

# 信号重构的优化算法及其在图片恢复中的应用

王尊阳<sup>1</sup>, 郭超<sup>1</sup>, 孙洪春<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup>北京电子科技学院电子与通信工程系, 北京

<sup>2</sup>临沂大学数学与统计学院, 山东 临沂

收稿日期: 2023年3月24日; 录用日期: 2023年4月18日; 发布日期: 2023年4月27日

## 摘要

本文进一步考虑信号重构与图像去噪问题的优化方法。为此, 提出了一种基于类似Armijo线搜索的新型算法, 详细证明了该算法的全局收敛性和 $O(1/k^2)$ 次线性收敛速率。最后, 通过稀疏信号恢复和图像去噪的数值实验验证了所提算法的有效性和优越性。

## 关键词

信号重建和图像去噪问题, 算法, 全局收敛, 次线性收敛速度

# An Optimization Algorithm on Signal Reconstruction and Its Application in Image Restoration

Zunyang Wang<sup>1</sup>, Chao Guo<sup>1</sup>, Hongchun Sun<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup>Department of Electronic and Communication Engineering, Beijing Institute of Electronic Science and Technology, Beijing

<sup>2</sup>School of Mathematics and Statistics, Linyi University, Linyi Shandong

Received: Mar. 24<sup>th</sup>, 2023; accepted: Apr. 18<sup>th</sup>, 2023; published: Apr. 27<sup>th</sup>, 2023

\* 通讯作者。

## Abstract

In this paper, we further consider an optimization method for solving the signal reconstruction and image denoising problem. To this end, a new algorithm with Armijo-like line search is proposed. Global convergence results of the new algorithm is established in detail. Furthermore, we also show that the method is sublinearly convergent rate of  $O(1/k^2)$ . Finally, the efficiency of the proposed algorithm is illustrated through some numerical examples on sparse signal recovery and image denoising.

## Keywords

The Signal Reconstruction and Image Denoising Problem, Algorithm, Global Convergence, Sublinearly Convergent Rate

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

随着数字科技的迅速发展, 在信号处理领域出现的压缩感知理论打破了传统信号采样的速率要求, 使得信息存储、处理和传输的成本大大降低. 压缩感知利用原始信号稀疏性的特点, 从远少于信号元素个数的测量出发, 通过求解稀疏优化问题来修复完整的原始稀疏信号, 是信号处理领域的一大革命性成果. 信号的修复过程是一个优化计算的过程, 用于搜索和获取稀疏的或可压缩的信号, 经过优化计算使信号元素重构, 进而修复信号本质、复原图象. 在信号处理和图象复原研究中, 已知观测数据  $z \in R^m$  来自稀疏的信号, 直观的方法是求解下面的极小化  $\ell_1$ -范数问题: 求稀疏信号  $\bar{x} \in R^n$  使得

$$\min_{x \in R^n} F(x) := f(x) + \rho\varphi(x), \quad (1.1)$$

其中  $f(x) := \frac{1}{2}\|Ax - z\|_2^2$ ,  $\varphi(x) = \|x\|_1$ ,  $\rho > 0$  是一参数,  $A \in R^{m \times n}$  ( $m \ll n$ ) 是传感矩阵, 向量  $x$  的  $\ell_1$ -范数和  $\ell_2$ -范数分别表示为  $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$  和  $\|x\|_2 = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$ .

显然, (1.1) 是一个无约束凸优化问题, 已有许多求解该问题算法, 如牛顿型方法、共轭梯度型算法等标准方法. 然而, 随着维数  $n$  的增加, 对于问题 (1.1), 这些算法的计算效率变低. 近年

来, 针对求解问题(1.1)的数值算法已得到了广泛的探究, 并提出了许多有效的算法. 如乘子交替方向法( [1] [2]), 乘子的对称交替方向法( [3]), 乘子Peaceman-Rachford分离算法( [4] [5] [6]), Douglas-Rachford分离算法( [7])等. 通过变量分裂技术, 问题(1.1)能被转化为光滑优化问题. 针对这转化, 也提出了一些有效算法. 如Xiao和Zhu ( [8])给出了共轭梯度法求解问题(1.1)的约束单调方程组转换形式. Sun等( [9])提出了一种近似算法求解问题(1.1)的仿射变分不等式转换形式. 为了在维数增加时获得更好数值性能的动机, 本文进一步思考一种次线性收敛速率为 $O(1/k^2)$ 的新算法.

本文其它部分组织如下. 在第2节中, 首先给出了一些相关的预备性质. 其次, 针对问题(1.1), 提出了一种基于类似Armijo线搜索的新型优化算法, 并详细证明了该算法具有全局收敛性和 $O(1/k^2)$ 的次线性收敛速率. 在第3节中, 给出了问题(1.1)稀疏信号恢复数值实验. 在不同稀疏信号、不同维度、信号高斯白噪声去噪等方面, 利用所提算法进行优化计算和数值实验, 用以验证算法的有效性和优越性.

本文使用的一些符号做如下说明. 用 $\mathcal{R}^N$ 表示一个具有标准内积的 $N$ 维欧几里得空间. 对于任意两个向量 $x, y \in \mathcal{R}^M$ 中, 用 $\langle x, y \rangle$ 表示标准内积.

## 2. 算法及其收敛性

本节提出一种求解问题(1.1)的一种新型优化算法, 并详细证明算法的全局收敛性以及次线性收敛率. 为此, 给出下面一些预备知识.

**定义 2.1** ( [10]) 假设 $f: \mathcal{R}^N \rightarrow \mathcal{R}$  是凸的.  $f$  在 $x$ 点的次微分定义为

$$\partial f(x) = \{\xi \in \mathcal{R}^N | f(y) \geq f(x) + \langle \xi, y - x \rangle, \forall y \in \mathcal{R}^N\}.$$

对于问题(1.1)中的 $F(x)$ , 建立下面的二次近似:

$$Q_L(x, y) := \left[ f(y) + \langle x - y, \nabla f(y) \rangle + \frac{L}{2} \|x - y\|^2 \right] + \rho\varphi(x), \quad \forall L > 0. \quad (2.1)$$

令

$$p_L(y) = \arg \min \{Q_L(x, y)\}, \quad (2.2)$$

且建立(2.2)的等价转换:

$$p_L(y) = \arg \min \left\{ \rho\varphi(x) + \frac{L}{2} \left\| x - \left( y - \frac{1}{L} \nabla f(y) \right) \right\|^2 \right\}. \quad (2.3)$$

接下来回顾的下面引理是 $C^{1,1}$ 类中光滑函数的基本性质.

**引理 2.1** (Lemma 3.2. [11]) 令 $f: \mathcal{R}^N \rightarrow \mathcal{R}$  是连续可微的, 其梯度是Lipschitz连续的且Lipschitz常数为 $L_f$ . 则对于任意 $L \geq L_f$ , 有

$$f(x) \leq \left[ f(y) + \langle x - y, \nabla f(y) \rangle + \frac{L}{2} \|x - y\|^2 \right], \forall x, y \in \mathcal{R}^N. \quad (2.4)$$

由引理2.1, 若 $L \geq L_f$ , 则对于任意的 $y \in \mathcal{R}^n$ , 有

$$\begin{aligned} F(p_L(y)) &= f(p_L(y)) + \rho\varphi(p_L(y)) \\ &\leq \left[ f(y) + \langle p_L(y) - y, \nabla f(y) \rangle + \frac{L}{2} \|p_L(y) - y\|^2 \right] + \rho\varphi(p_L(y)) \\ &= Q_L(p_L(y), y). \end{aligned} \quad (2.5)$$

现在, 给出求解问题(1.1)的一种优化算法.

### 算法2.1.

**步0.** 选取 $\epsilon \geq 0$ ,  $\eta > 1$ ,  $\gamma \in (0, 1)$ ,  $\sigma, \varrho \in [1, +\infty)$ ,  $\tau_1 = 1$ ,  $\beta > \varrho\eta\|A^\top A\|$ , 初始点 $x^0 \in \mathcal{R}^n$ ,  $y^1 = x^0$ , 令 $k := 0$ .

**步1.** 对于 $k = 1, 2, \dots$ , 更新下一个迭代点 $x^k$ , 通过

$$(x^k)_i = \begin{cases} \left(y^k - \frac{1}{L_k} \nabla f(y^k)\right)_i + \frac{\rho}{L_k} & \text{若 } \left(y^k - \frac{1}{L_k} \nabla f(y^k)\right)_i < -\frac{\rho}{L_k} \\ 0 & \text{若 } \left| \left(y^k - \frac{1}{L_k} \nabla f(y^k)\right)_i \right| < \frac{\rho}{L_k} \\ \left(y^k - \frac{1}{L_k} \nabla f(y^k)\right)_i - \frac{\rho}{L_k} & \text{若 } \left(y^k - \frac{1}{L_k} \nabla f(y^k)\right)_i > \frac{\rho}{L_k} \end{cases} \quad (2.6)$$

其中 $L_k = \eta^{m_k} \beta$ , 且 $m_k$ 是满足下面二不等式的最小非负整数

$$f(x^k) \leq f(y^k) - \gamma \langle x^k - y^k, \nabla f(y^k) \rangle \quad (2.7)$$

$$0 \leq (1 + \gamma) \langle x^k - y^k, \nabla f(y^k) \rangle + \frac{\eta^{m_k} \beta}{2} \|x^k - y^k\|^2. \quad (2.8)$$

参数 $\tau_{k+1}$ 通过下面方程更新

$$\tau_{k+1}^2 - \sigma\tau_{k+1} - \varrho\tau_k^2 = 0, \quad (2.9)$$

更新 $y^{k+1}$ , 通过

$$y^{k+1} = x^k + \frac{\tau_k - \sigma}{\tau_{k+1}} (x^k - x^{k-1}). \quad (2.10)$$

**步2.** 若 $\|F(x^k) - F(x^{k-1})\| \leq \epsilon$ , 停止. 则 $x^k$  是问题(1.1)的解. 否则, 转步1, 令 $k \triangleq k + 1$ .

**注 2.1** 绝对值函数 $|t|$ 的次微分为

$$\partial(|t|) = \begin{cases} -1 & \text{if } t < 0, \\ [-1, 1] & \text{if } t = 0, \\ 1 & \text{if } t > 0. \end{cases}$$

结合(2.6), 有下面结果.

若  $(y^k - \frac{1}{L_k} \nabla f(y^k))_i < -\frac{\rho}{L_k}$ , 则  $(x^k)_i = (y^k - \frac{1}{L_k} \nabla f(y^k))_i + \frac{\rho}{L_k} < 0$ , 即

$$(x^k)_i = (y^k - \frac{1}{L_k} \nabla f(y^k))_i - \frac{\rho}{L_k} \frac{\partial \varphi(x^k)}{\partial x_i},$$

其中  $\frac{\partial \varphi(x^k)}{\partial x_i} = -1$ .

若  $(y^k - \frac{1}{L_k} \nabla f(y^k))_i > \frac{\rho}{L_k}$ , 则  $(x^k)_i = (y^k - \frac{1}{L_k} \nabla f(y^k))_i - \frac{\rho}{L_k} > 0$ , 即

$$(x^k)_i = (y^k - \frac{1}{L_k} \nabla f(y^k))_i - \frac{\rho}{L_k} \frac{\partial \varphi(x^k)}{\partial x_i},$$

其中  $\frac{\partial \varphi(x^k)}{\partial x_i} = 1$ .

若  $|(y^k - \frac{1}{L_k} \nabla f(y^k))_i| \leq \frac{\rho}{L_k}$ , 则  $|(y^k - \frac{1}{L_k} \nabla f(y^k))_i| / \frac{\rho}{L_k} \leq 1$ . 由  $(x^k)_i = 0$ , 得

$$(x^k)_i = 0 = (y^k - \frac{1}{L_k} \nabla f(y^k))_i + \frac{\rho}{L_k} (y^k - \frac{1}{L_k} \nabla f(y^k))_i / \frac{\rho}{L_k} = (y^k - \frac{1}{L_k} \nabla f(y^k))_i - \frac{\rho}{L_k} \frac{\partial \varphi(x^k)}{\partial x_i},$$

其中  $\frac{\partial \varphi(x^k)}{\partial x_i} = (y^k - \frac{1}{L_k} \nabla f(y^k))_i / \frac{\rho}{L_k}$ .

基于以上分析, 有  $x^k = y^k - \frac{1}{L_k} \nabla f(y^k) - \frac{\rho}{L_k} \xi^k$ , 即

$$\rho \xi^k + \nabla f(y^k) + L_k (x^k - y^k) = 0. \quad (2.11)$$

其中  $\xi^k \in \partial \varphi(x^k)$ . 思考下面的凸优化问题

$$\min \left\{ \rho \varphi(x) + \frac{L_k}{2} \left\| x - \left( y^k - \frac{1}{L_k} \nabla f(y^k) \right) \right\|^2 \right\}, \quad (2.12)$$

基于相关的最优性理论 ([10]), 知道该问题的解集与它的稳定点集是一致的. 结合 (2.11), 可知  $x^k$  是 (2.12) 的解, 即

$$x^k := \arg \min \left\{ \rho \varphi(x) + \frac{L_k}{2} \left\| x - \left( y^k - \frac{1}{L_k} \nabla f(y^k) \right) \right\|^2 \right\}, \quad (2.13)$$

**注 2.2** 由  $L_k = \eta^{m_k} \beta$  和  $\eta > 1$ , 有  $L_k \geq \beta$ . 另外, 因  $L_k / \eta$  不满足 (2.7) 或 (2.8), 结合引理 2.1, 有  $L_k < \eta \|A^\top A\|$ . 因此, 有

$$\beta \leq L_k < \eta \|A^\top A\|. \quad (2.14)$$

接下来, 讨论算法 2.1 的收敛性以及收敛速度. 为此, 给出以下引理.

**引理 2.2** 对于任意的  $x \in \mathcal{R}^n$ , 有

$$F(x) - F(x^k) \geq \frac{L_k}{2} \|x^k - y^k\|^2 + L_k \langle x - y^k, y^k - x^k \rangle, \quad \forall k \geq 1. \quad (2.15)$$

证明. 由(2.5), 得

$$F(p_{L_k}(y^k)) \leq Q_{L_k}(p_{L_k}(y^k), y^k). \quad (2.16)$$

由(2.13), 得  $x^k = p_{L_k}(y^k)$ . 结合(2.16), 可得

$$F(x) - F(x^k) \geq F(x) - Q_{L_k}(x^k, y^k). \quad (2.17)$$

因  $f$  和  $\varphi$  都是凸的, 可得

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x) + \rho\varphi(x) \\ &\geq [f(y^k) + \langle x - y^k, \nabla f(y^k) \rangle] + [\rho\varphi(x^k) + \rho\langle x - x^k, \xi^k \rangle], \end{aligned} \quad (2.18)$$

其中  $\xi^k \in \partial\varphi(x^k)$ . 应用(2.1) 且令  $x = x^k, y = y^k$ , 得

$$Q_{L_k}(x^k, y^k) = [f(y^k) + \langle x^k - y^k, \nabla f(y^k) \rangle + \frac{L_k}{2} \|x^k - y^k\|^2] + \rho\varphi(x^k). \quad (2.19)$$

应用(2.18), (2.19) 和(2.17), 可得

$$\begin{aligned} F(x) - F(x^k) &\geq F(x) - Q_{L_k}(x^k, y^k) \\ &\geq \langle x - x^k, \nabla f(y^k) + \rho\xi^k \rangle - \frac{L_k}{2} \|x^k - y^k\|^2 \\ &= L_k \langle x - x^k, y^k - x^k \rangle - \frac{L_k}{2} \|x^k - y^k\|^2 \\ &= L_k \langle (x - y^k) + (y^k - x^k), y^k - x^k \rangle - \frac{L_k}{2} \|x^k - y^k\|^2 \\ &= L_k \langle x - y^k, y^k - x^k \rangle + \frac{L_k}{2} \|x^k - y^k\|^2. \end{aligned} \quad (2.20)$$

其中第一个等式成立是基于(2.11). ■

**引理 2.3** 假设  $x^*$  是(1.1)的任意一解,  $\{x^k\}$  和  $\{y^k\}$  是算法2.1产生的序列. 则

$$\frac{\varrho\eta\|A^\top A\|}{\beta} \frac{2}{L_k} \tau_k^2 \alpha_1^k - \frac{2}{L_{k+1}} \tau_{k+1}^2 \alpha_1^{k+1} \geq \|\alpha_2^{k+1}\|^2 - \|\alpha_2^k\|^2, \quad (2.21)$$

其中  $\alpha_1^k := F(x^k) - F(x^*), \alpha_2^k := \tau_k x^k - (\tau_k - \sigma)x^{k-1} - \sigma x^*$ .

证明. 对于任意  $x \in \mathcal{R}^n$ , 由(2.15)有下面的不等式成立

$$F(x) - F(x^{k+1}) \geq \frac{L_{k+1}}{2} \|x^{k+1} - y^{k+1}\|^2 + L_{k+1} \langle x - y^{k+1}, y^{k+1} - x^{k+1} \rangle. \quad (2.22)$$

在(2.22)中, 分别令  $x := x^k$  和  $x := x^*$ , 可得

$$F(x^k) - F(x^{k+1}) \geq \frac{L_{k+1}}{2} \|x^{k+1} - y^{k+1}\|^2 + L_{k+1} \langle x^k - y^{k+1}, y^{k+1} - x^{k+1} \rangle \quad (2.23)$$

和

$$F(x^*) - F(x^{k+1}) \geq \frac{L_{k+1}}{2} \|x^{k+1} - y^{k+1}\|^2 + L_{k+1} \langle x^* - y^{k+1}, y^{k+1} - x^{k+1} \rangle \quad (2.24)$$

由 $\alpha_1^k$ 的定义, (2.23) 和(2.24)能被写为

$$\frac{2}{L_{k+1}}(\alpha_1^k - \alpha_1^{k+1}) \geq \|x^{k+1} - y^{k+1}\|^2 + 2 \langle x^k - y^{k+1}, y^{k+1} - x^{k+1} \rangle \quad (2.25)$$

和

$$-\frac{2}{L_{k+1}}\alpha_1^{k+1} \geq \|x^{k+1} - y^{k+1}\|^2 + 2 \langle x^* - y^{k+1}, y^{k+1} - x^{k+1} \rangle \quad (2.26)$$

在(2.25)的两边乘以 $\tau_{k+1} - \sigma$ 得

$$\begin{aligned} & (\tau_{k+1} - \sigma) \frac{2}{L_{k+1}}(\alpha_1^k - \alpha_1^{k+1}) \\ & \geq (\tau_{k+1} - \sigma) \|x^{k+1} - y^{k+1}\|^2 + 2(\tau_{k+1} - \sigma) \langle x^k - y^{k+1}, y^{k+1} - x^{k+1} \rangle \end{aligned} \quad (2.27)$$

在(2.26)的两边同乘以 $\sigma$ 得

$$-\sigma \frac{2}{L_{k+1}}\alpha_1^{k+1} \geq \sigma \|x^{k+1} - y^{k+1}\|^2 + 2\sigma \langle x^* - y^{k+1}, y^{k+1} - x^{k+1} \rangle \quad (2.28)$$

(2.27)加(2.28)得

$$\begin{aligned} \frac{2}{L_{k+1}}((\tau_{k+1} - \sigma)\alpha_1^k - \tau_{k+1}\alpha_1^{k+1}) & \geq \tau_{k+1} \|x^{k+1} - y^{k+1}\|^2 \\ & + 2 \langle \tau_{k+1}y^{k+1} - (\tau_{k+1} - \sigma)x^k - \sigma x^*, x^{k+1} - y^{k+1} \rangle \end{aligned} \quad (2.29)$$

在(2.29)两边同乘以 $\tau_{k+1}$ , 且应用(2.9), 可得

$$\begin{aligned} \frac{2}{L_{k+1}}(\varrho\tau_k^2\alpha_1^k - \tau_{k+1}^2\alpha_1^{k+1}) & \geq \tau_{k+1}^2 \|x^{k+1} - y^{k+1}\|^2 \\ & + 2\tau_{k+1} \langle \tau_{k+1}y^{k+1} - (\tau_{k+1} - \sigma)x^k - \sigma x^*, x^{k+1} - y^{k+1} \rangle \end{aligned} \quad (2.30)$$

令 $a := \tau_{k+1}y^{k+1}$ ,  $b := \tau_{k+1}x^{k+1}$  及 $c := (\tau_{k+1} - \sigma)x^k + \sigma x^*$ . 由Pythagoras关系

$$\|b - a\|^2 + 2\langle b - a, a - c \rangle = \|b - c\|^2 - \|a - c\|^2,$$

和(2.30), 可得

$$\begin{aligned} \frac{2}{L_{k+1}}(\varrho\tau_k^2\alpha_1^k - \tau_{k+1}^2\alpha_1^{k+1}) & \geq \|\tau_{k+1}x^{k+1} - (\tau_{k+1} - \sigma)x^k - \sigma x^*\|^2 \\ & - \|\tau_{k+1}y^{k+1} - (\tau_{k+1} - \sigma)x^k - \sigma x^*\|^2 \end{aligned} \quad (2.31)$$

由(2.10), 显然可得 $\tau_{k+1}y^{k+1} = \tau_{k+1}x^k + (\tau_k - \sigma)(x^k - x^{k-1})$ . 根据(2.31)和 $\alpha_2^k$ 的定义, 可得

$$\frac{2}{L_{k+1}}(\varrho\tau_k^2\alpha_1^k - \tau_{k+1}^2\alpha_1^{k+1}) \geq \|\alpha_2^{k+1}\|^2 - \|\alpha_2^k\|^2. \quad (2.32)$$

再结合(2.14), 可得

$$\frac{\varrho\eta\|A^\top A\|}{\beta} \frac{2}{L_k}\tau_k^2\alpha_1^k - \frac{2}{L_{k+1}}\tau_{k+1}^2\alpha_1^{k+1} \geq \|\alpha_2^{k+1}\|^2 - \|\alpha_2^k\|^2. \quad (2.33)$$

■

**引理 2.4** 由(2.9)得到的正数列 $\{\tau_k\}$ 满足 $\tau_k \geq \frac{k}{2}$  ( $k \geq 1$ ), 其中 $\tau_1 = 1$ .

**证明.** 利用数学归纳法证明. 当 $k = 1$ 时, 由 $\tau_1 = 1$ , 显然有 $\tau_1 \geq \frac{1}{2}$ .

假设 $k$ 时命题成立, 即 $\tau_k \geq \frac{k}{2}$ . 由(2.9), 并应用 $\sigma \geq 1, \varrho \geq 1$ , 可得

$$\tau_{k+1} = \frac{\sigma + \sqrt{\sigma^2 + \varrho\tau_k^2}}{2} \geq \frac{\sigma + \sqrt{\varrho}k}{2} \geq \frac{1+k}{2}.$$

因此能得到预期的结果.

■

现在, 证明算法2.1的收敛结果.

**定理 2.1** 假设 $x^*$ 是(1.1)的任意一解,  $\{x^k\}$ 和 $\{y^k\}$ 由算法2.1产生的序列. 则有

$$F(x^{k+1}) - F(x^*) \leq \frac{c}{(k+1)^2}. \quad (2.34)$$

其中 $c$ 是正常数.

**证明.** 令 $a_k = \frac{2}{L_k}\tau_k^2\alpha_1^k$ ,  $b_k = \|\alpha_2^k\|^2$ , 应用(2.21), 得

$$a_{k+1} + b_{k+1} \leq \frac{\varrho\eta\|A^\top A\|}{\beta}a_k + b_k. \quad (2.35)$$

结合 $0 < \frac{\varrho\eta\|A^\top A\|}{\beta} < 1$ , 通过计算可得

$$a_{k+1} \leq a_{k+1} + b_{k+1} \leq a_k + b_k \leq a_{k-1} + b_{k-1} \leq \cdots \leq a_1 + b_1, \quad (2.36)$$

且 $a_1 = \frac{2}{L_1}(F(x^1) - F(x^*))$ ,  $b_1 = \|(x^1 - x^0) + \sigma(x^0 - x^*)\|^2$ . 再结合(2.14), 并应用引理2.4, 可得

$$F(x^{k+1}) - F(x^*) \leq \frac{2\eta\|A^\top A\|[\frac{2}{L_1}(F(x^1) - F(x^*)) + \|(x^1 - x^0) + \sigma(x^0 - x^*)\|^2]}{(k+1)^2}.$$

令 $c = 2\eta\|A^\top A\|[\frac{2}{L_1}(F(x^1) - F(x^*)) + \|(x^1 - x^0) + \sigma(x^0 - x^*)\|^2]$ , 则有结果成立.

■



### 3. 数值实验

本节提供了一些关于问题(1.1)的数值测试, 以证明算法2.1的有效性. 所有代码用MATLAB 9.2.0.538062编写, 并在Windows 10 PC机上运行, 计算机配置是AMD FX-7500 Radeon R7, 4C+6G CPU, 2.10GHz CPU 和4GB 内存. 实验中, 令 $\rho = 0.001$ ,  $\beta = 4$ ,  $\eta = 3$ ,  $\gamma = 0.5$ ,  $\sigma = 1.25$ ,  $\varrho = 1.15$ , 且 $n = 2^N (N \in \mathbb{Z}_+)$ ,  $m = \text{floor}(n/4)$ ,  $k = \text{floor}(m/8)$ , 由MATLAB脚本文件

$$[Q, R]=\text{qr}(A', 0); A=Q'$$

产生测量矩阵A. 由MATLAB脚本文件

$$p=\text{randperm}(n); x(p(1:k))=\text{randn}(k, 1)$$

产生原始信号 $\bar{x}$ . 算法的终止标准为

$$\frac{\|F_k - F_{k-1}\|}{\|F_{k-1}\|} < 10^{-10},$$

其中 $F_k$ 表示问题(1.1)在迭代点 $x_k$ 的目标函数值. 在每次测试中, 通过下面公式计算相对误差

$$\text{RelErr} = \frac{\|\hat{x} - \bar{x}\|}{\|\bar{x}\|},$$

其中 $\hat{x}$ 表示回收的信号.

#### 3.1. 具有加性高斯白噪声的稀疏信号恢复

本节应用算法2.1来恢复加性高斯白噪声环境的模拟稀疏信号. 令 $n = 2^{13}$ ,  $m = 2^{11}$ ,  $k = 2^8$ . 图1给出了原始信号、测量信号和由2.1算法重构的信号(红点标记). 显然, 从图1的第一个和第三个图中, 原始信号中的所有元素都被红点圈了出来, 这表明2.1算法可以很好地恢复原始信号.

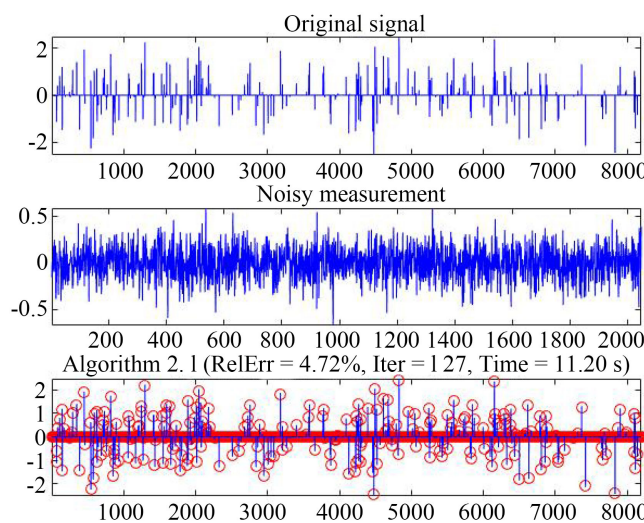


Figure 1. Signal recovery on additive Gaussian white noise ( $n = 2^{13}$ )

图 1. 具有加性高斯白噪声的稀疏信号恢复( $n = 2^{13}$ )

另外, 对于不同维数、不同信号的问题(1.1), 应用算法2.1进行了加性高斯白噪声环境的模拟稀疏信号恢复. CPU时间(CPU Time)、迭代次数(Iter)和相对误差(RelErr)列在表 1. 从表中可以看出, 算法2.1 能较好的恢复不同维数的稀疏信号, 且CPU 时间较少, 也较准确, 对维数的增加不敏感. 表明算法2.1有较好的稳定性.

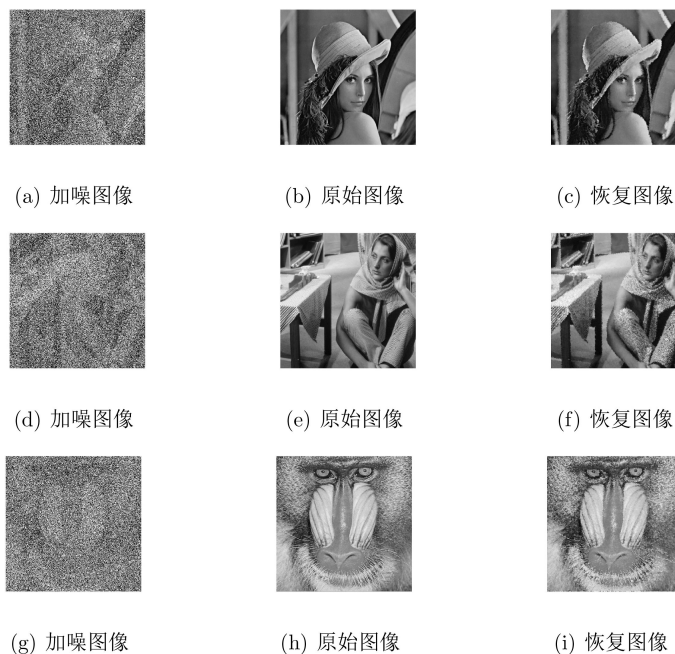
**Table 1.** Signal recovery on additive Gaussian white noise with the different dimension

**表 1.** 具有不同维数的加性高斯白噪声的稀疏信号恢复

维数	稀疏信号	CPU Time	Iter	RelErr
1024	$1 \times 2^5$	0.4844	129	4.9128
2048	$2 \times 2^5$	1.1562	138	4.8728
3072	$3 \times 2^5$	2.7343	131	4.6985
4096	$4 \times 2^5$	4.0468	128	4.4007
5120	$5 \times 2^5$	5.6512	136	4.6486
6144	$6 \times 2^5$	7.6093	135	4.5438
7168	$7 \times 2^5$	9.6875	141	4.4214
8 192	$8 \times 2^5$	11.2031	127	4.7165

### 3.2. 具有高斯噪声的图像恢复

对于Lena、Barbaba 和Baboon三个不同图像分别附加Gaussian噪声水平0.7的噪声, 通过算法2.1 恢复的清晰的图像如图 2的最后一列所示. 同时, 算法2.1只需要很少的时间就可以恢复图像, 这些充分显示了算法2.1图像恢复的有效性.



**Figure 2.** Image denoising on Gaussian noise level 0.7

**图 2.** 具有高斯噪声水平0.7的图像恢复结果

## 基金项目

山东省自然科学基金项目(ZR2021MA088), 北京市大学生创新创业项目(X202210018030).

## 参考文献

- [1] Yang, J.F. and Zhang, Y. (2011) Alternating Direction Algorithms for  $\ell_1$ -Problems in Compressive Sensing. *SIAM Journal on Scientific Computing*, **33**, 250-278.  
<https://doi.org/10.1137/090777761>
- [2] Xiao, Y.H. and Song, H.N. (2012) An Inexact Alternating Directions Algorithm for Constrained Total Variation Regularized Compressive Sensing Problems. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, **44**, 114-127. <https://doi.org/10.1007/s10851-011-0314-y>
- [3] He, B.S., Ma, F. and Yuan, X.M. (2016) Convergence Study on the Symmetric Version of ADMM with Larger Step Sizes. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, **9**, 1467-1501.  
<https://doi.org/10.1137/15M1044448>
- [4] Sun, M. and Liu, J. (2016) An Inexact Generalized PRSM with LQP Regularization for Structured Variational Inequalities and Its Applications to Traffic Equilibrium Problems. *Journal of Inequalities and Applications*, **2016**, Article No. 150.  
<https://doi.org/10.1186/s13660-016-1095-z>
- [5] Sun, M., Wang, Y.J. and Liu, J. (2017) Generalized Peaceman-Rachford Splitting Method for Multiple-Block Separable Convex Programming with Applications to Robust PCA. *Calcolo*, **54**, 77-94. <https://doi.org/10.1007/s10092-016-0177-0>
- [6] Sun, M. and Liu, J. (2016) A Proximal Peaceman-Rachford Splitting Method for Compressive Sensing. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, **50**, 349-363.  
<https://doi.org/10.1007/s12190-015-0874-x>
- [7] Yu, Y.C., Peng, J.G., Han, X.L. and Cui, A.A. (2017) A Primal Douglas-Rachford Splitting Method for the Constrained Minimization Problem in Compressive Sensing. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, **36**, 4022-4049. <https://doi.org/10.1007/s00034-017-0498-5>
- [8] Xiao, Y.H. and Zhu, H. (2013) A Conjugate Gradient Method to Solve Convex Constrained Monotone Equations with Applications in Compressive Sensing. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **405**, 310-319. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2013.04.017>
- [9] Sun HC, Sun M and Zhang BH. (2018) An Inverse Matrix-Free Proximal Point Algorithm for Compressive Sensing. *Science Asia*, **44**, 311-318.  
<https://doi.org/10.2306/scienceasia1513-1874.2018.44.311>

- [10] Masao Fukushima. 非线性最优化基础[M]. 林贵华, 译. 北京: 科学出版社, 2011: 5.
- [11] Ortega J. M. and Rheinboldt W. C. (2000) Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables. In: *Classics in Applied Mathematics*, Vol. 30, SIAM, Philadelphia.