0}^{m}y^i+\sum_{i=1}^{n}y^i)+T_{C_{k-2}}\sum_{i=1}^{m}y^i\sum_{i=1}^{n}y^i$，

下证 $A=k+1$ 成立。

$T_{(k+1,m,n)}=T$ (   ) $=T$ (   ) $+T_{(k,m,n)}$

$=x^{k-2}T$ (   ) $T$ (   ) $+T_{(k,m,n)}$

其中，$T$ (   ) $=x^{k-2}[T$ (  ) $+T$ (  )

$+T$ (  ) $+T$ (   )

$=x^{k-2}(x+y+y^2+\cdots+y^n)$

则

$$
\begin{aligned}
T_{(k+1,m,n)} &= x^{k-2}(x+y+y^2+\cdots+y^n)(x+y+y^2+\cdots+y^m)+T_{(k,m,n)} \\
&= x^{k-2}(x+y+y^2+\cdots y^n)(x+y+y^2+\cdots+y^m)+x^{k-1}+T_{C_{k-1}}(\sum_{i=0}^{m}y^i+\sum_{i=1}^{n}y^i)+T_{C_{k-2}}\sum_{i=1}^{m}y^i\sum_{i=1}^{n}y^i \\
&= x^{k-2}(x+y+y^2+\cdots+y^n)(x+y+y^2+\cdots+y^m) \\
&\quad +x^{k-1}+(x+x^2+\cdots+x^{k-2}+y)(\sum_{i=0}^{m}y^i+\sum_{i=1}^{n}y^i)+(x+x^2+\cdots+x^{k-3}+y)\sum_{i=1}^{m}y^i\sum_{i=1}^{n}y^i \\
&= x^{k-2}[(x^2+x(y+y^2+\cdots+y^m)+x(y+y^2+\cdots+y^n)+(y+y^2+\cdots+y^m)(y+y^2+\cdots+y^n)] \\
&\quad +x^{k-1}+(x+\cdots+x^{k-2}+y)(\sum_{i=0}^{m}y^i+\sum_{i=1}^{n}y^i)+(x+\cdots+x^{k-3}+y)\sum_{i=1}^{m}y^i\sum_{i=1}^{n}y^i \\
&= x^k+x^{k-1}\sum_{i=1}^{m}y^i+x^{k-1}\sum_{i=1}^{n}y^i+x^{k-2}\sum_{i=1}^{m}y^i\sum_{i=1}^{n}y^i+x^{k-1} \\
&\quad +(x+\cdots+x^{k-2}+y)\sum_{i=0}^{m}y^i+(x+\cdots+x^{k-2}+y)\sum_{i=1}^{n}y^i+(x+\cdots+x^{k-3}+y)\sum_{i=1}^{m}y^i\sum_{i=1}^{n}y^i \\
&= x^k+(x+\cdots+x^{k-1}+y)\sum_{i=0}^{m}y^i+(x+\cdots+x^{k-1}+y)\sum_{i=1}^{n}y^i+(x+\cdots+x^{k-2}+y)\sum_{i=1}^{m}y^i\sum_{i=1}^{n}y^i \\
&= x^k+T_{C_k}\sum_{i=0}^{m}y^i+T_{C_k}\sum_{i=1}^{n}y^i+T_{C_{k-1}}\sum_{i=1}^{m}y^i\sum_{i=1}^{n}y^i \\
&= x^k+T_{C_k}(\sum_{i=0}^{m}y^i+\sum_{i=1}^{n}y^i)+T_{C_{k-1}}\sum_{i=1}^{m}y^i\sum_{i=1}^{n}y^i
\end{aligned}
$$

定理 5.1 得证。

## 4. 结论

本文主要研究了一类$(A,m,n)$ （$A\ge 4$）图的 Tutte 多项式，目前学者们只得到轮图、扇图与花图 Tutte 多项式的具体表达，未来会得到更多图的 Tutte 多项式，也可以进一步分析得到图的很多信息与参数。

## 参考文献


[1] Brylawski, T. and Oxley, J. (1992) The Tutte Polynomial and Its Applications. *Matroid Applications*, **40**, 123-155. https://doi.org/10.1017/CBO9780511662041.007

[2] Jin, X. and Zhang, Z. (2010) Zeros of the Jones Polynomial Are Dense in the Complex Plane. *The Electronic Journal of Combinatorics*, **17**, 2493-2503. https://doi.org/10.37236/366

[3] Jaeger, F. (1988) Tutte Polynomials and Link Polynomials. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **103**, 647-654. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1988-0943099-0

[4] Doslic, T. (2013) Planar Polycyclic Graphs and Their Tutte Polynomials. *Journal of Mathematical Chemistry*, **51**, 1599-1607. https://doi.org/10.1007/s10910-013-0167-2

[5] Brennan, C., Mphako, E. and Mansour, T. (2014) Tutte Polynomials of Wheels via Generating Functions. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, **39**, 881-891.

[6] 廖云华. 图多项式若干问题研究[D]: [博士学位论文]. 长沙: 湖南师范大学, 2015.

[7] Kung, J.P.S. (2008) Old and New Perspectives on the Tutte Polynomial. *Annals of Combinatorics*, **12**, 133-137. https://doi.org/10.1007/s00026-008-0342-5