

传染病的微分方程模型

陆晓薇, 陈敏凤

广东外语外贸大学数学与统计学院, 广东 广州

收稿日期: 2023年5月13日; 录用日期: 2023年6月7日; 发布日期: 2023年6月14日

摘要

新冠肺炎自爆发以来, 严重影响了人们正常的生活秩序, 因此有必要利用数学模型将其传播特点数量化, 研究其传播规律, 并提供预测与防控的理论支撑。本文将从最简单的SI传染病数学模型入手, 分析得出比较符合此次COVID-19病毒传播规律的SEIR传染病数学模型。在此基础上, 提出具有检疫隔离、封城措施的新冠肺炎传播模型, 另提出具有疫苗接种的传播模型, 对比分析其各自优劣之处, 给出适当的防疫建议。

关键词

新型冠状病毒肺炎, SEIR传染病数学模型, 修正SEIR传染病数学模型, 新冠疫苗

Differential Equation Model of Infectious Diseases

Xiaowei Lu, Minfeng Chen

School of Mathematics and Statistics, Guangdong University of Foreign Studies, Guangzhou Guangdong

Received: May 13th, 2023; accepted: Jun. 7th, 2023; published: Jun. 14th, 2023

Abstract

Since the outbreak of COVID-19, it has seriously affected people's normal life order. Therefore, it is necessary to use mathematical models to quantify its transmission characteristics, study its transmission laws, and provide theoretical support for prediction and prevention and control. This paper will start with the simplest SI infectious disease mathematical model, and analyze the SEIR infectious disease mathematical model that is more consistent with the COVID-19 virus transmission law. On this basis, the transmission model of COVID-19 with quarantine isolation and city closure measures is proposed, and the transmission model with vaccination is also proposed. Their advantages and disadvantages are compared and analyzed, and appropriate epidemic prevention sug-

gestions are given.

Keywords

COVID-19 Virus, SEIR Infectious Disease Mathematical Model, Modified SEIR Infectious Disease Mathematical Model, 2019-nCoV Vaccine

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 绪论

1.1. 研究背景及意义

1.1.1. 选题背景

2019年12月,武汉市陆续出现不明原因肺炎病人,2020年2月世界卫生组织将其命名为“COVID-19”。此次肺炎主要来源于一种新型冠状病毒,这种新型冠状病毒的传播方式主要是接触传播和呼吸道飞沫传播,感染者会出现程度不同的症状。在疫情爆发初期,感染病毒者普遍症状严重,通常伴随咳嗽发热、气促和呼吸困难等症状,严重者可导致肺炎、严重急性呼吸综合征、甚至因窒息而死亡。而且此新型冠状病毒传播方式普通,传播速度极快,对于此次病毒并没有特定疗效药物可以治疗,加之爆发在春运期间,大量人口流动大大加快了其蔓延速度,很快此次疫情便席卷了全国。

1.1.2. 研究意义与目的

疫情之下,人们的生活受到了极大影响,从春节过后延迟复工复产,到2020年初全国学生停课开始上网课。在防疫工作一线,有被汗水浸透了衣裳的医护人员,有深夜还在公路上执勤的交警,有穿着红色马甲无私奉献的志愿者们等等。无论是精准防疫的哪个阶段,我们的目标都是战胜疫情,只有科学、精准的政策措施,才能实施最高效率地防疫。

微分方程模型是研究传染病传播的一个重要数学方法,无论是2003年的SARS,还是2009年广泛传播的甲型H1N1流感,甚至是如今依然流行于社会中的COVID-19病毒,它们都给国民经济和人民群众的生活带来了严重的影响,严重妨碍了人们的正常生活,阻碍了国家经济发展,减缓了进出口贸易的步伐。为此,政府必须采取行动对其进行干预。从经典的传染病SI模型入手,通过政府发布的统计数据对其进行模型修正和参数估计,得出与实际情况拟合的比较好的方程进行预测,并帮助政府决策人员作出更好的判断和宏观部署。因此学习并运用传染病的微分方程模型十分必要。本文基于传统的传染病SI模型,添加封城、隔离、疫苗接种等条件对其进行改进,并探究其在实际生活中的应用。

1.2. 研究内容与框架

本文基于经典SEIR模型对武汉市2020年1月10日至2020年3月17日的数据进行建模分析,在经典的SEIR传染病模型的基础上进行三次修正并检验措施的有效性。第一次是增加两个仓室——隔离者(Q)和死亡者(D),确诊后对感染者进行隔离治疗,形成新的一类人群(Q),且把原有的痊愈者(R)细分为活着的痊愈者(R)和死亡者(D),他们都不会再次感染病毒;第二次修正是增加了一类自我隔离者(F),是政府采取干预措施后形成的新的一类人群;第三次修正是实施疫苗接种措施,加大防疫制度,形成了一批带

有免疫功能的未感染人群,称为抗体者(V)。随后通过大量数据收集与分析,查阅文献和对现有研究进行总结,进一步探索此类措施对疫情防控工作中的作用和意义,对进行下一步工作的展开提供理论指导。

文章第一部分是绪论,主要是介绍了本篇文章的选题背景、研究的目的与意义,以及研究内容与研究方法。再对本文的创新之处和不足之处进行了详细地展开,主要描述了基于现有的研究学习后,笔者对数学模型应用于此次疫情防控工作有了新的启迪。

文章的第二部分为研究现状和文献综述,现有的大多数传染病模型都是基础的SI模型和SIR模型等,前人已将此类数学模型作了深入研究,并广泛应用于实践中,结合我国发生过的SARS病毒、甲型H1N1等数据,得出了一系列结论并进一步证实了传染病模型的可行性和有效性。

文章的第三部分从最简单的传染病数学模型入手,通过一步步优化和改进,仿真模拟出最符合现实数据的模型,通过预测和估计提前给出正确、精准的防控建议。首先给出了微分方程的定义与性质,介绍如何将其运用于传染病传播动力学当中,再将微分方程构建起适用于传染病传播动态的传染病模型,通过数据比对和改进更新,得出最基础的传染病模型SI模型。由于现实情况复杂多变,突发情况的千变万化、人类的防范意识主动性和身体的免疫功能体系进行抵抗,我们又增加了得病后拥有免疫功能的移除者体系(R)、携带病毒却未产生对应症状的潜伏者(E)等等,一步步改进为SIS模型、SIR模型,最终构建了更为精确的SEIR传染病模型。

文章的第四部分是基于第三部分介绍的SEIR传染病模型,提出了第一次修正。其中增加了隔离者(Q)和死亡者(D)两个仓室,在确诊感染病以后,进入集中观察区进行隔离治疗的患者,由于医疗设施较为充足和医护水平较高,比不隔离治疗的感染者(I)仓室的病人痊愈率更高,死亡率更小,且隔离者(Q)仓室的患者不具备传染病毒给未感染(S)的条件。其次将痊愈者细分为死亡者(D)和仍然在世的痊愈者(R),其两个群体都默认退出感染系统,但病毒不断在变异与扩散,很难排除痊愈者将会二次感染,于是细分后的仓室有助于日后的进一步研究。

文章的第五部分是在第一次修正的基础上进行第二次修正,增加了封城措施、在家自我隔离,并且呼吁大家必要出门时必须佩戴口罩。由于疫情的突发不可控制,政府及时采取封城干预措施,极大程度减小了病毒往外扩散的速率,群众在家自我隔离,通过物理隔绝阻止社会面的人群接触,有效控制病毒的肆意扩散。佩戴口罩是一个保护大家安全的有效方法,因为COVID-19病毒主要通过唾沫与空气传播,佩戴口罩可以防范病毒、细菌的飞沫传播,阻断传播途径,从而保障自身安全,但值得注意的是,我们需勤换口罩。

文章的第六部分是在第一次修正的基础上进行的第三次修正,由于封城以及在家自我隔离的措施,严重影响了居民的身心健康、生活与工作。当一个城市关闭时,在物资储备供应不足时,许多居民需抢菜、囤货,甚至许多不良商家趁此机会大涨销售价格。且该城市GDP会在短时间内急速下降,增加政府财政税收压力,因此封城不是一个长久之计。与此同时,我提出了一个新的方案,既能有效控制疫情进一步扩散,又不影响百姓的正常生活。假设政府推出新冠疫苗接种政策,未感染者(S)可以自行决定是否接种疫苗,接种疫苗后可获得抗体,成为抗体者(V),其感染此病的概率大大减少,将接种疫苗获得抗体者(K)加入SEIR传染病模型,并进行可行性分析,并应用于此次爆发的COVID-19病毒进行分析研究,把疫苗接种政策与隔离封城政策相比较。

文章的最后部分是结论与建议,本文主要研究了其他因素下的SEIR传染病数学模型,通过分析对比得出,在不同时期采取不同的防疫策略可在损失最小的情况下得到最大的成效。方法使用对了,便可以事半功倍,然而笔者也发现文章的一些不足之处,期待后续看到本文的读者对其进行延续和补充。

1.3. 研究方法

笔者首先运用文献研究法,通过知网、百度文库等多个渠道,广泛收集大量关于传染病模型的相关

文献与资料数据, 为本文深入研究数学模型应用于传染病中提供了一定的理论基础。在前人已有成果的基础上, 增添新元素进一步分析。

其次运用控制变量法, 在传统 SEIR 传染病数学模型的基础上, 通过逐步修正得到改进模型, 其余条件不变的情况下, 只改变特定因素, 研究其有效性和可行性。从实际出发, 将得出的数学模型进行实践验证模拟, 在此基础上对日后的发展状况进行预测推断, 并对加强做好提前疫情防控工作提出了具有针对性地对策建议。

1.4. 本文的预期创新之处

关于传染病的传统微分方程模型的相关论文较多, 但普遍都是基于最普通的 SI 和 SIR 模型。本文基于与现实拟合得更好的 SEIR 传染病模型, 对其添加接种疫苗、隔离、封城防控等因素进行研究, 力求提供一个更为详尽全面的模型予以参考。

往年的文章多数在研究 SARS、甲型 H1N1 和 HIV 病毒的传播机理, 2019 年来新型冠状病毒席卷而来, 给我国甚至是全球带来了极大的伤害, 并将持续进行下去。运用微分方程模型研究其传播特点和方式, 对其进行提前干预, 有效保障民身心健康安全。

将得出的传染病模型与真实数据对比, 对日后趋势进行预估和推测, 可以进行动态模拟以及动态修改, 时效性强, 操作方便。

1.5. 研究不足

现实情况错综复杂, 影响疫情趋势发展的因素很多, 由于笔者能力有限, 无法对传染病模型在实际生活中的应用更详细深入地推广, 只能研究部分条件因素, 在原有的模型基础上, 进行基础的改进分析, 并对前人的研究进行一些详尽的总结和运用。

2. 研究现状及文献综述

2.1. 研究现状

赵楠楠, 谢文艺, 魏诚[1]运用 SIR 型传染病模型建立了 SARS 病毒传播的微分方程模型, 并用曲线拟合的方法给出了模型的数值解法。

徐永, 曹治清[2]运用 SIR 型传染病模型建立了甲型 H1N1 的动态预测模型并进行预测和分析, 证明了该模型具有一定的可行性和精度, 在适当范围内可给行业部分决策提供参考。

杜瑜[3]进行了对 SI 型和 SIR 型传染病模型的研究, 结合微分方程的数学理论分析了传染病模型的稳定性, 并将其运用到日常生活中。

邱文珠[4]在已有对传染病模型稳定性分析的基础上, 进一步研究采取提前注射疫苗等防疫措施对控制疾病传播速率的影响, 并通过贯彻疫苗注射的政策来进一步控制疫情的扩散。

周宁, 李林[5]归纳总结了几类传染病预测方法, 并用一个例子展示了如何结合灰色方程和微分方程模型, 得到改进后的模型进行求解。

张珍珍, 张科星[6]提出了非线性动力学模型的稀疏辨识方法, 基于数据驱动并利用稀疏回归和参数辨识精准找到控制方程, 并代入 COVID-19 的数据进行传播模拟检验, 实验结果表明此方程拥有良好的可行性, 日后可推广至其他传染病传播过程研究中。

王跃华, 刘娟, 扈文[7]利用传染病基础模型, 提出符合艾滋病传播的微分方程模型, 通过收集数据并代入得出模型参数, 结合我国实际情况进行了误差分析和比较。

杨赞, 赵亚男[8]建立了经典传染病模型 SEIR 传播动力学模型, 通过分析拟合出参数模型并探索出

COVID-19 病毒传播规律和特点, 结合国家推行接种疫苗等政策, 代入此因素后得到改良模型。

王鸿章, 梁聪刚[9]依据动力学原理建立了 SEIR 传染病模型, 利用泛函分析和雅克比矩阵证明了模型方程平衡解的存在性和稳定性, 并应用 Routh-Hurwitz 判别法讨论分析了平衡解的局部稳定性。

王鸿章[10]利用仓室建模的思想建立了 SIR 传染病模型, 并研究了两个最优接种问题, 借助泛函分析的知识选择确定性 SIR 模型和 SIR 随机微分方程模型证明了此最优接种策略的存在性。

王榕巍[11]运用确定性 SIR 模型和 SIR 随机微分方程模型研究美国新型冠状病毒疫情, 将丁香园每日公布的美国疫情数据作为研究对象, 对其建立确定性 SIR 模型和 SIR 随机微分方程模型, 研究美国新冠肺炎疫情的传播规律和发展趋势, 从而帮助决策人员制定有效的防疫政策, 将疫情的影响降低到最小。

2.2. 文献综述

目前国内研究并总结了传统微分方程模型并运用在传染病传播的研究中。近几年来, 通过宏观调控 SARS 病毒、甲型 H1N1 病毒和 HIV 病毒的传播, 微分方程模型在传染病的传播控制中起了非常重要的作用。将其结合其他数学原理得出改良后的模型, 为以后预防传染病的进一步传播和提前对其进行干预奠定了基础。

3. 传染病预测模型

3.1. 微分方程的定义和性质

3.1.1. 微分方程的定义

微分方程是指含有未知函数、未知函数的导数以及自变量函数并表示他们之间关系的方程, 例如 $\frac{dy}{dx} = 2x$ 和 $\frac{ds}{dt} = 0.4$ 都属于微分方程。根据未知函数的种类不同, 可分为以下两种: 未知函数是一元函数时, 则称为常微分方程; 未知函数是多元函数时, 则称为偏微分方程。微分方程中未知函数最高阶导数的阶数称为微分方程的阶数。一般情况下, n 阶微分方程的解含有 n 个任意常数, 此时, 这个解为这个微分方程的通解, 通解构成一个函数族。

3.1.2. 微分方程的性质

一阶微分方程的初等解法:

方法一: 形如 $\frac{dy}{dx} = f(x)\xi(y)$ ① 的方程, 称为变量分离方程。如果 $\xi(y) \neq 0$, 则①可改写成 $\frac{dy}{\xi(y)} = f(x)dx$, 再两边同时积分, 得 $\int \frac{dy}{\xi(y)} = \int f(x)dx + c$ ②, 将②理解成 x, y, c 的隐函数关系式 $\phi(x, y, c) = 0$, 则②就是微分方程 $\frac{dy}{dx} = f(x)\xi(y)$ 的通解。

方法二: 形如 $\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right)$ 的方程称为齐次微分方程, 作变量变换 $u = \frac{y}{x}$ ③, 即 $y = ux$, 两边对 x 求导数, 得 $\frac{dy}{dx} = x \frac{du}{dx} + u$ ④, 将③和④代入 $\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right)$ 并整理, 得 $\frac{du}{dx} = \frac{g(u) - u}{x}$, 这是一个变量分离方程, 按照方法一即可求解。

3.2. 传染病的数学模型

传染病是一种可以从一个人或其他物种, 经过各种途径传染给另一个人或物种的感染病。传染病不仅严重危害了人们的身体健康, 而且对社会也造成了极大的威胁, 因此通过对传染病传播过程进行定量分析来有效预防是一个极为重要的课题。早在上个世纪, 国外便有科学家利用数学模型来研究天花的传

播特点。后来生物学家 Kermack 和 Mckendik 建立了传染病传播蔓延时满足的方程组:

$$\begin{aligned} -\frac{dx}{dt} &= -\gamma xy \\ \frac{dy}{dt} &= \gamma xy - \nu y \\ \frac{dz}{dt} &= \nu y \end{aligned}$$

其中, γ 和 ν 是两个比例常数, 分别为传染率和排除率。Kermack-Mckendik [4] 研究其解得出阈值定理, 找出了传染规律。

二十世纪末, 国际社会传染病的传播动力学迅速发展, 所使用的模型不断升级进步, 应对不同的传播特点已研究出相应的特殊模型。在我国, 对传染病数学模型的研究也逐步见有起色, 在 2003 年非典 SARS 爆发期间, 我国科学家通过对非典疫情数据的准确把握与研究, 建立相应的传染病数学模型进行相关分析与推断模拟, 最终成功准确预测了我国非典疫情的准确趋势, 协助国家领导以及医护人员提前做好对策与防范措施, 有效控制并解决了疫情进一步恶化发展和蔓延的趋势。

在传染病数学模型的建立中, 我们把涉疫人口分为几种不同的类型(仓室, Compartment): 如易感染者(Susceptible)类、感染者(Infective)类、移除者(Removed)类和潜伏者(Exposed)类等。在时刻, 分别对应的函数为 $S(t)$ 、 $I(t)$ 、 $R(t)$ 、 $E(t)$ 。根据不同疾病的传播特点, 假设出相应的传播模型, 把涉疫人口根据分类的特征归为对应的类别里, 并利用调查统计所得相关数据代入检验模型是否合理准确。可用建立的准确模型和现有的相关数据对疫情传播的未来趋势进行预测, 提前制定好相关防疫措施, 例如: 如预测疫情将会垂直式增加感者人数时提前做好隔离措施; 提前让市民接种疫苗。

3.3. 自由增长模型

3.3.1. 模型假设

- 设 t 时刻感染者的人数为 $I(t)$ 是连续可微的, 其中 t 的单位是天, 可取任意非负实数。
- 每天每个感染者可有效传染给 λ 个未感染者。

3.3.2. 模型构建

- 研究 t 时刻到 $t + \Delta t$ 时刻感染者人数的增加, 有 $I(t + \Delta t) - I(t) = \lambda I(t) \Delta t$ 。
- 设定 $t = 0$ 时初始值 $I(0) = I_0$ 。
- 得到微分方程 $\frac{dI}{dt} = \lambda I$, $I(0) = I_0$ ⑤。

3.3.3. 模型求解

方程⑤的解为 $I(t) = I_0 e^{\lambda t}$, 说明随着时间 t 的增加, 感染者数量 $I(t)$ 将会无限增长。

3.3.4. 模型评价

此模型不符合实际情况, 因为实际生活中的人口总数有限, 且只有未染病者才有可能染病, 终有一天未染病者人数不足 λ , 故无法达到无限增长。

3.4. SI 模型

3.4.1. 模型假设

- 在考虑的时间范围内, 涉疫地区的人口总数为 N 且保持不变。

b) 把涉疫地区人口分为易感者(S)和感染者(I)两种类型, 在某时刻 t , 其占总人口数的比例分别为 $s(t)$ 和 $i(t)$ 。且 $S(t)+I(t)=N$; $s(t)+i(t)=1$ 。

c) 初始状态为 $S(0)$ 、 $I(0)$, 常数 λ 是接触率, 为每个感染者每日会有效接触未染病者的平均人数。

3.4.2. 模型构建

a) 病人数为 $Ni(t)$, 且每位病人每天可传染扩散的人数为 $\lambda s(t)$, 所以可得每天有 $M = Ni(t)\lambda s(t)$ ⑥ 个健康人被传染得病。

b) 方程⑥对 t 求导, 得 $N \frac{di}{dt} = \lambda N s i$, 又因为 $s(t)+i(t)=1$, 初始时刻 $t=0$ 时, 病人比例为 i_0 。

c) 综上可得 $\frac{di}{dt} = \lambda i(1-i), i(0) = i_0$ ⑦——这是 logistic 模型。

3.4.3. 模型求解

a) 使用变量分离法可得 $\frac{di}{i(1-i)} = \lambda dt$ 。

b) 两边同时积分求得⑦的解为 $i(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{i_0} - 1\right) e^{-\lambda t}}$ 。

3.4.4. 模型评价

a) 取 $\lambda = 1, i_0 = \frac{1}{4}$ 时可得 $i(t)-t$ 和 $\frac{di}{dt} - i$ 的图形分别为:

由图 1、图 2 可知, 当 $i = \frac{1}{2}$ 时, $\frac{di}{dt}$ 达最大值 $\left(\frac{di}{dt}\right)_{\max}$, 此时刻为 $t_{\max} = \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{1}{i_0} - 1\right)$, 根据模型预测, 将会在 t_{\max} 时迎来感染高峰期, 有关部分可提前制定政策并做好相关防范准备。

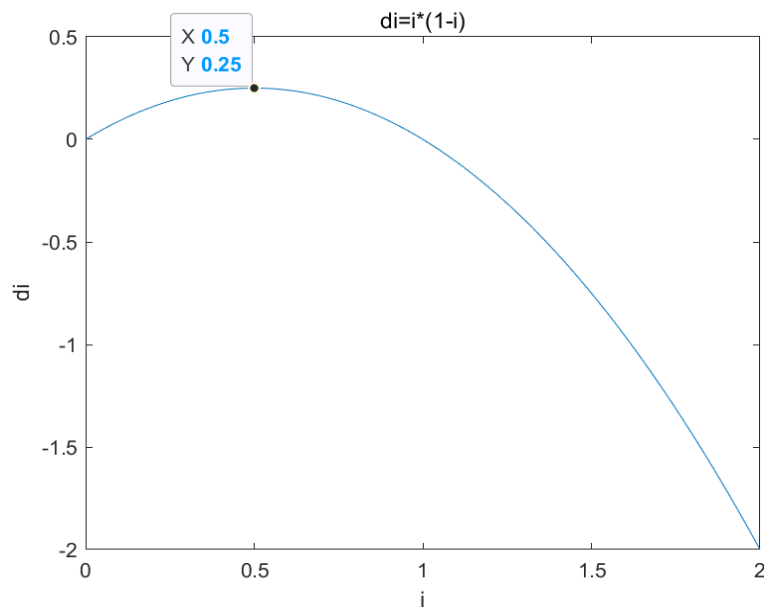


Figure 1. $\frac{di}{dt} \sim i$ relationship diagram

图 1. $\frac{di}{dt} \sim i$ 关系图

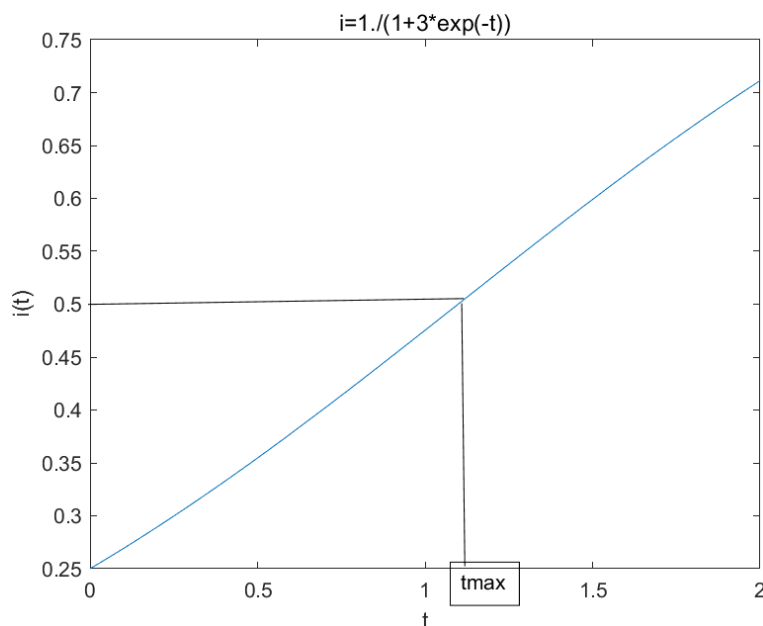


Figure 2. $i \sim t$ relationship diagram

图 2. $i \sim t$ 关系图

- b) 由于 SI 未考虑患病者痊愈的情况, 且当 $t \rightarrow \infty$ 时, $i = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{i_0} - 1\right) e^{-\lambda t}} \rightarrow 1$, 意味着最终将导致全

体人员患病的结局, 因此这是不符合实际情况的。

3.5. SIS 模型

3.5.1. 模型假设

- 在考虑的时间范围内, 涉疫地区的人口总数为 N 且保持不变。
- 感染者染病痊愈后未得到免疫功能, 仍然具备再次感染的风险。
- 当感染者有效接触未感染者时会把病毒传染给他, 假设每个感染者每天有效传染给 λ 个易感者。
- 每天被治愈的病人比例为常数 u , 称为日治愈率, $u = \frac{\text{被治愈的病人数}}{\text{病人总数}}$ 。

3.5.2. 模型构建

- 把 SI 模型⑧修正为 $N \frac{di}{dt} = \lambda Nsi - \mu Ni$, 又因为 $s(t) + i(t) = 1$, 初始时刻 $t = 0$ 时, 病人比例为 i_0 。
- 化简得 $\frac{di}{dt} = \lambda i(1-i) - \mu i, i(0) = i_0$ 。

3.5.3. 模型求解

- 利用常系数变易法求解伯努利方程 $\frac{di}{dt} + (\mu - \lambda)i = -\lambda i^2$ 。
- 令 $y = \frac{1}{i}$, 则化简成 $\frac{dy}{dt} - (\mu - \lambda)y = \lambda, y(0) = \frac{1}{i_0}$ 。
- 最后求解方程的解为 $y = \left(\frac{1}{i_0} + \frac{\lambda}{\mu - \lambda}\right) e^{(\mu - \lambda)t} - \frac{\lambda}{\mu - \lambda}, i = \frac{1}{y}$ 。

3.5.4. 模型评价

SIS 模型是 SI 模型的改进版, 但实际情况仍比 SIS 模型考虑的条件更加复杂, 且人体机能在感染传染病后短期乃至终身将有免疫功能, 于是 SIS 模型仍不是一个科学的理想模型。

3.6. SIR 模型

3.6.1. 模型假设

- 感染者痊愈后获得了极强的免疫功能, 不会再次被感染, 他们退出了传染系统, 被归为一类新的类型, 称为移除者(Removed)类。
- 涉疫地区总人口数不变, 为 N 。包括感染者(I), 易感染者(S)和移除者(R)。
- 设每个感染者每天能传染未感染者的人数为常数 λ , 日治愈率为 μ , 且 t 时刻各类别人数占比为 $s(t)$ 、 $i(t)$ 、 $r(t)$ 。

3.6.2. 模型构建

- 同 SIS 模型, 仍有 $N \frac{di}{dt} = \lambda N s i - \mu N i$, $s(t) + i(t) + r(t) = 1$ ⑨
- 在 t 时刻, 移除者人数为 $N r(t)$, 对 t 求导, 得 $N \frac{dr}{dt} = \mu N i$ ⑩
- 联立⑨⑩得方程组并化简, 得

$$\frac{di}{dt} = \lambda s i - \mu i, i(0) = i_0$$

$$\frac{ds}{dt} = -\lambda s i, s(0) = s_0$$

3.6.3. 模型求解

- 此方程组求解不出解析解, 可代入数值进去求解数值解。
- 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $i \rightarrow 0$, 意味着当时间足够长时, 感染者的比例将会趋向于 0, 无病原体便不会使传染病进一步扩散传播, 即此疫情将结束。

3.7. SEIR 模型

3.7.1. 模型假设

- 假设感染者接触易感染者并传播病毒后, 易感者并不会立马出现相关病症, 病毒会在易感者身上潜伏一段时候后再出现明显症状。易感者在携带病毒但未出现症状的这段时期, 称为潜伏期, 我们把这一类人分为第四类, 叫作潜伏者(Exposed)。
- 假设潜伏者也具有传染性, 但传染性没有确诊感染者强。潜伏者和感染者都能使易感染者患病。
- 假设移除者(R)包括痊愈者和死亡者, 此类人群均不会再次感染病毒。移除系数为 γ , 表示单位时间内感染者痊愈后或死亡变成移除者的数量。

3.7.2. 模型构建

- SEIR 传染病模型把人群分为四类, 分别为易感者(S)、感染者(I)、潜伏者(E)和移除者(R)。下列给出其传播示意图(图 3):
- 参数解释(如下表 1)。
- 建立 SEIR 模型的微分方程。
- 图像(如图 4)。

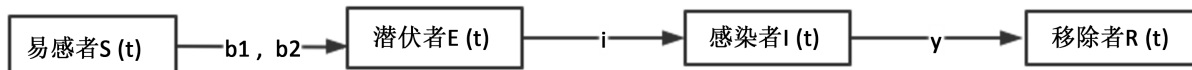


Figure 3. Schematic diagram of the propagation of the SEIR model

图 3. SEIR 模型的传播示意图

Table 1. Parameter table of SEIR model

表 1. SEIR 模型的参数表

符号	意义	本模型取值
S	易感者	$S_0 = 14 \times 10^8$
E	潜伏者	$E_0 = 0$
I	感染者	$I_0 = 1$
R	移除者	$R_0 = 0$
β_1	感染者(I)传染给易感染者的感染系数	$\beta_1 = 20 \times 0.03 = 0.6$
β_2	潜伏者(E)传染给易感染者的感染系数	$\beta_2 = 20 \times 0.01 = 0.6$
i	潜伏者变为感染者的概率	$i = 0.25$
γ	感染者痊愈或死亡的概率	$\gamma = 0.1$

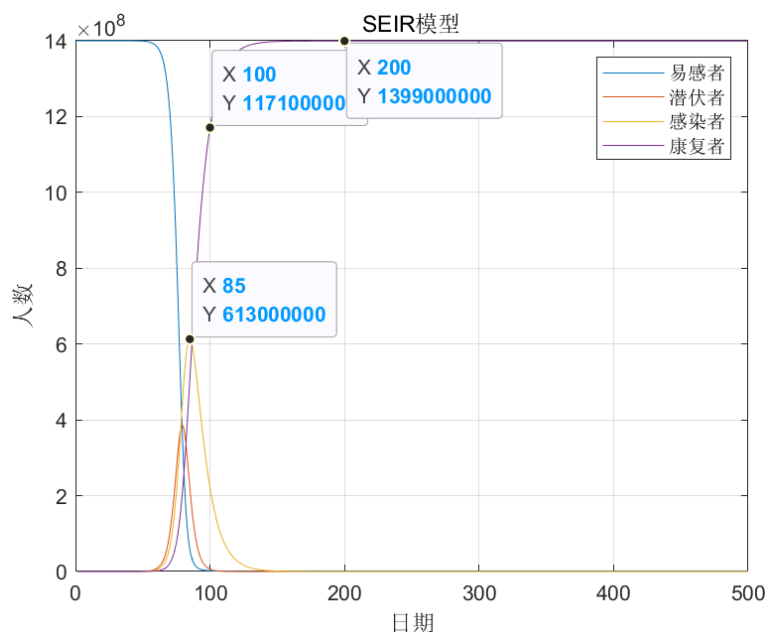


Figure 4. SEIR model image

图 4. SEIR 模型图像

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\frac{\beta_1 SI}{N} - \frac{\beta_2 SE}{N}, \\ \frac{dE}{dt} &= \frac{\beta_1 SI}{N} + \frac{\beta_2 SE}{N} - iE, \\ \frac{dI}{dt} &= iE - \gamma I, \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I. \end{aligned}$$

3.7.3. 模型评价

a) 与经典 SIR 模型相比, 此模型将痊愈者和死亡者归为一类为移除者(R), 且预设了一个潜伏期, 比较贴近现实 COVID-19 病毒的情况。

b) 但此模型未对病毒采取任何防控措施, 任由其无限发展, 明显不符合社会常识。且按此模型进行预计, 全国几乎所有人都会在短时间内感染此病, 且在第 85 天左右, 将会出现同时有 6 亿人感染此病, 与实际情况有极大出入。应在此模型基础上进行改进。

c) 此模型虽然在考虑定量分析时与实际不符, 但如果考虑定性分析的话, 它是一个很好描述我国新冠肺炎疫情的模型, 符合感染人数先以指数型增长, 到达峰值后迎来拐点, 接着逐渐减少, 直到清零。

3.8. 符合 COVID-19 病毒的 SEIR 模型第一次修正

3.8.1. 增加隔离措施[12]

国家十分关注民生健康, 在出现相关不知名肺炎以后, 立马采取了医疗救治措施, 且对确诊病例采取定点医院隔离治疗措施。遵循安全性高的原则, 在集中观察区内严格限制人员出入, 隔离人员不得与外界人员接触, 医护人员做好防护措施, 且每日定时消毒, 于是进入了隔离室的人不具备传染给他人的机会。在集中观察点隔离的确诊病例拥有更好的医疗设施和医护资源, 其痊愈的可能性更大, 死亡的概率更小。

在传染病防治中, “增加隔离措施”是指在空间上将患者与健康人群分开, 以达到阻止疾病传播的目的。因此, 本文从控制传染源、切断传染途径、保护易感人群入手, 在病情爆发严重之际建立方舱医院, 将感染者转移进方舱医院进行统一治疗, 且对感染者流经过的地方进行临时封锁和消毒, 严禁该地区人员流动。方舱医院实施封闭管理, 除必要医护人员外不得允许其他人员进出, 且患者和医护人员以及隔离场所的高风险地方每日定时消毒, 达到消除病毒传播可能性的目的。

3.8.2. 修正后假设

a) 假设增加一类人群为隔离者(Q), 为感染者(I)转入集中观察区的人员。由于我国快速响应此次疫情, 积极面对突发情况, 以民众的安全为第一要义, 故感染者被转入治疗的概率为 $q = 0.9$ 。且从第 21 天开始实施隔离措施。

b) 隔离者(Q)被严格隔离, 故不具备传染性。

c) 此模型把普通的移除者(R)分为痊愈者(R)和死亡者(D), 更能详细研究出进一步降低死亡率以及提高痊愈率的方法。

d) 隔离者(Q)的痊愈率为 $\gamma_1 = 1.2\gamma$ 。感染者(I)的死亡率为 $k = 0.05$, 隔离者的死亡率为 $k_1 = 0.05k$ 。

3.8.3. 修正后的模型

a) 此模型把人群分为六类, 分别是易感者(S)、感染者(I)、潜伏者(E)、移除者(R)、死亡者(D)和隔离者(Q)。下列给出其传播示意图(图 5)。

b) 参数解释(表 2)。

c) 建立微分方程。

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{\beta_1 SI}{N} - \frac{\beta_2 SE}{N},$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\beta_1 SI}{N} + \frac{\beta_2 SE}{N} - iE,$$

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= iE - \gamma I - kI - qI, \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I + \gamma_1 Q, \\ \frac{dD}{dt} &= kI + k_1 Q, \\ \frac{dQ}{dt} &= qI - \gamma_1 Q - k_1 Q. \end{aligned}$$

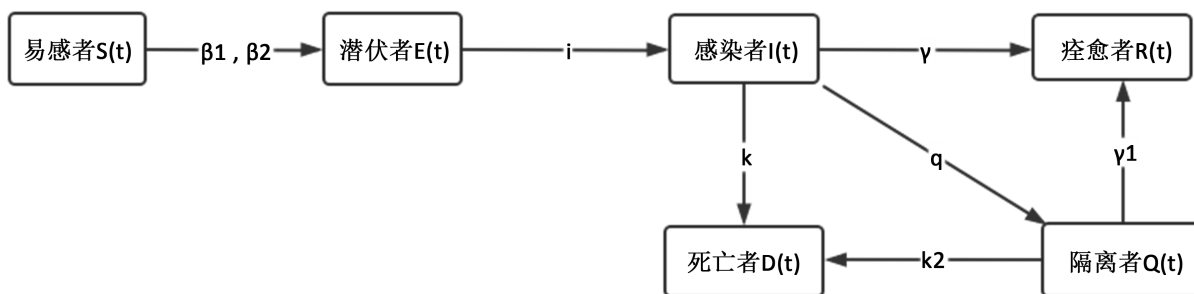


Figure 5. Propagation diagram of the first revised SEIR model
图 5. 第一修正的 SEIR 模型的传播示意图

Table 2. Parameter table of the first revised SEIR model
表 2. 第一修正的 SEIR 模型的参数表

符号	意义	本模型取值
S	易感者	$S_0 = 14 \times 10^8$
E	潜伏者	$E_0 = 0$
I	感染者	$I_0 = 1$
R	痊愈者	$R_0 = 0$
D	死亡者	$D_0 = 0$
Q	隔离者	$Q_0 = 0$
β_1	感染者(I)传染给易感者的感染系数	$\beta_1 = 20 \times 0.03 = 0.6$
β_2	潜伏者(E)传染给易感者的感染系数	$\beta_2 = 20 \times 0.01 = 0.6$
i	潜伏者变为感染者的概率	$i = 0.25$
γ	感染者康复率	$\gamma = 0.1$
γ_1	隔离者康复率	$\gamma_1 = 1.2\gamma$
q	隔离率	$q = 0.9$
k	感染者(I)死亡率	$k = 0.05$
k_1	隔离者(Q)死亡率	$k_1 = 0.05k$

d) 图像(图 6)。

3.8.4. 模型评价

a) 增加了隔离措施以后, 全国患病者的平和点约为 6 亿, 比没有采取任何措施时减少了大于 50% 的感染人口, 最高日存在患者约为 9 千万人, 比没有采取任何措施时减少了 5 亿人。可见在发生疫情以后,

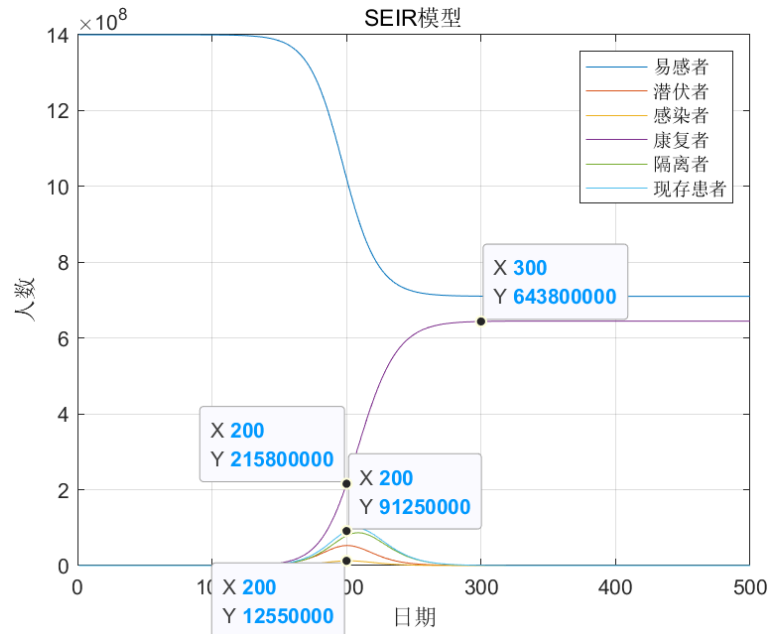


Figure 6. Image of the SEIR model for the first correction
图 6. 第一次修正的 SEIR 模型图像

及时采取隔离措施十分关键，有效保护了人民群众。

b) 此模型虽有改进，但仍与现实情况存在较大误差，仍需继续修正。

3.9. 符合 COVID-19 病毒的 SEIR 模型第二次修正

3.9.1. 增加封城措施、在家自我隔离、呼吁大家必要出门时戴口罩

由于本次疫情自武汉爆发，且以指数增长趋势快速传播，疫情很快便达到刻不容缓的程度快速向全国各地蔓延，只有严格控制传染源，才能保证最广大人民群众的健康。为控制本次疫情，全国各地陆续启动一级响应，武汉市紧急实施封城措施，暂停公共交通运输，对全市加强严管严控，停止举办聚集性活动，所有娱乐场所临时关闭，非必要不得离开本市；控制每家每户出入口以及关闭出入城市路口，并安排工作人员在城市出入口轮流值守；全国其他地区采取非必要不出门，自行在家实行自我隔离措施，必要出门必须佩戴具有防控意义的医用口罩等政策。

3.9.2. 修正后假设

a) 采取封城措施后，感染者与潜伏者每日接触的人数下降，即假设 β_1 和 β_2 均下降 75%。

b) 由于实施在家自我隔离政策，于是增加新的一类人群——自我隔离者(F)，此类人群为未感染者在感染前以速率 $f = 0.3$ 率先采取自我防疫措施，在家隔离，阻断了与传染者接触的途径，假设此类自我隔离者(F)没有得病的风险。

c) 出门佩戴口罩起了重要的防护作用，可以防止唾沫传播，有效降低传播风险，由于居民出门时都正确佩戴好口罩，于是假设 β_1 和 β_2 均下降 50%。

d) 从疫情爆发的第 30 天开始实行自我隔离、佩戴口罩和封城措施，且每人自我隔离 7 天，封城 7 天。

3.9.3. 建模

a) 此模型把人群分为七类，分别是易感者(S)、感染者(I)、潜伏者(E)、移除者(R)、死亡者(D)、隔离

者(Q)和自我隔离者(F)。下列给出其传播示意图(图 7):

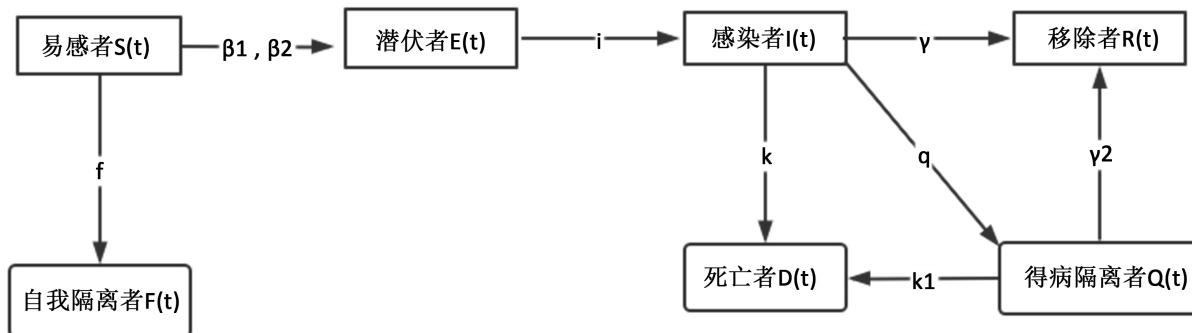


Figure 7. Schematic diagram of the propagation of the second revised SEIR model

图 7. 第二次修正的 SEIR 模型的传播示意图

b) 参数解释(表 3)。

Table 3. Parameter table of the second revised SEIR model

表 3. 第二次修正的 SEIR 模型的参数表

符号	意义	本模型取值
F	自我隔离者	$F_0 = 0$
β_1	感染者(I)传染给易感染者的感染系数	$\beta_1 = 20 \times 0.03 \times 75\% \times 50\% = 0.225$
β_2	潜伏者(E)传染给易感染者的感染系数	$\beta_2 = 20 \times 0.01 \times 75\% \times 50\% = 0.075$
f	自我隔离速率	$f = 0.3$

c) 建立微分方程:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\frac{\beta_1 SI}{N} - \frac{\beta_2 SE}{N} - fS, \\ \frac{dE}{dt} &= \frac{\beta_1 SI}{N} + \frac{\beta_2 SE}{N} - iE, \\ \frac{dI}{dt} &= iE - \gamma I - kI - qI, \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I + \gamma_1 Q, \\ \frac{dD}{dt} &= kI + k_1 Q, \\ \frac{dQ}{dt} &= qI - \gamma_1 Q - k_1 Q. \end{aligned}$$

d) 图像(图 8、图 9)。

3.9.4. 模型评价

a) 从这个模型可以发现, 如果在第三十天开始, 实行封城、在家自我隔离、呼吁大家必要出门时戴口罩措施, 可以在极短时间内有效控制疫情, 最终感染此病毒的总人数不超过一千人。

b) 可从图中看见, 在采取两次防疫措施后, 暴露的感染者人数都迎来下降的拐点, 可以得出实施隔离和封城与自我隔离都能有效减少社会面上传染源的数量, 从而有效控制病毒广泛传播。

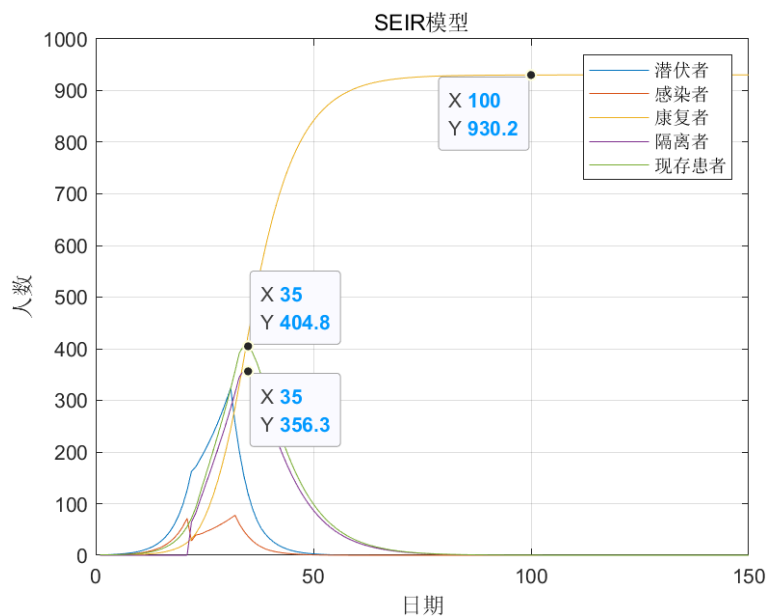


Figure 8. Image of the second revised SEIR model (day 0~day 150)

图 8. 第二次修正的 SEIR 模型的图像(day 0~day 150)

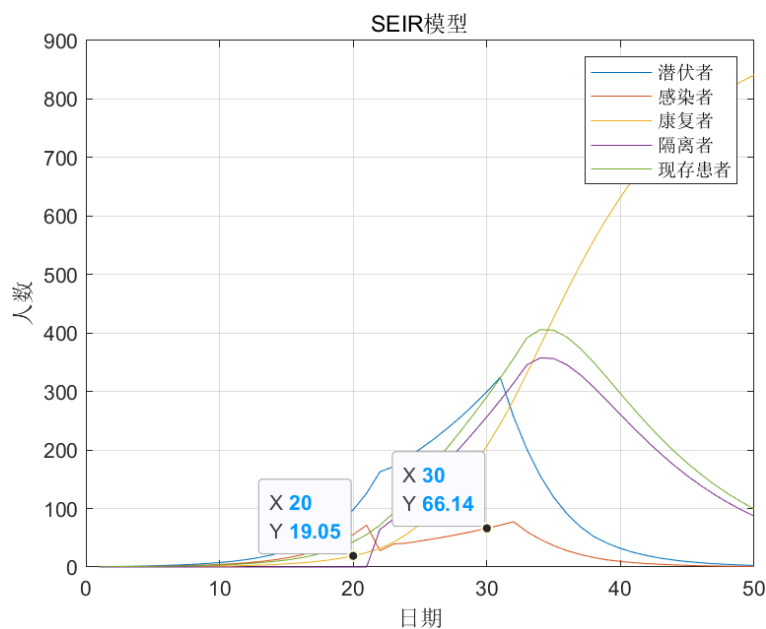


Figure 9. Image of the second revised SEIR model (day 0~day 50)

图 9. 第二次修正的 SEIR 模型的图像(day 0~day 50)

3.10. 符合 COVID-19 病毒的 SEIR 模型第三次修正

3.10.1. 增加疫苗接种[13]

出于国家对本次疫情关系到民生生活的极大重视, 中国疾控中心紧急开展研发疫苗实验, 在多名科学家、医生和护士等多方面一线人员的共同努力下, 终于在此次 COVID-19 病毒爆发的第二年研发出了中国国药新冠疫苗。未感染者(S)接种疫苗后, 人体会产生抗体, 形成免疫功能, 让人体细胞形成相应的免疫记忆。这样, 人体就有了对抗疾病的免疫力。

为有效阻断新冠疫情的传播,我国各地全面开展了新冠疫苗接种工作,从党中央以及各级党委政府开始做好带头作用,坚定不移、全力以赴做好接种疫苗工作,大力展开宣传以及防疫知识普及,切实落实好宣传到户,正面宣传疫苗的有效性和安全性,提高人民群众接种疫苗的意愿,积极、主动接种疫苗。我国首先安排接种人群为在校(园)学生(幼儿)、教师、服务行业从业人员、医疗卫生保健人员以及工作在一线的基层干部等,由于疫苗仍然处于研发初期,对于60岁以上老人和5岁以下儿童,以及部分患有严重疾病的慢性病患者及体弱多病者,则暂不建议接种疫苗。

根据国家卫健委的相关信息报道,截止2022年5月25日,我国已累计报告接种新冠病毒疫苗337,472.6万剂次。并且经过临床测验和接种后的社会观察可知,接种疫苗后的未感染者(S)可以在体内产生新型冠状病毒抗体,有助于预防新型冠状病毒感染,从而降低了感染风险。

3.10.2 模型假设

a) 这是一次修正模型的再次修正,即不实施封城、自我隔离等措施,在第21天开始,医院开始接受感染者进行隔离治疗,且医院退出新冠疫苗。未感染者可自行选择疫苗接种。

b) 此模型增加一个新的仓室,即为接种疫苗后的抗体者(V)。抗体者(V)在接种疫苗后,大大降低了被传染的风险,其感染新冠的概率仅为 $u = 20 \times 0.0005 = 0.01$ 。

c) 从医院开始实施疫苗接种后,易感者人群每天都以速率 $P = 0.005$ 接种疫苗,随即变成抗体者(V)。

3.10.3 构建模型

a) 此模型把人群分为六类,分别是易感者(S)、感染者(I)、潜伏者(E)、移除者(R)、死亡者(D)和隔离者(Q)。下列给出其传播示意图(图10):

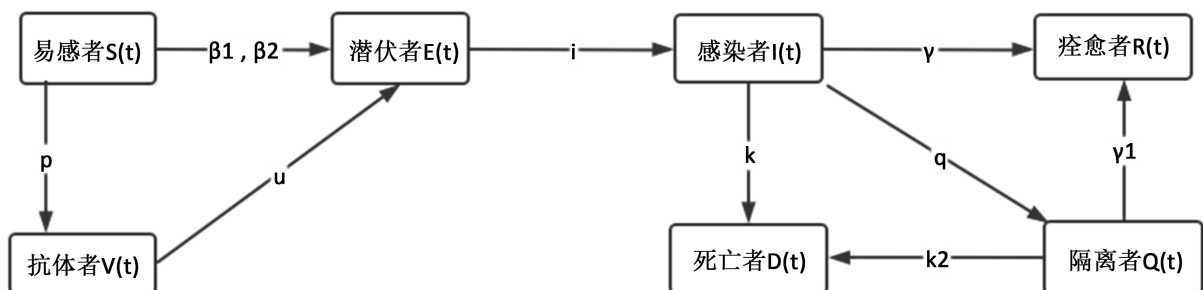


Figure 10. Propagation diagram of the third revised SEIR model

图10. 第三次修正的SEIR模型的传播示意图

b) 参数解释(表4)

Table 4. Parameter table of the third revised SEIR model

表4. 第三次修正的SEIR模型的参数表

符号	意义	本模型取值
D	死亡者	$D_0 = 0$
Q	隔离者	$Q_0 = 0$
V	抗体者	$V_0 = 0$
p	易感者接种疫苗的速率	$P = 0.005$
u	抗体者(V)感染的速率	$u = 20 \times 0.0005 = 0.01$

c) 建立微分方程

前 20 天模型与一次修正模型一样。在第 21 天以后, 模型为:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\frac{\beta_1 SI}{N} - \frac{\beta_2 SE}{N} - pS, \\ \frac{dE}{dt} &= \frac{\beta_1 SI}{N} + \frac{\beta_2 SE}{N} - iE + uV, \\ \frac{dI}{dt} &= iE - \gamma I - kI - qI, \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I + \gamma_1 Q, \\ \frac{dD}{dt} &= kI + k_1 Q, \\ \frac{dQ}{dt} &= qI - \gamma_1 Q - k_1 Q, \\ \frac{dV}{dt} &= pS - uV. \end{aligned}$$

d) 图像(图 11)

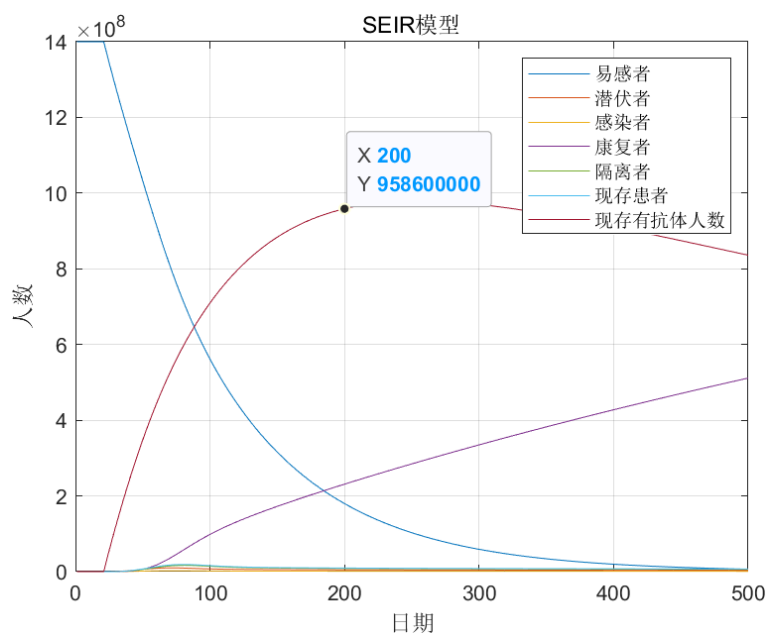


Figure 11. Image of the third revised SEIR model
图 11. 第三次修正的 SEIR 模型的图像

3.10.4. 模型评价

a) 此模型与第一次修正后的模型相比, 易感者数量降低的速率大大提升, 有效快速控制病毒的恶性传播。

b) 由图可见, 在第 200 天的时候, 全国已有将近十亿人具备抗体, 这是一个控制传染病扩散的良好方法。

c) 由此模型与二次修正模型相比, 虽打疫苗的效果远远不及封城、自我隔离的效果, 但从经济利益的角度上看, 封城与自我隔离严重阻碍了经济的发展, 影响了人民的正常生活; 而接种疫苗可以在短时

间内获得不错的效果, 时间成本以及经济成本较低; 但仍需具体情况具体展开进一步分析。

4. 结论及建议

4.1. 结论

在传统的 SEIR 传染病数学模型的基础下, 增加其他因素进行研究, 比如考虑了封城与隔离的 SEIR 传染病数学模型, 虽封城与隔离条件下, 能在较短时间内有效降低感染人数, 但其会严重影响民生经济和生活。其次还研究了增加了抗体者(K)仓室的 SEIR 传染病数学模型, 未感染者可选择接种疫苗, 这样在较短时间内其将会拥有免疫功能, 降低了感染的风险。每种防疫方法都有其利弊, 最终选择哪种方案仍需考虑具体情况进一步选择, 如疫情还处于能控制的程度, 可优先选择接种疫苗政策; 如疫情已到不可控场面, 则需及时采取封城与自我在家隔离政策。

4.2. 不足与展望

现实情况错综复杂, 影响疫情趋势发展的因素很多, 本文没有完全详尽地对传染病模型在实际生活中的应用深入推广, 只能研究部分条件因素, 在原有的传统数学模型基础上, 进行基础的改进分析, 并对前人的研究进行一些详尽的总结和运用。现实情况中还有许多其他因素可加入模型进行研究, 这也激励着我去不断探索和完善传染病数学模型。

虽然如今疫情总体形势已经平缓, 新冠病毒感染处于局部零星散发状态, 此次研究的结论针对本轮新冠病毒缺乏时效性。但本文通过三次修正后的模型与真实数据进行比对, 有效说明增加对应防疫措施必要性, 对日后其他突发疾病的防疫治疗提供了良好的理论基础。

基金项目

国家自然科学基金项目(12001117)、广州市科技计划项目(202102020438)资助。

参考文献

- [1] 赵楠楠, 谢文艺, 魏诚. SARS 传播的数学模型[J]. 大连海事大学学报, 2005(1): 110-112.
- [2] 徐永, 曹治清. SIR 型传染病的预测方法研究[J]. 数理医药学杂志, 2013, 26(1): 10-13.
- [3] 杜瑜. 传染病的 SI 微分方程模型及稳定性分析[J]. 四川教育学院学报, 2007(3): 111-112.
- [4] 邱文珠. 传染病动力学的常微分子方程模型[J]. 河北师范大学学报, 1987(2): 106-109.
- [5] 周宁, 李林. 基于灰色微分方程的传染病预测[J]. 数学理论与应用, 2014, 34(4): 122-128.
- [6] 王跃华, 刘娟, 扈文. 基于人口流动因素的艾滋病传播微分方程模型[J]. 沈阳大学学报(自然科学版), 2020, 32(5): 439-444.
- [7] 张珍珍, 张科星. 基于数据驱动的新冠病毒动力学传播的建模与预测[J]. 信息技术与信息化, 2022(6): 164-167.
- [8] 杨赞, 赵亚男. 基于随机 SEIR 模型的新冠肺炎传播动力学分析[J]. 东北师范大学学报(自然科学版), 2022, 54(4): 37-43.
- [9] 王鸿章, 梁聪刚. 一类用常微分方程描述的带接种的 SEIR 传染病模型稳定性研究[J]. 河北省科学院学报, 2015, 32(2): 1-5.
- [10] 王鸿章. 一类用偏微分方程表述的 SIRS 传染病模型的最优化问题[J]. 平顶山学院学报, 2011, 26(2): 22-25.
- [11] 王榕巍. 随机 SIR 模型及其在美国新冠肺炎疫情中的应用[D]: [硕士学位论文]. 济南: 山东大学, 2022.
- [12] 王芳, 曹连英. 一类具有检疫隔离和疫苗接种的新冠肺炎传染病模型分析[J]. 哈尔滨师范大学学报(自然科学版), 2022, 38(4): 8-15.
- [13] 刘俐. 微分方程最优控制在传染病和种群模型中的两类应用[D]: [硕士学位论文]. 太原: 山西大学, 2018.