Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(6), 2639-2642
Published Online June 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.126265

一个关于可解群和极大子群的次正规迹的定理

向艳辉，何金旅*

西华师范大学数学与信息学院，四川 南充

收稿日期：2023年5月5日；录用日期：2023年5月28日；发布日期：2023年6月6日

摘 要

极大子群是一类重要的子群，它的相关性质对描述群的结构起着重要的作用。结合子群的迹，并将群的极大子群进行分类，本文利用非交换的极大子群的迹的次正规性质来研究可解群，并得到了描述群的可解性的一个充分必要条件，将已有的结果进行了推广。

关键词

极大子群，迹，次正规性，可解群

A Theorem on Solvable Groups and Subnormal Traces of Maximal Subgroups

Yanhui Xiang, Jinlv He*

School of Mathematics and Information, China West Normal University, Nanchong Sichuan

Received: May 5th, 2023; accepted: May 28th, 2023; published: Jun. 6th, 2023

Abstract

As an important class of subgroups, the maximal subgroups play an important role in characterizing the solvability of a group. In this paper, based on traces of subgroups and classifying the maximal subgroups, we investigated the solvability of a group by using the subnormal property of the traces of nonabelian maximal subgroups and obtained a necessary and sufficient condition for characterizing solvable groups, which generalized the existing results.

Keywords

Maximal Subgroup, Trace, Subnormality, Solvable Group

*通讯作者。

文章引用: 向艳辉, 何金旅. 一个关于可解群和极大子群的次正规迹的定理[J]. 应用数学进展, 2023, 12(6): 2639-2642. DOI: 10.12677/aam.2023.126265

1. 引言

在本文中，只考虑有限群，相关术语和符号可参考文献[1] [2] [3]。其中，G 的阶用 $|G|$ 来表示，$\pi(G)$ 则表示 $|G|$ 的全部素因子所构成的集合。用 $H \le G$ （$H < G$）表示 H 是 G 的子群(真子群)，将 H 在 G 中的柱心(即含于 H 中 G 的极大正规子群)记为 H_G。用 $U \trianglelefteq\trianglelefteq G$ 表示 U 是 G 的次正规子群。用 $M \lessdot G$ 表示 M 是 G 的一个极大子群。在此，从交换条件考虑，将极大子群进行分类，令 $\mathcal{F}_1 = \{M \lessdot G \mid M\text{是交换的}\}$，$\mathcal{F}_2 = \{M \lessdot G \mid M\text{是非交换的}\}$。

极大子群、准素子群对群结构有着重要的影响，很多国内外的群论学者也研究过相关的课题。例如，1971 年，Johnson [4]证明了若群 G 的每个本原子群在 G 中具有素数方幂的指数，则 G 是超可解的。1996 年，王燕鸣[5]证明了群 G 是可解的当且仅当 G 的 c-极大子群在 G 中是 c-正规的。2019 年，鲍宏伟等[6]分析了群 G 的超中心结构与 M-可补充准素子群的关系。同年，高百俊等[7]描述了准素子群的弱 M-可补充性质对群 G 的合成因子的影响。2020 年，鲍宏伟等[8]研究了弱 M-可补充的准素子群和群 G 的主因子的联系。

另一方面，2014 年，郭文彬等[9]定义了子群的迹，并利用极大子群的迹的相关性质研究了群 G 的结构。2021 年，何金旅等[10]利用 G 的 c-极大子群的迹的幂零性质考察了群 G 的可解性。结合以上的结果和继续上述的研究，对于 G 的非交换极大子群，考察其迹的次正规性质对群 G 的可解性的影响。

2. 基本概念

定义 1 [9]假设 $A < G$，A_G 是 A 在 G 中的柱心。对于 G 的一个主因子 H/A_G，记它是 A 的一个 G-边界因子(或简称边界因子)。对于边界因子 H/A_G，$(A \cap H)/A_G$ 被称为 A 的一个 G-迹(或简称迹)。

引理 1 [9] G 是可解的当且仅当每个极大子群的迹是次正规的。

引理 2 [1]内交换群 G 必为可解群。

引理 3 [11]若 $U \trianglelefteq\trianglelefteq G$，则 $Soc(G) \le N_G(U)$。

3. 主要结果

定理：G 是可解的充分必要条件为 G 的每个非交换的极大子群的迹是次正规的。

证明：必要性：因为 G 是可解群，所以有每个主因子皆交换，即 H/M_G 交换，而 $(M \cap H)/M_G \le H/M_G$，所以 $(M \cap H)/M_G \trianglelefteq H/M_G$，又 $H/M_G \trianglelefteq G/M_G$，所以 $(M \cap H)/M_G \trianglelefteq\trianglelefteq G/M_G$。

充分性：由于 G 的每一个非交换的极大子群的迹是次正规的，所以存在主因子 H/M_G 的迹 $(M \cap H)/M_G$ 满足 $(M \cap H)/M_G \trianglelefteq\trianglelefteq G/M_G$。

情形一：如果 G 是单群，此时对于任意的 G 的极大子群 M，$M_G = 1$ 且 M 的迹是 M。

i. $\mathcal{F}_1 = \varnothing$，由引理 1 得 G 是可解的。

ii. $\mathcal{F}_2 = \varnothing$，由引理 2 得 G 是可解的。

iii. $\exists M \in \mathcal{F}_1$，$M = 1$，所以 G 是可解的。

情形二：如果 G 不是非交换单群，任取 G 的极小正规子群 L，考虑商群 G/L，对任意 $M/L \lessdot G/L$，则 $M \lessdot G$。进一步，令 H/M_G，$(H \cap M)/M_G$，分别是 M 的边界因子和迹，则 $(H \cap M)/L/(M/L)_{G/L}$ 是

M/L 的迹。

i. 若 G/L 的所有极大子群 M/L 都是交换的，则根据引理 2，G/L 是可解的。

ii. 若 G/L 存在极大子群是非交换的，则 M 也是非交换的。根据已知条件，M 的迹 $(M\cap H)/M_G$ 满足 $(M\cap H)/M_G \trianglelefteq\trianglelefteq G/M_G$。因此，$M/L$ 的迹 $(H\cap M)/L/(M/L)_{G/L} = (H\cap M)/L/M_G/L \cong (H\cap M)/M_G$。由已知条件，$(M\cap H)/M_G \trianglelefteq\trianglelefteq G/M_G$，进而，$(H\cap M)/L/(M/L)_{G/L} \trianglelefteq\trianglelefteq G/L/(M/L)_{G/L}$。因此，$G/L$ 满足命题条件，对 $|G|$ 使用归纳法，G/L 是可解的。

① 若 L 是可解的，由扩张闭性质，G 是可解的。

② 若 L 是不可解的，则 $|\pi(L)|\geq 3$，取极大素因子 $r\in\pi(L)$，$r\geq 5$，令 R 是 L 的一个 *Sylow-r* 子群，M 是 G 的一个极大子群，满足 $N_G(R)\leq M$。由 *Frattini* 论断，$G = LN_G(R) = LM$。

若 L 不唯一，则可取两个极小正规子群 L_1 和 L_2。根据前面的讨论，G/L_1 和 G/L_2 是可解的。进而，$G/(L_1\cap L_2)$ 是可解的，G 是可解的。

若 L 唯一，则 $M_G = 1$。由([12]，定理 X.8.13)可知，$M\in\mathcal{F}_2$，由已知条件 $L\cap M$ 是次正规的，由引理 3，$L\leq N_G(L\cap M)$，又 $L\cap M \trianglelefteq M$，所以 $G = LM \leq N_G(L\cap M)$，即 $L\cap M \trianglelefteq G$ 这与 $L\cdot\!\trianglelefteq G$ 矛盾。

综上所述，得证。

4. 定理推论

推论 1 若 G 的每个非循环的极大子群的迹是次正规的，则 G 是可解的。

推论 2 若 G 的每个非交换的极大子群的迹是正规的，则 G 是可解的。

推论 3 若 G 的每个非循环的极大子群的迹是正规的，则 G 是可解的。

推论 4 若 G 的每个非交换的极大子群的迹是 s-拟正规的，则 G 是可解的。

推论 5 若 G 的每个非循环的极大子群的迹是 s-拟正规的，则 G 是可解的。

5. 结束语

本文主要利用非交换极大子群的迹的次正规性质得到了可解群的一个充分必要条件。作为应用，得到了一些直接推论；同时，在某种程度上，将文献[9]中相关的结果进行了推广。

基金项目

四川省自然科学基金项目(2022NSFSC1843)。

参考文献

[1] 徐明曜. 有限群导引(上) [M]. 北京: 科学出版社, 2007.

[2] 徐明曜, 黄建华, 李慧陵, 李世荣. 有限群导引(下) [M]. 北京: 科学出版社, 1999.

[3] Guo, W. (2000) The Theory of Classes of Groups. Science Press, Beijing.

[4] Johnson, D.L. (1971) A Note on Supersoluble Groups. *Canadian Journal of Mathematics*, **23**, 562-564. https://doi.org/10.4153/CJM-1971-063-5

[5] Wang, Y. (1996) *C*-Normality of Groups and Its Properties. *Journal of Algebra*, **180**, 954-965. https://doi.org/10.1006/jabr.1996.0103

[6] 鲍宏伟, 张佳, 李德才. 某些子群嵌入性质对群类构造的影响[J]. 云南大学学报(自然科学版), 2019, 41(6): 1101-1107.

[7] 高百俊, 张佳, 朱振扬. 弱 M-可补子群对合成因子的影响[J]. 浙江大学学报(理学版), 2019, 46(5): 526-528, 536.

[8] 鲍宏伟, 高百俊, 张佳. 有限群的非交换主因子[J]. 吉林大学学报(理学版), 2020, 58(5): 1079-1084.

[9] Guo, W., Skiba, A.N. and Tang, X. (2014) On Boundary Factors and Traces of Subgroups of Finite Groups. *Commu-*

nications in Mathematics and Statistics, **2**, 349-361. https://doi.org/10.1007/s40304-015-0043-4

[10] 何金旅，吴金莲，张佳. 关于可解群的三个充分必要条件[J]. 青海师范大学学报(自然科学版)，2021，37(4): 17-20.

[11] Doerk, K. and Hawkes, T. (1992) Finite Soluble Groups. Springer, Berlin. https://doi.org/10.1515/9783110870138

[12] Huppert, B. and Blackburn, N. (1982) Finite Groups III. Springer-Verlag, Berlin, New York. https://doi.org/10.1007/978-3-642-67997-1