Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(5), 2546-2552
Published Online May 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.125255

Hans汉斯

不可压MHD方程组在临界Besov空间中的局部适定性

燕怡凡

浙江师范大学数学科学学院，浙江 金华

收稿日期：2023年4月28日；录用日期：2023年5月21日；发布日期：2023年5月31日

摘　要

本文证明了$\mathbb{R}^d$，$d \ge 2$中不可压缩磁流体(MHD)方程组在临界Besov空间中的局部适定性，当$1 \le p < 2d$时，初值满足$(u_0, b_0) \in \dot{B}_{p,1}^{d/p-1}(\mathbb{R}^d) \times \dot{B}_{p,1}^{d/p-1}(\mathbb{R}^d)$的MHD方程(1.1)在$[0,T]$上有唯一解。

关键词

MHD方程，齐次Besov空间，局部适定性

Local Well-Posedness for the Incompressible MHD Equations in the Critical Besov Space

Yifan Yan

College of Mathematics Science, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: Apr. 28th, 2023; accepted: May 21st, 2023; published: May 31st, 2023

Abstract

In this paper, we investigate the local well-posedness for the $\mathbb{R}^d$, $d \ge 2$ incompressible magnetohydrodynamic (MHD) equations in the critical Besov space. Let $1 \le p < 2d$, the MHD equations (1.1) with initial value $(u_0, b_0) \in \dot{B}_{p,1}^{d/p-1}(\mathbb{R}^d) \times \dot{B}_{p,1}^{d/p-1}(\mathbb{R}^d)$ has a unique solution on $[0,T]$.

文章引用: 燕怡凡. 不可压 MHD 方程组在临界 Besov 空间中的局部适定性[J]. 应用数学进展, 2023, 12(5): 2546-2552.
DOI: 10.12677/aam.2023.125255

Keywords

MHD Equation, Homogeneous Besov Space, Local Well-Posedness

1. 引言

我们考虑如下在 $\mathbb{R}^d$ 中的常系数不可压缩磁流体(MHD)系统的局部适定性问题：

$$\begin{cases}\partial_t u + u\cdot\nabla u - \mu\Delta u + \nabla\Pi = b\cdot\nabla b \\ \partial_t b + u\cdot\nabla b - \lambda\Delta b = b\cdot\nabla u \\ \operatorname{div} u = 0, \operatorname{div} b = 0 \\ (u,b)\big|_{t=0} = (u_0, b_0)\end{cases} \tag{1.1}$$

其中 u 表示速度场，b表示磁场，$\Pi(x,t)$ 表示压强。正常数 μ,λ 分别表示粘性系数和磁扩散系数。本文为了方便起见，令 $\mu,\lambda = 1$。

磁流体系统是用来研究磁流体动力学运动的经典系统，可以用来模拟太阳风、磁暴等磁流体现象，也可以用来研究宇宙中的磁场结构和磁流体运动，它在物理学、工程学中扮演着重要的角色。

当 $b = 0$ 时，方程退化为经典的 Navier-Stokes 系统，对该系统的一个重要观测是以下标度不变性：

$$\left(u_\lambda(t,x), \Pi_\lambda(t,x)\right) = \left(\lambda u\left(\lambda^2 t, \lambda x\right), \lambda^2 \Pi\left(\lambda^2 t, \lambda x\right)\right) \tag{1.2}$$

我们强调临界空间指的是其范数在(1.2)的放缩下保持不变的空间。Fujita 和 Kato [1]在临界齐次 Sobolev 空间 $\dot{H}^{1/2}$ 中证明了 Navier-Stokes 系统解的全局适定性，Cannone 在[2]中证明了当 $p > 3$ 时在 $\dot{B}^{3/p-1}_{p,\infty}$ 空间中的适定性，Chemin [3]在 $\dot{B}^{3/p-1}_{p,q}, 1\le p<\infty, 1\le q\le\infty$ 中证明了解的存在唯一性。基于对 Navier-Stokes 系统研究的理论方法，学者们进一步展开对 MHD 系统的系列研究，近年来，由于 MHD 模型的良好的对称性，已有很多关于解的适定性，弱解正则性以及解的渐进性为的研究，在临界空间中，Hao [4]证明了 $d\ge 3$ 时可压缩粘性磁流体动力学(MHD)系统在整个 $\mathbb{R}^d$ 空间中的 Cauchy 问题。后来，Bian 和 Yuan [5]证明了可压磁流体力学方程在临界 Besov 空间对于初值满足 $u_0 \in \dot{B}^{d/p-1}_{p,1}(\mathbb{R}^d)$， $H_0 \in \dot{B}^{d/p-1}_{p,1}(\mathbb{R}^d) \cap \dot{B}^{d/p}_{p,1}(\mathbb{R}^d)$， $a_0 \in \dot{B}^{d/p}_{p,1}(\mathbb{R}^d)$， $d\ge 2$ 的局部适定性，其中 H 表示磁场。近来，也有许多学者研究了可压 MHD 方程关于小初值强解适定性以及大初值的适定性问题，具体可参见[6] [7] [8]。

主要结论如下。

2. 主要定理

定理 2.1 令 $1\le p<\infty$， $(u_0,b_0)\in \dot{B}^{\frac{d}{p}-1}_{p,1}(\mathbb{R}^d)\times\dot{B}^{\frac{d}{p}-1}_{p,1}(\mathbb{R}^d)$ 且 $\operatorname{div} u_0 = \operatorname{div} b_0 = 0$， 则存在 $T>0$， 使得当 $1\le p<2d$ 时，方程(1.1)有唯一解

$$(u,b)\in\mathbb{C}\left([0,T],\dot{B}^{\frac{d}{p}-1}_{p,1}(\mathbb{R}^d)\right)\cap L^1\left([0,T],\dot{B}^{\frac{d}{p}-1}_{p,1}(\mathbb{R}^d)\right)\times\mathbb{C}\left([0,T],\dot{B}^{\frac{d}{p}-1}_{p,1}(\mathbb{R}^d)\right)\cap L^1\left([0,T],\dot{B}^{\frac{d}{p}-1}_{p,1}(\mathbb{R}^d)\right).$$

3. 预备知识

在给出主要定理之前，我们首先回顾[9]中关于 Littlewood-Paley 理论[9]的一些基本定义。对于 $u\in S_h'$，设 $\forall j\in\mathbb{Z}$， $\dot{\Delta}_j u \triangleq \varphi\left(2^{-j}\mathrm{D}\right)u$， $\dot{S}_j u=\sum_{j'\le j-1}\dot{\Delta}_{j'}u=\chi\left(2^{-j}\mathrm{D}\right)u$，其中 $\chi(\tau),\varphi(\tau)$ 是光滑函数，使得

$$\operatorname{Supp}\varphi\subset\left\{\tau\in\mathbb{R}^d\,\middle|\,\frac{3}{4}\le|\tau|\le\frac{8}{3}\right\},\forall\tau\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\},\sum_{j\in\mathbb{Z}}\varphi\left(2^{-j}\tau\right)=1,$$

$$\operatorname{Supp}\chi\subset\left\{\tau\in\mathbb{R}^d\,\middle\|\tau|\le\frac{4}{3}\right\},\forall\tau\in\mathbb{R}^d,\chi(\tau)+\sum_{j\ge0}\varphi\left(2^{-j}\tau\right)=1.$$

我们记算子 $\mathcal{P}=\mathcal{I}-\mathcal{Q}$， $\mathcal{Q}\triangleq\nabla\Delta^{-1}\mathrm{div}$。

下面给出齐次 Besov 空间的定义。

定义 3.1 设 $(p,r)\in[1,\infty]^2$， $s\in\mathbb{R}$。我们考虑 $u\in S_h'\left(\mathbb{R}^d\right)$，表示 $u\in S'\left(\mathbb{R}^d\right)$ 且满足 $\lim_{j\to-\infty}\left\|\dot{S}_j u\right\|_{L^\infty}=0$，齐次 Besov 空间的范数为：

$$\|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}}\triangleq\left\|\left(2^{js}\left\|\dot{\Delta}_j u\right\|_{L^p}\right)_{j\in\mathbb{Z}}\right\|_{\ell^r(\mathbb{Z})}$$

定义 3.2 (a) 给定一个 Banach 空间，我们记 $\|(a,b)\|_X=\|a\|_X+\|b\|_X$。

(b) 对于 $q\in[1,+\infty]$，记号 $L^q(I;X)$ 表示 I 上取值于 X 的可测函数的集合，使得 $t\mapsto\|f(t)\|_X$ 属于 $L^q(I)$。当 $I=[0,T]$ 时，记 $L^q(0,T;X)\triangleq L^q_T(X)$。

引理 3.1 令 $1\le p\le\infty,s_1,s_2\le\frac{d}{q}$，且 $s_1+s_2>d\max\left\{0,\frac{2}{p}-1\right\}$。对于 $(f,g)\in\dot{B}^{s_1}_{p,1}\left(\mathbb{R}^d\right)\times\dot{B}^{s_2}_{p,1}\left(\mathbb{R}^d\right)$，我们有

$$\|fg\|_{\dot{B}^{s_1+s_2-\frac{d}{p}}_{p,1}}\le C\|f\|_{\dot{B}^{s_1}_{p,1}}\|g\|_{\dot{B}^{s_2}_{p,1}}.\tag{3.1}$$

引理 3.2 令 $\sigma\in\mathbb{R},T>0,1\le p\le\infty$，且 $1\le q_2\le q_1\le\infty$。令 u 为如下热方程的解

$$\begin{cases}\partial_t u-\Delta u=f,\\ u|_{t=0}=u_0.\end{cases}$$

记 $q_1'=\left(1+1/q_1-1/q_2\right)^{-1}$。则存在常数 c， $C>0$ 使得

$$\|u\|_{\tilde{L}^{q_1}_T\left(\dot{B}^{\sigma+\frac{2}{q_1}}_{p,1}\right)}\le C\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}2^{j\sigma}\left\|\dot{\Delta}_j u_0\right\|_{L^p}\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-cT2^{2j}q_1}}{cq_1}\right)^{1/q_1}+\sum_{j\in\mathbb{Z}}2^{j(\sigma-2+2/q_2)}\left\|\dot{\Delta}_j f\right\|_{L^{q_2}_T\left(L^p\right)}\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-cT2^{2j}q_1'}}{cq_1'}\right)^{1/q_1'}\right)\tag{3.2}$$

特别地，有以下估计

$$\|u\|_{\tilde{L}^{q_1}_T\left(\dot{B}^{\sigma+\frac{2}{q_1}}_{p,1}\right)}\le C\left(\|u_0\|_{\dot{B}^{\sigma}_{p,1}}+\|f\|_{\tilde{L}^{q_2}_T\left(\dot{B}^{\sigma-2+\frac{2}{q_2}}_{p,1}\right)}\right).\tag{3.3}$$

引理 3.3 (插值不等式)对于 $0<s_1<s_2$， $0\le\theta\le1$，且 $1\le p,q_1,q_2\le\infty$，有以下插值不等式成立

$$\|u\|_{\dot{B}^s_{p,1}}\le C\|u\|^{\theta}_{\dot{B}^{s_1}_{p,1}}\|u\|^{1-\theta}_{\dot{B}^{s_2}_{p,1}},\quad\|u\|_{\tilde{L}^q_T\left(\dot{B}^s_{p,1}\right)}\le C\|u\|^{\theta}_{\tilde{L}^{q_1}_T\left(\dot{B}^{s_1}_{p,1}\right)}\|u\|^{1-\theta}_{\tilde{L}^{q_2}_T\left(\dot{B}^{s_2}_{p,1}\right)}\tag{3.4}$$

其中

$$s=\theta s_1+(1-\theta)s_2,\quad\frac{1}{q}=\frac{\theta}{q_1}+\frac{1-\theta}{q_2}.$$

引理 3.3 (Bernstein 不等式)令 B 为 $\mathbb{R}^d$ 中的球，$\mathfrak{I}$ 为 $\mathbb{R}^d$ 中的一环，令 $1\le p_2\le p_1\le\infty$，则

$$\begin{aligned}&f\quad \operatorname{Supp}\hat{u}\subset 2^j B\Rightarrow\left\|\partial_x^\alpha a\right\|_{L^{p_1}}\le C2^{j\left(|\alpha|+d\left(1/p_2-1/p_1\right)\right)}\|u\|_{L^{p_2}}\\&f\quad \operatorname{Supp}\hat{u}\subset 2^j\mathfrak{I}\Rightarrow\|u\|_{L^{p_1}}\le C2^{-jN}\sup_{|\alpha|=N}\left\|\partial_x^\alpha u\right\|_{L^{p_1}}.\end{aligned}\tag{3.5}$$

4. 主要定理证明

由于 u,b 的不可压性质，我们有 $u=\mathcal{P}u,b=\mathcal{P}b$，对方程(1.1)作用 $\mathcal{P}$ 得

$$\begin{cases}\partial_t u+\mathcal{P}(u\cdot\nabla u)-\mu\Delta u=\mathcal{P}(b\cdot\nabla b)\\\partial_t b+\mathcal{P}(u\cdot\nabla b)-\lambda\Delta b=\mathcal{P}(b\cdot\nabla u)\\\operatorname{div}u=0,\operatorname{div}b=0\\(u,b)|_{t=0}=(u_0,b_0)\end{cases}$$

下面，我们利用逼似解[10]的论证过程来证明这一结果。令 $\left(u_L^n,b_L^n\right)$ 为如下方程的解

$$\begin{cases}\partial_t u_L^n-\mu\Delta u_L^n=0\\\partial_t b_L^n-\lambda\Delta b_L^n=0\\\operatorname{div}u_L^n=\operatorname{div}b_L^n=0\\\left(u_L^n,b_L^n\right)(x,0)=\left(\sum_{j\le n}\dot{\Delta}_j u_0,\sum_{j\le n}\dot{\Delta}_j b_0\right)\end{cases}\tag{4.1}$$

构造 $\left(u^0,b^0\right)\triangleq(0,0)$，$\left(\bar{u}^n,\bar{b}^n\right)$ 是如下线性方程组的解：

$$\begin{cases}\partial_t\bar{u}^{n+1}-\mu\Delta\bar{u}^{n+1}=-\mathcal{P}\left(u^n\cdot\nabla u^n\right)+\mathcal{P}\left(b^n\cdot\nabla b^n\right)\\\partial_t\bar{b}^{n+1}-\lambda\Delta\bar{b}^{n+1}=-\mathcal{P}\left(u^n\cdot\nabla b^n\right)+\mathcal{P}\left(b^n\cdot\nabla u^n\right)\\\operatorname{div}\bar{u}^n=\operatorname{div}\bar{b}^n=0\\\left(\bar{u}^{n+1},\bar{b}^{n+1}\right)(x,0)=(0,0)\end{cases}\tag{4.2}$$

4.1. 逼近解列的一致有界性

令 $\left(u^n,b^n\right)\triangleq\left(u_L^n+\bar{u}^n,b_L^n+\bar{b}^n\right)$，$1\le p<\infty$，$\left(u_0,b_0\right)\in\dot{B}_{p,1}^{\frac{d}{p}-1}\left(\mathbb{R}^d\right)\times\dot{B}_{p,1}^{\frac{d}{p}-1}\left(\mathbb{R}^d\right)$ 且 $\operatorname{div}u^n=\operatorname{div}b^n=0$，则存在足够小的 $T>0$，使得解 $\left(u_L^n,b_L^n\right)$ 和解 $\left(\bar{u}^n,\bar{b}^n\right)$ 满足

$$\left.\begin{aligned}&\left\|\left(u_L^n,b_L^n\right)\right\|_{L_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{d}{p}-1})}\le CU_0\\&\left\|\left(u_L^n,b_L^n\right)\right\|_{L_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{d}{p}+1})}\le\varepsilon^2\\&\left\|\bar{u}^n\right\|_{L_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{d}{p}-1})\cap L_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{d}{p}+1})}+\left\|\bar{b}^n\right\|_{L_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{d}{p}-1})\cap L_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{d}{p}+1})}\le\varepsilon\end{aligned}\right\}\left(S_n\right),$$

其中 $\varepsilon\ll 1$，$U_0\triangleq\left\|u_0\right\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{d}{p}-1}}+\left\|b_0\right\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{d}{p}-1}}$。

证明：对于方程(4.1)，我们利用引理 3.2 中(3.2)式易得 $\left(S_n\right)_1$，利用引理 3.2 中(3.3)式得

$$\left\|\left(u_L^n,b_L^n\right)\right\|_{L_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{3}{p}+1})}\le C\sum_j 2^{j\left(\frac{3}{p}-1\right)}\left\|\left(\dot{\Delta}_j u_0,\dot{\Delta}_j b_0\right)\right\|_{L^p}\left(1-\mathrm{e}^{-cT2^{2j}}\right),$$

对 $\forall n\in\mathbb{N}$，取 $T\le\varepsilon^3$，存在 $N_0\in\mathbb{N}$，使得

$$\begin{aligned}\left\|\left(u_L^n,b_L^n\right)\right\|_{L_T^1(\dot B_{p,1}^{\frac{3}{p}+1})}&\le C\sum_{j\ge N_0}2^{j\left(\frac{3}{p}-1\right)}\left\|\left(\dot\Delta_j u_0,\dot\Delta_j b_0\right)\right\|_{L^p}\left(1-\mathrm{e}^{-cT2^{2j}}\right)\\&\quad+C\sum_{j\le N_0}2^{j\left(\frac{3}{p}-1\right)}\left\|\left(\dot\Delta_j u_0,\dot\Delta_j b_0\right)\right\|_{L^p}\left(1-\mathrm{e}^{-cT2^{2j}}\right)\\&\le\frac{\varepsilon^2}{2}+C2^{2N_0}t\left\|\left(u_0,b_0\right)\right\|_{\dot B_{p,1}^{\frac{3}{p}-1}}\le\varepsilon^2,\end{aligned}$$

从而证得 $(S_n)_2$。

下用归纳法证明 $(S_n)_3$，对方程(4.2)运用引理 3.2 中(3.2)式得

$$\left\|\bar u^n\right\|_{L_T^\infty(\dot B_{p,1}^{\frac{d}{p}-1})\cap L_T^1(\dot B_{p,1}^{\frac{d}{p}+1})}\le C\left(\left\|\mathcal{P}\left(u^n\cdot\nabla u^n\right)\right\|_{L_T^1(\dot B_{p,1}^{\frac{d}{p}-1})}+\left\|\mathcal{P}\left(b^n\cdot\nabla b^n\right)\right\|_{L_T^1(\dot B_{p,1}^{\frac{d}{p}-1})}\right)\tag{4.3}$$

$$\left\|\bar b^n\right\|_{L_T^\infty(\dot B_{p,1}^{\frac{d}{p}-1})\cap L_T^1(\dot B_{p,1}^{\frac{d}{p}+1})}\le C\left(\left\|\mathcal{P}\left(u^n\cdot\nabla b^n\right)\right\|_{L_T^1(\dot B_{p,1}^{\frac{d}{p}-1})}+\left\|\mathcal{P}\left(b^n\cdot\nabla u^n\right)\right\|_{L_T^1(\dot B_{p,1}^{\frac{d}{p}-1})}\right)\tag{4.4}$$

对于(4.3)式的第一项，我们应用引理 3.1 和插值不等式得

$$\begin{aligned}\left\|\mathcal{P}\left(u^n\cdot\nabla u^n\right)\right\|_{L_T^1(\dot B_{p,1}^{\frac{d}{p}-1})}&\le C\left\|\mathrm{div}\left(u^n\otimes u^n\right)\right\|_{L_T^1(\dot B_{p,1}^{\frac{d}{p}-1})}\\&\le C\left\|u^n\otimes u^n\right\|_{L_T^1(\dot B_{p,1}^{\frac{d}{p}})}\\&\le C\int_0^T\left\|u^n\right\|_{\dot B_{p,1}^{\frac{d}{p}}}^2\mathrm{d}\tau\\&\le C\int_0^T\left(\left\|u_L^n\right\|_{\dot B_{p,1}^{\frac{d}{p}}}^2+\left\|\bar u^n\right\|_{\dot B_{p,1}^{\frac{d}{p}}}^2\right)\mathrm{d}\tau\\&\le C\left\|u_L^n\right\|_{L_T^\infty(\dot B_{p,1}^{\frac{d}{p}-1})}\left\|u_L^n\right\|_{L_T^1(\dot B_{p,1}^{\frac{d}{p}+1})}+C\left\|\bar u^n\right\|_{L_T^\infty(\dot B_{p,1}^{\frac{d}{p}-1})}\left\|\bar u^n\right\|_{L_T^1(\dot B_{p,1}^{\frac{d}{p}+1})}\\&\le C\left(U_0+1\right)\varepsilon^2,\end{aligned}$$

对于(4.4)式的第一项，在引理 3.1，young 不等式和插值不等式的帮助下，得

$$\begin{aligned}\left\|\mathcal{P}\left(u^n\cdot\nabla b^n\right)\right\|_{L_T^1(\dot B_{p,1}^{\frac{d}{p}-1})}&\le C\left\|\mathrm{div}\left(u^n\otimes b^n\right)\right\|_{L_T^1(\dot B_{p,1}^{\frac{d}{p}-1})}\\&\le C\left\|u^n\otimes u^n\right\|_{L_T^1(\dot B_{p,1}^{\frac{d}{p}})}\\&\le C\int_0^T\left\|u^n\right\|_{\dot B_{p,1}^{\frac{d}{p}}}\left\|b^n\right\|_{\dot B_{p,1}^{\frac{d}{p}}}\mathrm{d}\tau\\&\le C\int_0^T\left(\left\|u_L^n\right\|_{\dot B_{p,1}^{\frac{d}{p}}}^2+\left\|\bar u^n\right\|_{\dot B_{p,1}^{\frac{d}{p}}}^2+\left\|b_L^n\right\|_{\dot B_{p,1}^{\frac{d}{p}}}^2+\left\|\bar b^n\right\|_{\dot B_{p,1}^{\frac{d}{p}}}^2\right)\mathrm{d}\tau\\&\le C\left(U_0+1\right)\varepsilon^2,\end{aligned}$$

取 ε 足够小使得 $C\left(U_0+1\right)\varepsilon<\frac{1}{4}$，类似地，我们可以得到 $\left\|\mathcal{P}\left(b^n\cdot\nabla b^n\right)\right\|_{L_T^1(\dot B_{p,1}^{\frac{d}{p}-1})}$ 和 $\left\|\mathcal{P}\left(b^n\cdot\nabla u^n\right)\right\|_{L_T^1(\dot B_{p,1}^{\frac{d}{p}-1})}$ 的估计。综合(4.3)和(4.4)的估计完成了 $(S_n)_3$ 的证明。

4.2. 解的存在性和唯一性

为了得到局部解的时间存在性，我们将证明$\left(u^n,b^n\right)$是如下空间的 Cauchy 序列，即

$$\left(u^n,b^n\right)\in L_T^2\left(0,T_*;\dot{B}_{p,1}^{\frac{3}{p}-1}\right)$$

对$\forall n\geq 1$，T_*足够小，设

$$\delta u^{n+1}=u^{n+1}-u^n,\delta b^{n+1}=b^{n+1}-b^n,\forall n\geq 1$$

则有如下系统

$$\begin{cases}\partial_t\delta u^{n+1}-\mu\Delta\delta u^{n+1}=\delta F^n\\ \partial_t\delta b^{n+1}-\lambda\Delta\delta b^{n+1}=\delta H^n\\ \operatorname{div}\delta u^n=\operatorname{div}\delta b^n=0\\ \left(\delta u^{n+1},\delta b^{n+1}\right)(x,0)=\left(\dot{\Delta}_{n+1}u_0,\dot{\Delta}_{n+1}b_0\right)\end{cases}\tag{4.5}$$

其中

$$\delta F^n=-\mathcal{P}\left(u^n\cdot\nabla\delta u^n\right)-\mathcal{P}\left(\delta u^n\cdot\nabla u^{n-1}\right)+\mathcal{P}\left(b^n\cdot\nabla\delta b^n\right)+\mathcal{P}\left(\delta b^n\cdot\nabla b^{n-1}\right)$$
$$\delta H^n=-\mathcal{P}\left(u^n\cdot\nabla\delta b^n\right)-\mathcal{P}\left(\delta u^n\cdot\nabla b^{n-1}\right)+\mathcal{P}\left(b^n\cdot\nabla\delta u^n\right)+\mathcal{P}\left(\delta b^n\cdot\nabla u^{n-1}\right)$$

对任意$T\in]0,T_*[$，因为$\operatorname{div}u^n=\operatorname{div}b^n=0$，由引理 3.1 和 3.2，这里令$1\leq p<2d$，有

$$\begin{aligned}V^{n+1}&\triangleq\left\|\delta u^{n+1}\right\|_{L_T^2(\dot{B}_{p,1}^{\frac{d}{p}-1})}+\left\|\delta b^{n+1}\right\|_{L_T^2(\dot{B}_{p,1}^{\frac{d}{p}-1})}\\&\leq\left\|\left(\dot{\Delta}_{n+1}u_0,\dot{\Delta}_{n+1}b_0\right)\right\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{d}{p}-2}}+\left\|\left(u^n,b^n,u^{n-1},b^{n-1}\right)\right\|_{L_T^2(\dot{B}_{p,1}^{\frac{d}{p}})}\left\|\left(\delta u^n,\delta b^n\right)\right\|_{L_T^2(\dot{B}_{p,1}^{\frac{d}{p}-1})}\end{aligned}\tag{4.6}$$

由 Bernstein 不等式得

$$\left\|\left(\dot{\Delta}_{n+1}u_0,\dot{\Delta}_{n+1}b_0\right)\right\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{d}{p}-2}}\leq C2^{-(n+1)}\left\|\left(u_0,b_0\right)\right\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{d}{p}-1}}\tag{4.7}$$

结合(4.6)和(4.7)得

$$V^{n+1}\leq C_1 2^{-n}+C_2D(T)V^n,$$

其中常数$C_1,C_2>0$，取T_*足够小使得$C_2D(T)<\frac{1}{2}$，可得$\left\{\left(u^n,b^n\right)\right\}$在$L_T^2\left(0,T_*;\dot{B}_{p,1}^{\frac{3}{p}-1}\right)$中为一收敛序列。从(4.1)和(4.2)中可以找到极限(u,b)是初值满足$(u_0,b_0)\in\dot{B}_{p,1}^{\frac{d}{p}-1}\left(\mathbb{R}^d\right)\times\dot{B}_{p,1}^{\frac{d}{p}-1}\left(\mathbb{R}^d\right)$的方程组(1.1)的解，且$(u,b)\in\mathbb{C}\left(\left[0,T\right],\dot{B}_{p,1}^{\frac{d}{p}-1}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)\cap L^1\left(\left[0,T\right],\dot{B}_{p,1}^{\frac{d}{p}-1}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)\times\mathbb{C}\left(\left[0,T\right],\dot{B}_{p,1}^{\frac{d}{p}-1}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)\cap L^1\left(\left[0,T\right],\dot{B}_{p,1}^{\frac{d}{p}-1}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$。

类似于解的局部存在性证明，可以得到解(u,b)的唯一性。因此，我们完成了解(u,b)在$[0,T]$上存在唯一性的证明。

5. 总结

本文针对方程(1.1)，采用构造逼近解列的方法[10]，通过 Cauchy 列收敛证明该逼近解有极限，然后利用极限唯一性证得逼近解在分布意义下是方程(1.1)在$[0,T]$上的解，进而证得该解也是唯一的。由于

MHD 方程良好的对称性及其在物理学上的重要性，我们认为对 MHD 系统的解的性质的研究是非常重要的。基于对 Navier-Stokes 方程组的学习，我们对 MHD 中的线性系统以及非线性的处理，可以从 Navier-Stokes 方程组运用到的一些方法中借鉴或汲取灵感，提高研究的可行性。之后我们可以进一步研究临界齐次空间解的整体适定性以及非齐次不可压 MHD 方程组的整体适定性问题。

参考文献

[1] Fujita, H. and Kato, T. (1964) On the Navier-Stokes Initial Value Problem. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **16**, 269-315. https://doi.org/10.1007/BF00276188

[2] Cannone, M. (1995) Ondelettes, Paraproduits et Navier-Stokes. Diderot Editeur, Paris.

[3] Chemin, J.Y. (1999) Théorèmesd'unicité pour le système de Navier-Stokes tridimensionnel. *Journal d'Analyse Mathématique*, **77**, 27-50. https://doi.org/10.1007/BF02791256

[4] Hao, C. (2011) Well-Posedness to the Compressible Viscous Magnetohydrodynamic System. *Nonlinear Analysis*: *Real World Applications*, **12**, 2962-2972. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2011.04.017

[5] Bian, D. and Yuan, B. (2014) Local Well-Posedness in Critical Spaces for the Compressible MHD Equations. *Applicable Analysis*, **95**, 239-269. https://doi.org/10.1080/00036811.2014.910651

[6] Danchin, R. and Tan, J. (2021) On the Well-Posedness of the Hall-Magnetohydrodynamics System in Critical Spaces. *Communications in Partial Differential Equations*, **46**, 31-65. https://doi.org/10.1080/03605302.2020.1822392

[7] Jia, J.X., Peng, J.G. and Gao, J.H. (2016) Well-Posedness for Compressible MHD Systems with Highly Oscillating Initial Data. *Journal of Mathematical Physics*, **57**, 081514. https://doi.org/10.1063/1.4961157

[8] Ye, W.K. and Zhao, Y.Y. (2022) Global Well-Posedness for the Non-Viscous MHD Equations with Magnetic Diffusion in Critical Besov Spaces. *Acta Mathematica Sinica*, *English Series*, **38**, 1493-1511. https://doi.org/10.1007/s10114-022-1400-3

[9] Bahouri, H., Chemin, J.Y. and Danchin, R. (2011) Fourier Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations. *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, Vol. 343, Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-16830-7

[10] Charve, F. and Danchin, R. (2010) A Global Existence Result for the Compressible Navier-Stokes Equations in the Critical Lp Framework. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **198**, 233-271. https://doi.org/10.1007/s00205-010-0306-x