

基于贝叶斯方法的非均匀介质内混合障碍反散射问题研究

史星雨*, 尹伟石

长春理工大学, 数学与统计学院, 吉林 长春

收稿日期: 2023年2月13日; 录用日期: 2023年3月8日; 发布日期: 2023年3月15日

摘要

考虑二维情况下非均匀介质内的声波混合障碍反散射问题。在非均匀介质折射率是二元函数时, 提出了一种同时重构裂缝和不可穿透障碍的贝叶斯方法。将混合障碍物的位置信息作为贝叶斯方法的先验信息, 使用马尔科夫链蒙特卡罗(MCMC)算法重构裂缝和不可穿透障碍的形状参数。数值实验的结果表明, 该方法能有效重构非均匀介质内混合障碍的形状。

关键词

非均匀介质, 混合障碍反散射, 贝叶斯方法, MCMC算法

Research on Mixed Obstacles Scattering in Inhomogeneous Medium Based on Bayesian Method

Xingyu Shi*, Weishi Yin

School of Mathematics and Statistics, Changchun University of Science and Technology, Changchun Jilin

Received: Feb. 13th, 2023; accepted: Mar. 8th, 2023; published: Mar. 15th, 2023

Abstract

In this paper, the problem of acoustic wave inverse scattering by mixed obstacles in inhomogeneous media in two dimensions is considered. In the case that the refractive index of inhomogeneous media is a binary function, a Bayesian method for simultaneously reconstructing cracks and im-

*通讯作者。

penetrable obstacles is proposed. The position information of mixed obstacles is taken as the prior information of Bayesian method. Markov chain Monte Carlo (MCMC) algorithm is used to reconstruct the shape parameters of cracks and impenetrable obstacles. The results of numerical experiments show that this method can effectively reconstruct the shape of mixed obstacles in inhomogeneous media.

Keywords

Inhomogeneous Medium, Inverse Mixed Obstacles Scattering, Bayesian Method, MCMC Algorithm

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

非均匀介质中的障碍反散射问题是一个受到关注的问题, 这类反问题在雷达扫描、医学成像以及隐形技术等方面都有重要的实际意义。

下面给出非均匀介质内混合障碍散射问题的数学描述。设 D 是嵌入在非均匀介质内的不可穿透障碍物, Γ 是嵌入在非均匀介质内的裂缝。利用非均匀介质的折射率 $n(x, y)$ 来刻画介质的性态, 其中 $n(x, y)$ 是关于 x, y 的二元函数。散射总场 u 可以分解为 $u = u^s + u^i$ 。这里 u^i 是入射场, 形式为时谐声平面波 $u^i(x) = e^{ikd \cdot x}$, 其中 $i = \sqrt{-1}$ 为虚数单位, $x \in R^2$, d 为入射方向, u^s 为非均匀介质内的散射场。散射总场 u 满足如下的 Helmholtz 方程:

$$\Delta u + k^2 n(x, y) u = 0, \text{ in } R^2 \setminus (\bar{D} \cup \bar{\Gamma}), \quad (1)$$

这里 k 表示在介质内的波数。而且 u 需要满足障碍物边界 ∂D 以及裂缝 Γ 上 Dirichlet 条件:

$$u = 0, \text{ on } \partial D, \quad (2)$$

$$u = 0, \text{ on } \Gamma. \quad (3)$$

u^s 满足无穷远处的 Sommerfeld 辐射条件

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial u^s}{\partial r} - i k u^s \right) = 0, r = |x|. \quad (4)$$

此外散射场 u^s 具有如下的渐进形式

$$u^s(x) = \frac{e^{ik|x|}}{\sqrt{|x|}} \left[u^\infty(\hat{x}, d) + o\left(\frac{1}{|x|}\right) \right], |x| \rightarrow \infty,$$

其中 $\hat{x} = x/|x|$, 在所有方向上一致成立, $u^\infty(\hat{x}, d)$ 是散射场 u^s 的远场模式。本文拟采用有限元方法求解散射远场 u^∞ 。

本文考虑的反散射问题是在给定入射场 $u^i(x) = e^{ikd \cdot x}$, 已知非均匀介质的折射率 $n(x, y)$, 固定波数 k 和入射方向 d 的情况下, 通过散射远场重构障碍物 D 和裂缝 Γ 的形状参数。

针对模型(1)~(4), 学者们在有关重构非均匀介质内障碍物问题方面, 进行了理论分析以及算法设计。Rondi 通过低频声学成像确定了非均匀介质内障碍物的形状和位置, 并且证明了已知非均匀介质中可以唯

一确定该障碍物[1]。Nachman 证明了在一个已知的非均匀介质内, 通过固定频率下的散射远场可以唯一确定障碍物, 而不需要边界条件作为先验信息[2]。Xiaodong Liu 考虑分段均匀介质中不可穿透障碍反散射问题, 证明了由平面入射波的远场模式可以唯一确定障碍物及其边界条件[3]。Haihua Qin 考虑重建可穿透的非均匀介质和其中埋藏的不可穿透障碍物, 给出数值算例验证了算法的准确性[4]。Fioralba Cakoni 开发了重构裂缝形状的线性采样法[5]。Jianli Xiang 考虑了时谐弹性波混合障碍反散射问题, 改进了因式分解法重构不可穿透障碍物及裂缝的形状[6]。但是上述两篇文献在求解反问题时提出的都是定性方法, 不能给出较为精准的定量结果。并且当空间中存在折射率为函数形式的介质时, 重构介质内埋藏的障碍物以及裂缝依旧是十分困难的。

在非均匀介质内反散射问题的计算中通常会遇到数据缺失的情况, 相关研究表明, 机器学习方法可以在一定程度上弥补数据缺失产生的影响。近些年, 贝叶斯方法也被广泛应用于反问题领域, 它为我们提供了一个从统计角度思考反问题的新思路。A. M. Stuart 给出了求解反问题的贝叶斯理论框架, 以及基于贝叶斯方法的反问题适定性定理的证明[7]。S. L. Cotter 等人给出了求解偏微分方程的贝叶斯理论框架并给出了相关的定理及证明[8]。Jiangfeng Huang 等人研究了散射体在以常值分段函数定义的非均匀介质中的声波反散射问题的贝叶斯方法[9]。Zhaoxing Li 等人考虑使用扩采样法结合贝叶斯方法, 基于有限孔径数据, 重构声软障碍物[10]。Yanfang Liu 等人考虑了直接采样法和贝叶斯方法相结合, 利用部分测量数据数据重构移动源[11]。[10] [11]两篇文献都给出了数值算例, 在数据缺失的情况下贝叶斯方法也能反演出不错效果。更多关于求解反散射问题的贝叶斯方法的文献可以参考[12] [13]。

本文拟使用贝叶斯方法, 在非均匀介质的折射率为二元函数的情况下, 给定一定先验信息, 重构非均匀介质内混合障碍物的形状, 并通过数值实验证明算法的有效性。

2. 基于贝叶斯方法的参数反演模型

本节提出了一种重构折射率为多元函数情况下的非均匀介质中混合障碍物边界的贝叶斯方法。假设障碍物 D 的边界 ∂D 具有如下的参数表达:

$$\partial D := (c_1, c_2) + r(\theta)(\cos \theta, \sin \theta), 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

其中 (c_1, c_2) 是指障碍物 D 的位置, $r(\theta)$ 是障碍物 D 的半径, $r(\theta)$ 具有如下的傅里叶展开形式:

$$r(\theta) = a_0 + \sum_{j=1}^J (a_j \cos j\theta + b_j \sin j\theta), j = 1, 2, \dots, J.$$

假设裂缝 Γ 具有以下的参数表达:

$$\Gamma = (c_3, c_4) + (d \cos \theta, e \sin \theta),$$

其中 (c_3, c_4) 是指裂缝 Γ 的位置。

设本文中待反演参数集合为 q , q 可表述为:

$$q = \{q(1), q(2)\}.$$

其中 $q(1) = (c_1, c_2, a_0, a_1, b_1, \dots, a_j, b_j), j = 1, 2, \dots, J$, $q(2) = (c_3, c_4, d, e)$ 。

根据散射远场 $u^\infty(\hat{x})$ 和障碍物 D 的关系, 定义正散射问题算子:

$$u^\infty(\hat{x}) = G(D).$$

由于障碍物 D 可参数集合 q 决定, 那么上式可写为

$$u^\infty(\hat{x}) = G(q),$$

其中非线性观测算子 $G: R^N \rightarrow C(S)$ 是参数空间到散射远场空间的抽象映射。通过考虑在测量过程中产生的噪声 η , 本文反问题模型为如下形式:

$$y = G(q) + \eta,$$

其中 $G(q)$ 是真实的远场散射数据, y 为带有噪声的观测值, q 是待反演的障碍物参数, 观测噪声 η 满足 $\eta \sim N(0, \sigma^2)$ 。这样便得到如下的贝叶斯形式:

$$p(q|y) = \frac{p(y|q)p(q)}{\int p(y|q)p(q)d\alpha}.$$

根据概率分布与概率密度之间的关系, Radon-Nikodym 导数如下:

$$\frac{du_y}{du_0}(p) \propto \exp\left\{-\frac{(y-g(q))^2}{2\sigma^2}\right\},$$

其中 u_y 是 q 的后验分布, u_0 是 q 的先验分布, σ 是噪声 η 的标准差。通过上述分析, 我们通过贝叶斯方法将反散射问题转化为未知参数 q 的后验概率分布函数的求解。本文采用 MCMC 算法通过不断的迭代得到参数数据, 最后对迭代得到的数据取均值作为后验分布的信息。算法流程如下表 1。

Table 1. MCMC algorithm for solving the scattering problem of mixed obstacles in inhomogeneous media

表 1. 求解非均匀介质内混合障碍散射问题的 MCMC 算法

MCMC 算法	
步骤 1	根据先验信息, 给定初始边界参数 $q_0 = \{q_0(1), q_0(2)\}$, $\beta \in (0, 1)$ 是一个常数, 并给定最大迭代次数 K 。
步骤 2	根据模型(1)~(4), 计算出在参数为 q_0 时的散射远场数据, 并计算出该模型参数对应的条件概率密度 $p(q_0)$ 。
步骤 3	根据提议分布对参数 q_i 进行迭代更新得到新的参数 q^* , 并计算模型在参数 q^* 下对应的概率密度 $p(q^*)$, 其中 $q^* = (1 - \beta^2)q_i + \beta\omega$ 。
步骤 4	产生一个 0~1 之间的随机数 u , 如果 $u < \max\left\{1, \frac{p(q^*)}{p(q_i)}\right\}$, 则接受该测试参数并设定为当前模型参数, 即 $q_{i+1} = q^*$, 否则不接受该测试参数 $q_{i+1} = q_i$ 。
步骤 5	重复步骤 3 和 4 直至达到迭代次数。
步骤 6	将迭代得到的 q 取均值作为反演的形状参数。

3. 数值实验

本节通过一些数值实验验证上文所提出的方法对于混合障碍物声波反散射问题的有效性。实验中设定入射波形式为时谐声平面波 $u^i = e^{ikx \cdot d}$, 波数 $k = 2$, 入射方向 $d = (1, 0)$, 观测方向为 64 个。

对于贝叶斯方法, 考虑带有噪声的远场数据重构混合障碍物的边界:

$$u_{Bayes}^{\infty, \sigma}(\hat{x}) = u^\infty(\hat{x}) + \eta$$

其中 η 是服从正态分布 $N(0, \sigma^2)$ 的随机噪声, 并且设置每组实验贝叶斯方法的迭代次数为 20,000 次。

3.1. 非均匀介质折射率不同时, 混合障碍重构

本组实验主要考虑不同折射率下, 贝叶斯方法重构混合障碍物形状的效果。考虑如下花生形状的障碍物和裂缝:

$$\partial D = \left\{ (0, -3) + \sqrt{\cos^2 t + 0.25 \sin^2 t} (\cos t, \sin t) : t \in [0, 2\pi] \right\},$$

$$\Gamma = \left\{ (0, 2) + (0.7 \sin t, \cos t) : t \in \left[\frac{7\pi}{10}, \frac{3\pi}{2} \right] \right\},$$

噪声 η 取 1%。非均匀介质的折射率分别取 $n(x, y) = |2 + x + y|$ 和 $n(x, y) = |3 + x^2 + y^2|$ 。将圆心在 $(0, -3)$ 半径为 1 的圆作为障碍物 D 的初始猜测, 将圆心在 $(0, 2)$ 半径为 1 的一段圆弧作为裂缝 Γ 的初始猜测。在这一初始猜测下, 贝叶斯方法的重构结果如图 1 所示。从图中可见随着折射率函数中 x, y 次数的变化, 障碍物和裂缝的重构效果并没有随之变化, 并且得到的效果都很好, 关于 x, y 是更高次的情况下, 同样能取得不错的反演效果。以下几组实验, 非均匀介质折射率默认取 $n(x, y) = |2 + x + y|$ 。

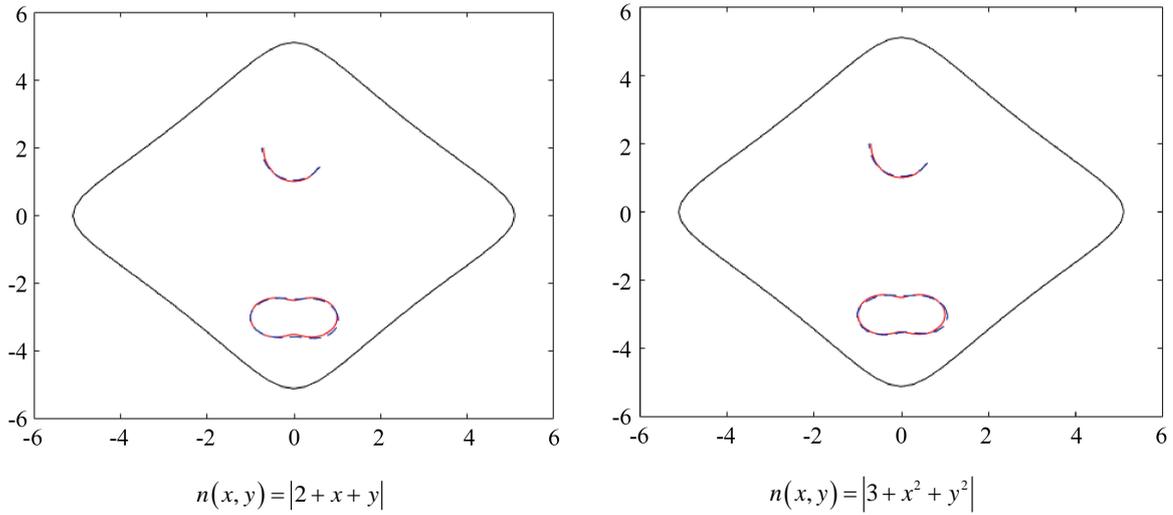


Figure 1. Bayesian reconstruction results of mixed obstacles under different refractive indexes

图 1. 不同折射率下混合障碍贝叶斯方法重构结果

3.2. 不同噪声水平下, 混合障碍重构

本组实验主要考虑不同折射率下, 贝叶斯方法重构混合障碍物形状的效果。考虑如下花生形状的障碍物和裂缝:

$$\partial D = \left\{ (0, -3) + \sqrt{\cos^2 t + 0.25 \sin^2 t} (\cos t, \sin t) : t \in [0, 2\pi] \right\},$$

$$\Gamma = \left\{ (0, 2) + (0.7 \sin t, \cos t) : t \in \left[\frac{7\pi}{10}, \frac{3\pi}{2} \right] \right\},$$

噪声 η 取 5%、10%。我们将圆心在 $(0, -3)$ 半径为 1 的圆作为障碍物 D 的初始猜测, 将圆心在 $(0, 2)$ 半径为 1 的一段圆弧作为裂缝 Γ 的初始猜测。在这一初始猜测下, 贝叶斯方法的重构结果如图 2 所示。从图中可见, 随着噪声不断增大, 对障碍物和裂缝的重构效果也逐渐变差。

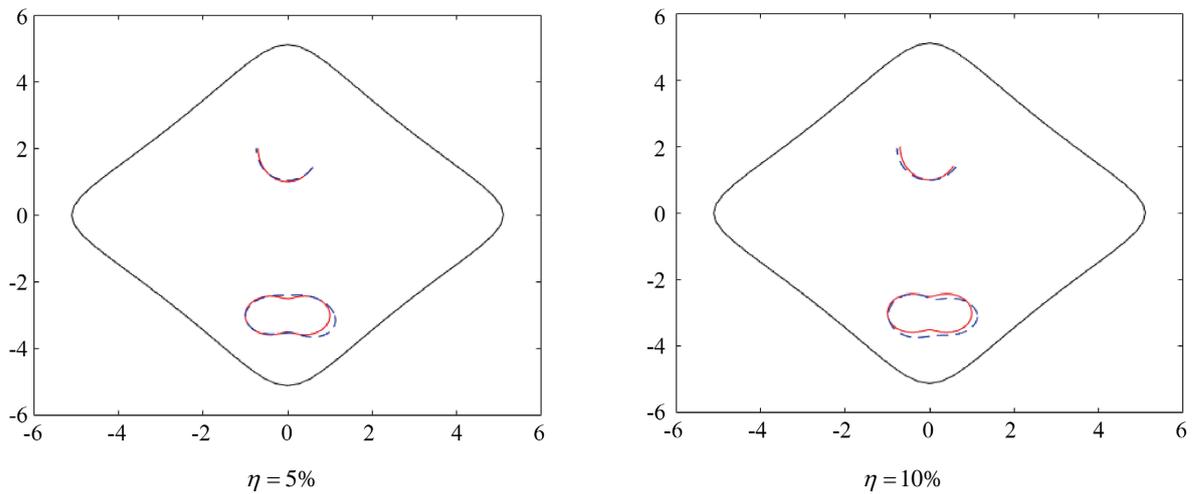


Figure 2. Bayesian reconstruction results of mixed obstacles under different noise levels
图 2. 不同噪声水平下混合障碍贝叶斯方法重构结果

3.3. 有限孔径数据下, 混合障碍重构

本组实验主要考虑不同观测孔径下, 贝叶斯方法重构混合障碍物形状的效果。考虑如下花生形状的障碍物和裂缝:

$$\partial D = \left\{ (0, -3) + \sqrt{\cos^2 t + 0.25 \sin^2 t} (\cos t, \sin t) : t \in [0, 2\pi] \right\},$$

$$\Gamma = \left\{ (0, 2) + (0.7 \sin t, \cos t) : t \in \left[\frac{7\pi}{10}, \frac{3\pi}{2} \right] \right\},$$

噪声 η 取 1%。在贝叶斯方法求解过程中考虑使用有限孔径数据, 有限孔径分别选为 $[0, \pi]$ 和 $[0, \pi/2]$, 观测点分别为 32 个和 16 个。图 3 为贝叶斯方法使用有限孔径数据的重构结果。从图中可见对于所观测的有限孔径部分障碍物的重构效果会更好, 这是由于观测信息主要来源于有限孔径部分。并且随着观测孔径越来越小时重构的效果会越来越差, 因为随着观测孔径变小, 所获得的关于障碍物的信息就会越少。

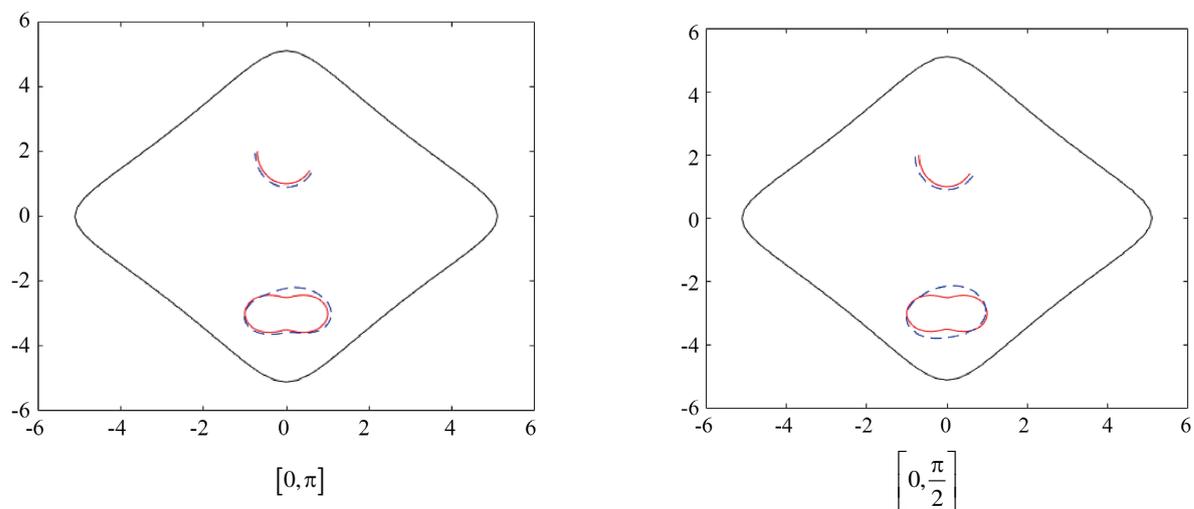


Figure 3. Bayesian reconstruction results of mixed obstacles under different observation apertures
图 3. 不同观测孔径下混合障碍贝叶斯方法重构结果

4. 结论

本文利用贝叶斯方法相重构非均匀介质内混合障碍物的形状。给定障碍物及裂缝的位置作为先验信息带入贝叶斯方法中重构障碍物, 从而增快 MCMC 算法的收敛速度。实验结果表明, 该方法确实能够很好的重构出障碍物及裂缝的形状。在未来, 我们考虑增加障碍物的个数以及裂缝的个数进行研究。

参考文献

- [1] Rondi, L. (2003) Uniqueness for the Determination of Sound-Soft Defects in an Inhomogeneous Planar Medium by Acoustic Boundary Measurements. *Transactions of the American Mathematical Society*, **355**, 213-239. <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-02-03105-7>
- [2] Nachman, A.I., Päivärinta, L. and Teirilä, A. (2007) On Imaging Obstacles inside Inhomogeneous Media. *Journal of Functional Analysis*, **252**, 490-516. <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2007.06.020>
- [3] Liu, X., Zhang, B. and Hu, G. (2009) Uniqueness in the Inverse Scattering Problem in a Piecewise Homogeneous Medium. *Inverse Problems*, **26**, Article ID: 015002. <https://doi.org/10.1088/0266-5611/26/1/015002>
- [4] Qin, H. and Liu, X. (2016) The Linear Sampling Method for Inhomogeneous Medium and Buried Objects from Far Field Measurements. *Applied Numerical Mathematics*, **105**, 82-95. <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2015.11.006>
- [5] Cakoni, F. and Colton, D. (2003) The Linear Sampling Method for Cracks. *Inverse Problems*, **19**, 279. <https://doi.org/10.1088/0266-5611/19/2/303>
- [6] Xiang, J. and Yan, G. (2021) The Inverse Elastic Scattering by an Impenetrable Obstacle and a Crack. *IMA Journal of Applied Mathematics*, **86**, 1-29. <https://doi.org/10.1093/imamat/hxaa034>
- [7] Stuart, A.M. (2010) Inverse Problems: A Bayesian Perspective. *Acta Numerica*, **19**, 451-559. <https://doi.org/10.1017/S0962492910000061>
- [8] Cotter, S.L., Dashti, M. and Stuart, A.M. (2010) Approximation of Bayesian Inverse Problems for PDEs. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **48**, 322-345. <https://doi.org/10.1137/090770734>
- [9] Huang, J., Deng, Z. and Xu, L. (2021) A Bayesian Level Set Method for an Inverse Medium Scattering Problem in Acoustics. *Inverse Problems and Imaging*, **15**, 1077-1097. <https://doi.org/10.3934/ipi.2021029>
- [10] Li, Z., Deng, Z. and Sun, J. (2020) Extended-Sampling-Bayesian Method for Limited Aperture Inverse Scattering Problems. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, **13**, 422-444. <https://doi.org/10.1137/19M1270501>
- [11] Liu, Y., Guo, Y. and Sun, J. (2021) A Deterministic-Statistical Approach to Reconstruct Moving Sources Using Sparse Partial Data. *Inverse Problems*, **37**, Article ID: 065005. <https://doi.org/10.1088/1361-6420/abf813>
- [12] Wang, Y., Ma, F. and Zheng, E. (2015) Bayesian Method for Shape Reconstruction in the Inverse Interior Scattering Problem. *Mathematical Problems in Engineering*, **2015**, Article ID: 935294. <https://doi.org/10.1155/2015/935294>
- [13] Liu, J., Liu, Y. and Sun, J. (2019) An Inverse Medium Problem Using Stekloff Eigenvalues and a Bayesian Approach. *Inverse Problems*, **35**, Article ID: 094004. <https://doi.org/10.1088/1361-6420/ab1be9>