Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(2), 734-741
Published Online February 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.122075

一类特殊的Toeplitz矩阵行列式的计算

安 洋，张文婷*

兰州大学数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2023年1月26日；录用日期：2023年2月21日；发布日期：2023年2月28日

摘 要

Toeplitz矩阵是结构矩阵的一种特殊形式，其研究在矩阵与计算数学理论中占有重要地位，本文主要讨论一类特殊的Toeplitz矩阵行列式的求解，运用行列式的性质得到三个递推关系式，从而将这类特殊的Toeplitz矩阵行列式的求解转化为三对角Toeplitz矩阵行列式的求解，构造等差和类等比数列结合递推关系式求出通项表达式，进而给出了这类特殊的Toeplitz矩阵行列式的精确解。作为应用，解决了这类特殊的Toeplitz矩阵正定性判定的问题。

关键词

Toeplitz矩阵，行列式，正定性

Calculation of Determinant of a Special Toeplitz Matrix

Yang An, Wenting Zhang*

School of Mathematics and Statistics, Lanzhou University, Lanzhou Gansu

Received: Jan. 26th, 2023; accepted: Feb. 21st, 2023; published: Feb. 28th, 2023

Abstract

Toeplitz matrix is one of special forms of structural matrix, and its study plays an important role in the theory of matrix and computational mathematics. This paper mainly discusses the solution of the determinant of a special Toeplitz matrix, three recursive relations are obtained by using the properties of the determinant, and the solution of the determinant of the special Toeplitz matrix is transformed into the solution of the determinant of the tridiagonal Toeplitz matrix, the arithmetic difference and quasi-arithmetic sequence are constructed by combining the recursive relations to

*通讯作者。

文章引用: 安洋, 张文婷. 一类特殊的 Toeplitz 矩阵行列式的计算[J]. 应用数学进展, 2023, 12(2): 734-741.
DOI: 10.12677/aam.2023.122075

find the general term expression, and the exact solution of the determinant of the special Toeplitz matrix is given. As application, the positive qualitative determination problem of this special Toeplitz matrix is solved.

Keywords

Toeplitz Matrix, Determinant, Positive Definite

1. 引言

Toeplitz 矩阵是由德国数学家 Toeplitz Otto 在 1846 年提出的一类具有特殊形式的结构矩阵，它不仅在代数学和计算数学领域[1] [2] [3]具有重要的理论意义，而且在一些相关领域[4] [5] [6]中具有广泛的应用，例如数字图像与信号处理、计算流体力学、数值天气预报、优化问题的求解。基于 Toeplitz 矩阵在数学及其相关领域的重要应用，求解 Toeplitz 矩阵的各类重要参数，如行列式、矩阵的逆、特征值等参数具有重大意义。目前，国内外有很多学者都在从事 Toeplitz 矩阵的相关研究，得到了一系列重要的研究成果，文献[7]考查了 Toeplitz 矩阵的特征值和伪特征值。在文献[8] [9]中，讨论了一些特殊的 Toeplitz 矩阵的逆。文献[10] [11]给出了具有 Fibonacci-Lucas 数的拟循环矩阵与具有 Fibonacci 数和 Lucas 数的循环矩阵的行列式表达式。进一步，文献[12]中通过构造变换矩阵的方法，得到了具有 k-Fibonacci 数和 k-Lucas 数的循环型矩阵的行列式表达式。文献[13]通过构造特殊变换矩阵的方法，结合已有的一些结果得到了具有 Fibonacci 数和 Lucas 数的斜对称 Toeplitz 矩阵的行列式表达式。

本文主要考察一类特殊的 Toeplitz 矩阵

$$G_n=\begin{bmatrix} x & y & z & z & z & \cdots & z \\ y & x & y & z & z & \cdots & z \\ z & y & x & y & z & \cdots & z \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ z & \cdots & z & y & x & y & z \\ z & \cdots & z & z & y & x & y \\ z & \cdots & z & z & z & y & x \end{bmatrix}_{n\times n}$$

其中 x，y，z 是与 n 无关的实变量，运用行列式的性质得到三个递推关系式，从而将这类特殊的 Toeplitz 矩阵行列式的求解转化为三对角 Toeplitz 矩阵行列式的求解，构造等差和类等比数列结合递推关系式求出通项表达式，进而得到 G_n 行列式的精确解。进一步基于矩阵的各阶顺序主子式均大于零则矩阵正定的事实，结合 G_n 行列式的精确解，借助一些计算软件如 matlab，解决了矩阵 G_n 的正定性判定的问题。

2. 矩阵 G_n 行列式的求解

本节我们给出求解 G_n 的行列式 $|G_n|$ 的一种递推方法，进而给出 $|G_n|$ 的精确解。

首先我们回顾三对角 Toeplitz 矩阵行列式 $C_n\ (ac\neq 0)$ 的求解。

$$C_n=\begin{vmatrix} b & c & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & b & c & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b & c \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \end{vmatrix}_{n\times n} \quad a,b,c\in R$$

注意到 C_n 是一种具有递推结构的行列式，其所有主子式的结构相同，从而按最后一列展开，将所得的 $n-1$ 阶行列式再展开即得递推公式，根据参考文献[14]，通过对方程 $\lambda^2-b\lambda+ac=0$ 中 Δ 的三种情况分析，得到 C_n 的通解：

(i) 当 $\Delta>0$ 时，

$$C_n=\frac{C_2-\beta C_1}{\alpha(\alpha-\beta)}\alpha^n+\frac{C_2-\alpha C_1}{\beta(\beta-\alpha)}\beta^n=k_1\alpha^n+k_2\beta^n$$

其中 α,β 为方程 $\lambda^2-b\lambda+ac=0$ 的两个不等实根， k_1,k_2 由 C_1,C_2 来确定。

(ii) 当 $\Delta=0$ 时，

$$C_n=\left(\frac{C_2-\alpha C_1}{\alpha^2}n+\frac{2\alpha C_1-C_2}{\alpha^2}\right)\alpha^n=(g_1n+g_2)\alpha^n$$

其中 α 为方程 $\lambda^2-b\lambda+ac=0$ 的两个相等实根， g_1,g_2 由 C_1,C_2 来确定。

(iii) 当 $\Delta<0$ 时，

$$C_n=\frac{C_2-\beta C_1}{\alpha(\alpha-\beta)}\alpha^n+\frac{C_2-\alpha C_1}{\beta(\beta-\alpha)}\beta^n=l_1\alpha^n+l_2\beta^n$$

其中 α,β 为方程 $\lambda^2-b\lambda+ac=0$ 的两个不等虚根， l_1,l_2 由 C_1,C_2 来确定。

利用上述三个公式解就可以计算三对角Toeplitz矩阵行列式，其中具体参数仍需通过题目的条件来确定。

其次我们给出矩阵 G_n 行列式的一种递推解法。

先利用行列式的性质化简 G_n 的行列式 $|G_n|$：将 $|G_n|$ 扩充为 $n+1$ 阶行列式 D_{n+1}，再将 D_{n+1} 第一列的 $-z$ 倍加到其余各列，最后对 D_{n+1} 按第 $n+1$ 列展开，得到

$$\begin{aligned}|G_n|=D_{n+1}&=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & x & y & z & \cdots & z & z \\ 1 & y & x & y & \cdots & z & z \\ 1 & z & y & x & \cdots & z & z \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & z & z & z & \cdots & x & y \\ 1 & z & z & z & \cdots & y & x \end{vmatrix} \\ &=\begin{vmatrix} 1 & -z & -z & -z & \cdots & -z & -z \\ 1 & x-z & y-z & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & y-z & x-z & y-z & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & y-z & x-z & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x-z & y-z \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & y-z & x-z \end{vmatrix} \\ &=(-1)^{n+1}zA_n-(y-z)B_n+(x-z)D_n\end{aligned}\tag{1}$$

其中

$$A_n=\begin{vmatrix}1 & x-z & y-z & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & y-z & x-z & y-z & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 0 & y-z & x-z & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x-z & y-z\\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & y-z & x-z\\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & y-z\end{vmatrix}_{n\times n}$$

$$B_n=\begin{vmatrix}1 & -z & -z & -z & \cdots & -z & -z\\ 1 & x-z & y-z & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & y-z & x-z & y-z & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 0 & y-z & x-z & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x-z & y-z\\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & y-z\end{vmatrix}_{n\times n}$$

再求解 B_n：对 B_n 按第 n 行展开，再对第二项中 $n-1$ 阶行列式提取公因式 $-z$，得到

$$\begin{aligned}B_n&=(y-z)D_{n-1}+(-1)^{n+1}\begin{vmatrix}-z & -z & -z & \cdots & -z & -z\\ x-z & y-z & 0 & \cdots & 0 & 0\\ y-z & x-z & y-z & \cdots & 0 & 0\\ 0 & y-z & x-z & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-z & y-z\end{vmatrix}\\ &=(y-z)D_{n-1}+(-1)^n zA_{n-1}^{\mathrm{T}}\\ &=(y-z)D_{n-1}+(-1)^n zA_{n-1}\end{aligned}\tag{2}$$

综上，将(2)代入到(1)中，得到

$$|G_n|=D_{n+1}=(x-z)D_n-(y-z)^2D_{n-1}+(-1)^{n+1}zA_n+(-1)^{n+1}(y-z)zA_{n-1}\tag{3}$$

这样就将 $|G_n|$ 的求解转化为求解 A_n 和 G_n 自身的递归问题。

接下来求解 A_n：对 A_n 按第 n 行展开，可以观察到第二项中 $n-1$ 阶行列式是三对角 Toeplitz 矩阵行列式，得到

$$\begin{aligned}A_n&=(y-z)A_{n-1}+(-1)^{n+1}\begin{vmatrix}x-z & y-z & 0 & \cdots & 0 & 0\\ y-z & x-z & y-z & \cdots & 0 & 0\\ 0 & y-z & x-z & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-z & y-z\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y-z & x-z\end{vmatrix}\\ &=(y-z)A_{n-1}+(-1)^{n+1}C_{n-1}\end{aligned}\tag{4}$$

其中 C_{n-1} 是 $n-1$ 阶三对角 Toeplitz 矩阵行列式。

最后我们求解 $|G_n|=D_{n+1}$：根据(3)和(4)，将 $|G_n|$ 的求解转化为求解 C_{n-1} 和 A_n 以及 D_{n+1} 自身的递归问

题。根据 C_{n-1} 公式解的情况，分三种情形讨论 $|G_n|$ 的求解。

情形(一)： $\Delta=(x+2y-3z)(x-2y+z)>0$。

令 α,β 为方程 $\lambda^2-(x-z)\lambda+(y-z)^2=0$ 的两个不等的实数根，$k_1=\dfrac{C_2-\beta C_1}{\alpha(\alpha-\beta)}$，$k_2=\dfrac{C_2-\alpha C_1}{\beta(\beta-\alpha)}$，根据前文三对角 Toeplitz 矩阵行列式的公式解结论，得到

$$C_{n-1}=k_1\alpha^{n-1}+k_2\beta^{n-1}$$

首先构造等差数列求解 A_n，将 C_{n-1} 代入(4)，并在等号两边同除以 $(y-z)^n$，得到

$$\frac{A_n}{(y-z)^n}=\frac{A_{n-1}}{(y-z)^{n-1}}-\left(\frac{k_1}{\alpha}\left(\frac{\alpha}{z-y}\right)^n+\frac{k_2}{\beta}\left(\frac{\beta}{z-y}\right)^n\right)$$

其中 $\dfrac{A_n}{(y-z)^n}$ 是等差数列，$A_1=1$，进行等差数列求解，可得通项

$$\frac{A_n}{(y-z)^n}=\frac{1}{y-z}-\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{k_1}{\alpha}\left(\frac{\alpha}{z-y}\right)^k+\frac{k_2}{\beta}\left(\frac{\beta}{z-y}\right)^k\right)$$

于是

$$\begin{aligned}A_n&=(y-z)^{n-1}-(y-z)^n\frac{k_1}{\alpha}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{\alpha}{z-y}\right)^k-(y-z)^n\frac{k_2}{\beta}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{\beta}{z-y}\right)^k\\&=(y-z)^{n-1}+\frac{k_1\left((y-z)^{n-1}-\alpha^n\right)}{z-y-\alpha}+\frac{k_2\left((y-z)^{n-1}-\beta^n\right)}{z-y-\beta}\end{aligned}$$

其次构造类等比数列求解 D_{n+1}，根据(3)，得到

$$D_{n+1}-(x-z)D_n+(y-z)^2D_{n-1}=(-1)^{n+1}zA_n+(-1)^{n+1}(y-z)zA_{n-1}$$

利用递推法来待定系数求解上述二阶线性递推公式。记上述等式右边所有项的总和为 F_{n-1}，即

$$F_{n-1}=(-1)^{n+1}zA_n+(-1)^{n+1}(y-z)zA_{n-1}$$

因为 F_n 是关于 A_n,A_{n-1} 的表达式，根据 A_n,A_{n-1} 的结构形式，可以推断出 F_n 是关于 x,y,z 的 n 次多项式，所以可以单独求 F_n 的相关函数(F_n 的相关函数本质上是等比数列求和)。令

$$D_{n+1}-(x-z)D_n+(y-z)^2D_{n-1}=0$$

通过观察，上述方程与求解 C_n 过程中已有的方程 $\lambda^2-(x-z)\lambda+(y-z)^2=0$ 相同，所以 α,β 也是递推关系式 D_n 的两个不等的实根，所以可以构造出如下两个类等比递推关系式

$$D_{n+1}-\alpha D_n=\beta(D_n-\alpha D_{n-1})+F_{n-1} \tag{5}$$

$$D_{n+1}-\beta D_n=\alpha(D_n-\beta D_{n-1})+F_{n-1} \tag{6}$$

(5)式中，$D_{n+1}-\alpha D_n$ 是类等比数列，初始条件 $D_2-\alpha D_1=x-\alpha$，进行类等比数列求解，可得通项

$$D_{n+1}-\alpha D_n=\beta^{n-1}(x-\alpha)+\sum_{k=1}^{n-1}\beta^{n-k-1}F_k \tag{7}$$

对(6)式进行相同处理，可得通项

$$D_{n+1}-\beta D_n=\alpha^{n-1}\left(x-\beta\right)+\sum_{k=1}^{n-1}\alpha^{n-k-1}F_k \tag{8}$$

(8)减(7)，消去 D_{n+1}，从而有

$$\left(\alpha-\beta\right)D_n=\alpha^{n-1}\left(x-\beta\right)-\beta^{n-1}\left(x-\alpha\right)+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\alpha^{n-k-1}-\beta^{n-k-1}\right)F_k$$

故

$$D_n=\alpha^{n-1}\frac{x-\beta}{\alpha-\beta}-\beta^{n-1}\frac{x-\alpha}{\alpha-\beta}+\frac{1}{\alpha-\beta}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\alpha^{n-k-1}-\beta^{n-k-1}\right)F_k$$

从而得到 $\left|G_n\right|=D_{n+1}$ 的公式解

$$\left|G_n\right|=D_{n+1}=\alpha^{n}\frac{x-\beta}{\alpha-\beta}-\beta^{n}\frac{x-\alpha}{\alpha-\beta}+\frac{1}{\alpha-\beta}\sum_{k=1}^{n}\left(\alpha^{n-k}-\beta^{n-k}\right)F_k$$

因此将 F_k 代入上式，可得当 $\Delta>0$ 时，$\left|G_n\right|$ 关于 n,x,y,z 的公式解，可借助一些计算软件如 matlab 的符号运算给出具体形式。

情形(二)： $\Delta=\left(x+2y-3z\right)\left(x-2y+z\right)=0$ 。

令 α 为方程 $\lambda^2-\left(x-z\right)\lambda+\left(y-z\right)^2=0$ 的两个相同的实数根，$g_1=\dfrac{C_2-\alpha C_1}{\alpha^2}$，$g_2=\dfrac{2\alpha C_1-C_2}{\alpha^2}$，根据三对角 Toeplitz 矩阵行列式的公式解，得到

$$C_{n-1}=\left(g_1\left(n-1\right)+g_2\right)\alpha^{n-1}$$

首先构造等差乘等比数列求解 A_n，将 C_{n-1} 代入(4)，并在等号两边同时除以 $\left(y-z\right)^n$，得到

$$\frac{A_n}{\left(y-z\right)^n}=\frac{A_{n-1}}{\left(y-z\right)^{n-1}}-\frac{g_1\left(n-1\right)+g_2}{\alpha}\left(\frac{\alpha}{z-y}\right)^n$$

其中 $\dfrac{A_n}{\left(y-z\right)^n}$ 是等差数列，$A_1=1$，进行等差数列求解，可得通项

$$\frac{A_n}{\left(y-z\right)^n}=\frac{1}{y-z}-\sum_{k=2}^{n}\frac{g_1\left(k-1\right)+g_2}{\alpha}\left(\frac{\alpha}{z-y}\right)^k$$

利用错位相减法对等差乘等比数列求和，得到 A_n 的通项

$$\begin{aligned}A_n&=\left(y-z\right)^{n-1}-\left(y-z\right)^n\sum_{k=2}^{n}\frac{g_1\left(k-1\right)+g_2}{\alpha}\left(\frac{\alpha}{z-y}\right)^k\\&=\left(y-z\right)^{n-1}-\left(y-z\right)^n\times\left(\frac{\left(g_1+g_2\right)\alpha}{z-y}-\frac{\left(\left(n-1\right)g_1+g_2\right)\alpha^n}{\left(z-y\right)^n}+\frac{g_1\alpha^2\left(1-\dfrac{\alpha^{n-2}}{\left(z-y\right)^{n-2}}\right)}{z-y-\alpha}\right)\end{aligned}$$

其次构造类等比数列求解 D_{n+1}，根据(3)，得到

$$D_{n+1}-\left(x-z\right)D_n+\left(y-z\right)^2D_{n-1}=\left(-1\right)^{n+1}zA_n+\left(-1\right)^{n+1}\left(y-z\right)zA_{n-1}$$

利用递推法来待定系数求解上述二阶线性递推公式。记上述等式右边所有项的总和为 F_{n-1}，即

DOI: 10.12677/aam.2023.122075

$$F_{n-1}=(-1)^{n+1}zA_n+(-1)^{n+1}(y-z)zA_{n-1}$$

因为F_n是关于A_n,A_{n-1}的式子，且根据A_n,A_{n-1}的结构形式，可以推断出F_n是关于x,y,z的n次多项式，所以可以单独求F_n的相关函数(F_n的相关函数本质上是等比以及等差乘等比数列求和)。令

$$D_{n+1}-(x-z)D_n+(y-z)^2D_{n-1}=0$$

通过观察，上述等式的方程与求解C_n过程中已有的方程$\lambda^2-(x-z)\lambda+(y-z)^2=0$相同，所以$\alpha$也是递推关系式$D_n$的两个相等的实根，所以可以构造出如下类等比递推关系式

$$D_{n+1}-\alpha D_n=\alpha(D_n-\alpha D_{n-1})+F_{n-1} \tag{9}$$

在(9)式中，$D_{n+1}-\alpha D_n$是类等比数列，初始条件$D_2-\alpha D_1=x-\alpha$，进行类等比数列求解，可得通项

$$D_{n+1}-\alpha D_n=\alpha^{n-1}(x-\alpha)+\sum_{k=1}^{n-1}\alpha^{n-k-1}F_k$$

等号两边同除α^{n+1}

$$\frac{D_{n+1}}{\alpha^{n+1}}-\frac{D_n}{\alpha^n}=\frac{x-\alpha}{\alpha^2}+\sum_{k=1}^{n-1}\alpha^{-k-2}F_k$$

其中$\dfrac{D_{n+1}}{\alpha^{n+1}}$是等差数列，$D_1=1$，进行等差数列求解，可得通项

$$\frac{D_{n+1}}{\alpha^{n+1}}=\frac{1}{\alpha}+n\frac{x-\alpha}{\alpha^2}+\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\alpha^{-k-2}F_k$$

从而得到$|G_n|=D_{n+1}$的公式解

$$|G_n|=D_{n+1}=\alpha^n+n(x-\alpha)\alpha^{n-1}+\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\alpha^{n-k-1}F_k$$

因此将F_k代入上式，可得当$\Delta=0$时，$|G_n|$关于n,x,y,z的公式解，可借助一些计算软件如matlab的符号运算给出具体形式。

情形(三)：$\Delta=(x+2y-3z)(x-2y+z)<0$。

令α,β为特征方程$\lambda^2-(x-z)\lambda+(y-z)^2=0$的两个不同的虚数根，得到

$$C_{n-1}=l_1\alpha^{n-1}+l_2\beta^{n-1}$$

利用和情形(一)类似的讨论，可以得到$|G_n|=D_{n+1}$的公式解

$$|G_n|=D_{n+1}=\alpha^n\frac{x-\beta}{\alpha-\beta}-\beta^n\frac{x-\alpha}{\alpha-\beta}+\frac{1}{\alpha-\beta}\sum_{k=1}^{n}(\alpha^{n-k}-\beta^{n-k})F_k$$

因此将F_k代入上式，可得当$\Delta<0$时，$|G_n|$关于n,x,y,z的公式解，可借助一些计算软件如matlab的符号运算给出具体形式。

3. 正定性的判定

利用上一节给出的这类特殊的Toeplitz矩阵行列式$|G_n|$的表达式，当$n=1,2,3,\cdots$时，借助一些计算软件如matlab，可以计算出G_n的各阶顺序主子式，注意到矩阵的各阶顺序主子式均大于零则矩阵是正定的，从而给出了这类特殊的Toeplitz矩阵正定性的判定。

注：本文论证前提x,y,z是与n无关的实变量。如果x,y,z是关于n的函数，则本文中提到的三个递

推关系式(1)，(3)，(4)依旧成立，但 G_n 的精确解还需进一步讨论。

基金项目

本研究由国家自然科学基金面上项目(12271224)和兰州大学教育教学改革研究项目(JYXM-2020-20252)资助。

参考文献

[1] 梁金金. H-Toeplitz 算子的代数性质[J]. 应用数学进展, 2021, 10(12): 4489-4497. https://doi.org/10.12677/AAM.2021.1012478

[2] 邓开予. Fock 空间亚正规的 Toeplitz 算子[J]. 应用数学进展, 2022, 11(8): 5122-5127. https://doi.org/10.12677/AAM.2022.118537

[3] 李孟珂. Dirichlet 空间上 H-Toeplitz 算子的交换性[J]. 应用数学进展, 2021, 10(11): 3699-3711. https://doi.org/10.12677/AAM.2021.1011393

[4] 傅毛里, 刘仲云. Hermitian 正定 Toeplitz 线性方程组的外推 CSCS 方法[J]. 应用数学进展, 2022, 11(3): 1484-1492. https://doi.org/10.12677/AAM.2022.113162

[5] Mukherjee, B.N. and Maiti, S.S. (1988) On Some Properties of Positive Definite Toeplitz Matrices and Their Possible Applications. *Linear Algebra and Its Applications*, **102**, 211-240. https://doi.org/10.1016/0024-3795(88)90326-6

[6] Chillag, D. (1995) Regular Representations of Semisimple Algebras, Separable Field Extensions, Group Characters, Generalized Circulants, and Generalized Cyclic Codes. *Linear Algebra and Its Applications*, **218**, 147-183. https://doi.org/10.1016/0024-3795(93)00167-X

[7] Reichel, L. and Trefethen, L.N. (1992) Eigenvalues and Pseudo-Eigenvalues of Toeplitz Matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, **162**, 153-185. https://doi.org/10.1016/0024-3795(92)90374-J

[8] Ben-Artzi, A. and Shalom, T. (1986) On Inversion of Toeplitz and Close to Toeplitz Matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, **75**, 173-192. https://doi.org/10.1016/0024-3795(86)90188-6

[9] Heinig, G. (2002) On the Reconstruction of Toeplitz Matrix Inverses from Columns. *Linear Algebra and Its Applications*, **350**, 199-212. https://doi.org/10.1016/S0024-3795(02)00289-6

[10] Jiang, X.Y. and Hong, K. (2013) Explicit Determinants of the *K*-Fibonacci and *K*-Lucas RSFPLR Circulant Matrix in Codes. *International Conference on Information Computing and Applications*, Springer, Berlin, Heidelberg, 625-637. https://doi.org/10.1007/978-3-642-53932-9_61

[11] Shen, S.Q., Cen, J.M. and Hao, Y. (2011) On the Determinants and Inverses of Circulant Matrices with Fibonacci and Lucas Numbers. *Applied Mathematics and Computation*, **217**, 9790-9797. https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.04.072

[12] Jiang, Z., Gong, Y. and Gao, Y. (2014) Circulant Type Matrices with the Sum and Product of Fibonacci and Lucas Numbers. *Abstract and Applied Analysis*, **2014**, Article ID 375251. https://doi.org/10.1155/2014/375251

[13] Chen, X.T., Jiang, Z.L. and Wang, J.M. (2016) Determinants and Inverses of Fibonacci and Lucas Skew Symmetric Toeplitz Matrices. *British Journal of Mathematics & Computer Science*, **19**, 1-21. https://doi.org/10.9734/BJMCS/2016/28848

[14] 星辰, 如此. 一种通常情况下三对角行列式的解法[EB/OL]. https://zhuanlan.zhihu.com/p/366465297, 2021-04-20.