Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2023, 12(6), 3039-3054**
Published Online June 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.126305

轮图的强连通性

王　苏，王世英

山西师范大学数学与计算机科学学院，山西 太原

收稿日期：2023年5月28日；录用日期：2023年6月23日；发布日期：2023年6月30日

摘　要

互连网络在大型多处理器系统中扮演着重要的角色，许多多处理器系统都有互连网络作为底层拓扑，网络通常用图来表示。在处理器及其彼此之间的通信链路可能发生故障的系统中，重要的是要考虑网络的容错能力。在此背景下，提出了网络的强连通性。为了实现强连通性，它允许处理器和通信链路同时发生故障。一个图G的强0-好邻连通性也称为图G的强连通性，同时我们把一个图G的强1-好邻连通性也称为图G的强自然连通性。本文在n-维泡型星图BS_n强连通性的基础上研究了当$n \geq 4$时，CW_n的一些强连通性，其中包括CW_n的强0-好邻连通性、强自然连通性以及强自然边连通性等相关性质。

关键词

互连网络，强连通性，连通性，轮图

The Strong Connectivity of the Wheel Network

Su Wang, Shiying Wang

School of Mathematics and Computer Science, Shanxi Normal University, Taiyuan Shanxi

Received: May 28th, 2023; accepted: Jun. 23rd, 2023; published: Jun. 30th, 2023

Abstract

Interconnect network plays an important role in large multiprocessor system, many multiprocessor systems have an interconnect network as the underlying topology, and the network is usually represented by a graph. In systems where the processors and their communication links to each other can fail, it is important to consider the fault tolerance of the network. Under this background, the strong connectivity of network is proposed. To achieve strong connectivity, it allows both the processor and the communication link to fail simultaneously. The strong 0-good-neighbor connectivity of a graph G is also called the strong connectivity of a graph G, and the strong 1-good-neighbor connectivity of a graph G is also called the strong natural connectivity of a graph G. In this paper, based on the strong connectivity property of n-dimensional bubble-sort star graph BS_n, we study some strong con-

文章引用: 王苏, 王世英. 轮图的强连通性[J]. 应用数学进展, 2023, 12(6): 3039-3054.
DOI: 10.12677/aam.2023.126305

nectivity of CW_n for $n \geq 4$, including the strong 0-good-neighbor connectivity, strong natural connectivity and strong natural edge connectivity of CW_n and soon.

Keywords

Interconnection Networks, Strong Connectivity, Connectivity, Wheel Networks

1. 引言

近年来，海量数据处理和复杂问题的解决对多处理器系统的性能要求越来越高。许多多处理器系统都有互连网络(简称网络)作为底层拓扑，因此互连网络这一课题得到了广泛的研究。互连网络的体系结构通常表示为无向图 G，其中顶点表示处理器，边表示连接两个不同处理器的通信链路。设 $G=(V,E)$ 是一个图，其中顶点集为 $V(G)$，边集为 $E(G)$。相应地，我们用 $|V(G)|$ 和 $|E(G)|$ 分别表示图 G 的顶点数和边数。对于一个非空顶点集 $V' \subset V(G)$，G 中 V' 的诱导子图记为 $G[V']$，该图的顶点集是 V'，边集是 G 的所有端点都在 V' 中的边的集合。顶点 x 的度 $d_G(x)$ 表示的是与 x 相连的边的条数。对于图 G 的任意一个顶点 x，$N_G(x)$ 定义为与 x 相邻的所有顶点的集合，并且我们用 $d_G(x)$ 表示 $N_G(x)$ 的基数。如果 $u \in N_G(x)$，则 u 称为 x 的邻点。对于顶点集 $X \subseteq V$，X 的邻域定义为 $N_G(X)=\left\{\bigcup_{x\in X} N_G(x)\right\}-X$。特别地，如果 x 是 G 的一个孤立点，则 $d_G(x)=0$。G 的最大度用 $\Delta(G)$ 表示，G 的最小度用 $\delta(G)$ 表示。对于邻域和度，当没有混淆时，我们通常会省略图的下标。如果对于图 G 的任意一个顶点 v，都有 $d_G(v)=k$，则图 G 称为 k-正则图。

互连网络决定了多处理器系统的性能。在节点及其链路可能发生故障的系统中，考虑网络的容错能力是很重要的。大型网络的容错能力通常衡量的是在网络拓扑中发生一定数量的节点故障和链路故障时，网络能在多大程度上保持其原始性质。在此背景下，提出了网络的强连通性。强连通性是在连通性的基础上衍生出来的产物，因此我们先对连通性进行简单的阐述。令 $G=(V,E)$ 是一个连通图，则图 G 的连通性(边连通性) $\kappa(G)$ ($\lambda(G)$)的一个基本定义是删除后产生不连通的图或平凡图的顶点(边)的最小数目。如果 $G-F$ 是不连通的或者只是一个孤立点，那么 F 是图 G 的一个点割，其中 $F \subseteq V(G)$。对于 $F \subseteq E(G)$，如果 $G-F$ 是不连通的，那么 F 是图 G 的一个边割。取一个故障集 $F \subseteq V$，如果对于 $V \setminus F$ 中的每一个顶点 x，都有 $|N_G(x) \cap (V \setminus F)| \geq g$，则称 F 是一个 g-好邻故障集。使得 $G-F$ 不连通的一个 g-好邻故障集 F 被称为图 G 的一个 g-好邻割。g-好邻割的最小基数称为图 G 的 g-好邻连通度，用 $\kappa^{(g)}(G)$ 表示。如果 $G-F$ 的每个分支至少有 $(g+1)$ 个顶点，则称故障集 $F \subseteq V$ 是一个 g-额外故障集。使得 $G-F$ 不连通的一个 g-额外故障集 F 被称为图 G 的一个 g-额外割。g-额外割的最小基数称为图 G 的 g-额外连通度，用 $\tilde{\kappa}^{(g)}(G)$ 表示。本文主要研究的是当 $n \geq 4$ 时，CW_n 的一些强连通性。在本文中，我们首先得到了 CW_n 的强连通度。在此基础上，同时我们也研究了当条件改变时 $(g=1)$ 的各类连通性的结论。而强连通性的有关概念和性质，我们将在下一部分详细给出。

2. 预备知识

2.1. 轮图

在置换 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$ 中，$i \to p_i$，为了方便用 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 表示置换 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$。每个置换

都可以用不相交的轮换的乘积表示。例如，$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}=(123)$。特别地，$\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ 1 & 2 & \cdots & n\end{pmatrix}=(1)$。两个置换的乘积 $\sigma\tau$ 是先作用于 τ 后作用于 σ 的复合函数，例如，$(12)(13)=(132)$。对于这里未定义的术语和符号，我们则遵循[1]。

下面对轮图 CW_n 的定义进行简单介绍。轮图 CW_n 是一个有 $n!$ 个顶点的图，并且每个顶点都有 $x=x_1x_2\cdots x_n$ 的形式，其中 $1\le x_i\le n$，并且对于不同的 $1\le i,j\le n$，有 $x_i\ne x_j$。我们定义一个运算“$\circ$”，该运算使得 $x=y\circ(i,j)$，例如 $x=x_1x_2\cdots x_i\cdots x_j\cdots x_n$，那么 $y=x_1x_2\cdots x_j\cdots x_i\cdots x_n$，其中 $x,y\in V(CW_n)$。两个不同的顶点 $x,y\in V(CW_n)$，$(x,y)\in E(CW_n)$ 当且仅当 $x=y\circ(1,i)$，且 $2\le i\le n$，或者 $x=y\circ(i,i+1)$，且 $2\le i\le n-1$，或者 $x=y\circ(2,n)$（见[2]）。CW_n 可以划分为 n 个子图 $CW_n^1,CW_n^2,\cdots,CW_n^n$，其中每个 CW_n^i 在标签字符串的最后一个位置都有一个固定的 i，每个 CW_n^i 同构于 BS_{n-1}，且 $1\le i\le n$。注意 CW_n 和 BS_n 都是特殊的 Cayley 图。轮图 CW_4 如图 1 所示。

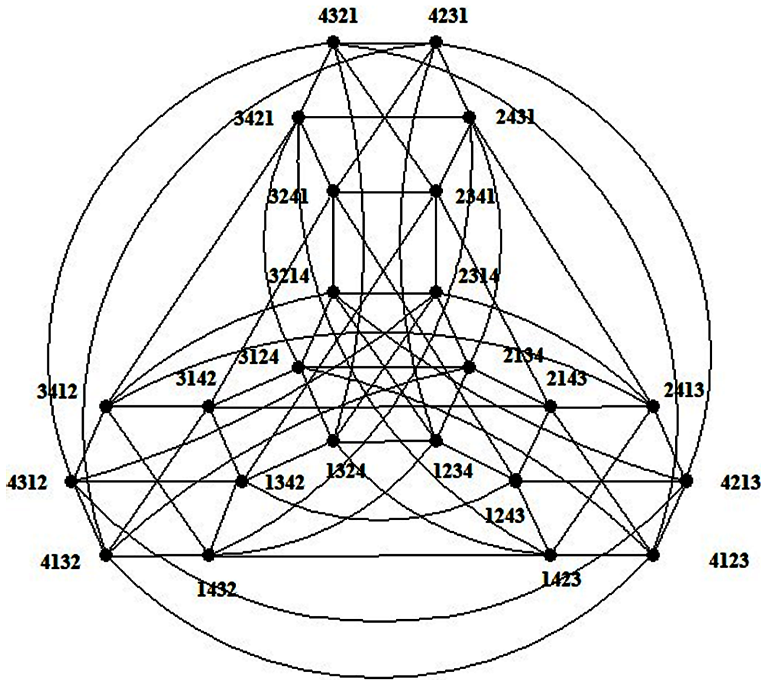

Figure 1. The wheel network CW_4
图 1. 轮图 CW_4

2.2. 定义和性质

定义 2.1 ([3]) 设 $G=(V,E)$ 是一个非平凡连通图，如果 $\delta(G-F)\ge g$，则强故障集 $F\subseteq V\cup E$ 称为强 g-好邻故障集。使得 $G-F$ 不连通的一个强 g-好邻故障集 F 被称为图 G 的一个强 g-好邻割。强 g-好邻割的最小基数称为图 G 的强 g-好邻连通度，用 $\kappa\lambda^{(g)}(G)$ 表示。若图 G 有一个强 g-好邻割，则连通图 G 是强 g-好邻连通的。图 G 的强0-好邻连通度也称做图 G 的强连通度，记为 $\kappa\lambda(G)$，图 G 的强1-好邻连通度也称做图 G 的强自然连通度，记为 $n\kappa\lambda(G)$。若 $F\subseteq E$，则图 G 的强自然连通度称为图 G 的自然边连通度，表示为 $n\lambda(G)$。

假设 $g'\ge g$。如果一个连通图 G 是强 g'-好邻连通的，那么图 G 有一个强 g'-好邻割 F。因此可以得到 $\delta(G-F)\ge g'$，再结合 $g'\ge g$，我们有 $\delta(G-F)\ge g$。因此，图 G 也是强 g-好邻连通的。由此我们有下述定理成立。

定理 2.2 ([3]) 令 $g' \ge g$，且 G 是一个强 g'-好邻连通图。那么 $\kappa\lambda^{(g')}(G) \ge \kappa\lambda^{(g)}(G)$。

定义 2.3 ([3]) 设 $G=(V,E)$ 是一个非平凡连通图，如果 $G-F$ 的每个分支至少有 $g+1$ 个顶点，则强故障集 $F \subseteq V \cup E$ 称为强 g-额外故障集。使得 $G-F$ 不连通的一个强 g-额外故障集 F 被称为图 G 的一个强 g-额外割。强 g-额外割的最小基数称为图 G 的强 g-额外连通度，用 $\tilde{\kappa}\lambda^{(g)}(G)$ 表示。若图 G 有一个强 g-额外割，则连通图 G 是强 g-额外连通的。

假设 $g' \ge g$。如果一个连通图 G 是强 g'-额外连通的，那么图 G 有一个强 g'-额外割 F。因此可以得到 $G-F$ 的每个分支至少有 $g'+1$ 个顶点，再结合 $g' \ge g$，我们有 $G-F$ 的每个分支至少有 $g+1$ 个顶点。因此，图 G 也是强 g-额外连通的。由此我们有下列定理成立。

定理 2.4 ([3]) 令 $g' \ge g$，且 G 是一个强 g'-额外连通图。那么 $\tilde{\kappa}\lambda^{(g')}(G) \ge \tilde{\kappa}\lambda^{(g)}(G)$。

定理 2.5 ([3]) 令 G 是一个强 g-好邻连通图，那么 $\kappa\lambda^{(g)}(G) \ge \tilde{\kappa}\lambda^{(g)}(G)$。

定理 2.6 ([3]) 令 G 是一个强 g-额外连通图，当 $g=0,1$ 时，有 $\kappa\lambda^{(g)}(G) = \tilde{\kappa}\lambda^{(g)}(G)$。

定理 2.7 ([3]) 对于任何整数 $n \ge 2$，$\kappa\lambda(BS_n) = 2n-3$。

定理 2.8 ([4]) 令 $n \ge 3$，令 $F \subseteq E(BS_n)$ 且 $|F| \le 4n-9$。如果 $BS_n - F$ 是不连通的，则 $BS_n - F$ 有两个分支，其中一个是孤立点。

定理 2.9 ([5]) 对于任何整数 $n \ge 4$，泡型星图 BS_n 是紧 $(2n-3)$ 超连通的。

定理 2.10 ([3]) 对于任何整数 $n \ge 2$，泡型星图 BS_n 是紧超 $(2n-3)$ 边连通的。

定理 2.11 ([3]) 对于任何整数 $n \ge 3$，泡型星图 BS_n 是超自然 $(4n-8)$ 边连通的。

定理 2.12 ([3]) 对于任何整数 $n \ge 4$，泡型星图 BS_n 是强紧超 $(2n-3)$ 连通的。

在这一部分中，我们通常假设 $n \ge 4$，并且根据最后一个位置的标签字符串 i 对 CW_n 进行划分，其中 $1 \le i \le n$。定义 $E_{i,j}(CW_n) = E_{CW_n}\left(V\left(CW_n^i\right), V\left(CW_n^j\right)\right)$，其中 $i, j \in [1,n]$ 且 $i \ne j$。对于任意 $x \in V\left(CW_n^i\right)$，我们定义 $x^+ = x \circ (1,n)$，$x^- = x \circ (n-1,n)$，$x^* = x \circ (2,n)$，它们被称为 x 的外部邻域。并且令 $N_x^+ = \{x^+, x^-, x^*\}$。$CW_n$ 有以下性质。

命题 1 ([6]) 对于任何整数 $n \ge 4$，CW_n 是 $(2n-2)$-正则的，是点传递的。

命题 2 ([6]) 对于任何整数 $n \ge 4$，CW_n 是二部图。

命题 3 ([7]) 对于任何整数 $n \ge 4$，CW_n 的围长是 4。

命题 4 ([7] [8]) 1) 对于 $i, j \in [1,n]$ 且 $i \ne j$，$|E_{i,j}(CW_n)| = 3(n-2)!$；

2) 对于 $x, y \in V\left(CW_n^i\right)$，$N_x^+ \cap N_y^+ = 0$；

3) 对于 $x, y \in V(CW_n)$，$|N_{CW_n}(x) \cap N_{CW_n}(y)| \le 3$。

命题 5 ([7]) 令 $x \in V\left(CW_n^i\right)$ 且 $i \in [1,n]$，则 x^+，x^-，x^* 属于三个不同的 $CW_n^l{}'s$，并且 $i \ne l$。

命题 6 ([7] [8]) 若 $x \in V\left(CW_n^{[1,3]}\right)$，那么 $x^+ \in V\left(CW_n^{[4,n]}\right)$，或者 $x^- \in V\left(CW_n^{[4,n]}\right)$，或者 $x^* \in V\left(CW_n^{[4,n]}\right)$。

命题 7 ([4] [9]) 对于 $n \ge 4$，$\kappa(BS_n) = 2n-3$，$\lambda(BS_n) = 2n-3$。

命题 8 ([6] [7]) 对于 $n \ge 4$，$\kappa(CW_n) = 2n-2$，$\lambda(CW_n) = 2n-2$。

命题 9 ([9]) 对于 $n \ge 4$，令 $F \subseteq V(BS_n)$ 且 $|F| \le 4n-9$。如果 $BS_n - F$ 是不连通的，则 $BS_n - F$ 满足以下情形之一：

1) $BS_n - F$ 有两个分支，其中一个分支是孤立点；

2) $BS_n - F$ 有三个分支，其中两个分支是孤立点。

命题 10 ([3]) 对于 $n \ge 3$，令 $F \subseteq V(BS_n) \cup E(BS_n)$ 且 $|F| \le 4n-9$。如果 $BS_n - F$ 是不连通的，则 $BS_n - F$ 满足以下情形之一：

1) $BS_n - F$ 有两个分支，其中一个分支是孤立点；

2) BS_n-F 有三个分支，其中两个分支是孤立点。

命题 11 ([4]) 对于 $n\ge 3$，令 $F\subseteq E(BS_n)$ 且 $|F|\le 6n-14$。如果 BS_n-F 是不连通的，则 BS_n-F 中存在一个连通分支 H 使得 $|V(H)|\ge n!-|F|-2$。

命题 12 ([4]) 对于 $n\ge 3$，令 $F\subseteq E(BS_3)$ 且 $|F|\le 4$。如果 BS_3-F 是不连通的，则 BS_3-F 有两个分支，其中一个分支是一个孤立点或者一条边。

命题 13 ([7]) 对于 $n\ge 5$，n-维轮图的自然连通度是 $4n-6$。

命题 14 ([10]) 对于 $n\ge 4$，令 $F\subseteq V(BS_n)$ 且 $|F|\le 4n-10$。如果 BS_n-F 是不连通的，则 BS_n-F 中存在一个连通分支 H 使得 $|V(H)|\ge n!-|F|-1$。

关于泡型星图 BS_n 和 n-维轮图 CW_n 其他一些性质的研究，见参考文献[11] [12] [13] [14]，而关于本文的一些研究思想等，可参考文献[3] [5]以及[15] [16] [17] [18]等。

3. 轮图的强连通性

定理 3.1 对于任何整数 $n\ge 4$，$\kappa\lambda(CW_n)=2n-2$。

证明：令 F 是 CW_n 的最小强割。若 $F\subseteq V(CW_n)$，根据命题 8，有 $|F|=2n-2$。若 $F\subseteq E(CW_n)$，根据命题 8，有 $|F|=2n-2$。故该定理的结果在上述情况中成立。因此，假设 $n\ge 4$ 且 $F\not\subset V(CW_n)$。令 $F_v=F\cap V(CW_n)$，$F_v\ne\varnothing$，并且令 $F_e=F\cap E(CW_n)$，$F_e\ne\varnothing$。假设 F 是 CW_n 的最小强割，且 $|F|\le 2n-3$。因为 $|F_v|\le 2n-4$，由命题得 CW_n-F_v 是连通的。因为 F_e 是 CW_n-F_v 的最小边割，所以 $CW_n-F_v-F_e$ 有两个分支。令 $|F_e|=i$。因为 $n\ge 4$，所以 $n!-|F_v|\ge n!-(2n-3-i)>2(i+1)$ 成立。因此，在 $CW_n-F_v-F_e$ 中有一个分支 C，使得 $|V(C)|\ge i+1$。在 C 中，令顶点集 V_c 是由在 CW_n-F_v 与 F_e 关联的顶点构成。因此 $|V_c|\le|F_e|=i$。由于 $|V_c|+|F_v|\le|F_v|+|F_e|=|F|\le 2n-3$，故根据命题 8，可得 $CW_n-F_v-F_e$ 是连通的。因此，CW_n-F 是连通的，与 F 是 CW_n 的最小强割矛盾。故 $|F|\ge 2n-2$。

令 $u=(1)$，$v=(12)$，并且令 $F=\{(1,i):3\le i\le n\}\cup\{(i,i+1):2\le i\le n-1\}\cup\{(2,n)\}\cup\{uv\}$，则 F 是 CW_n 的一个强割。因此 $\kappa\lambda(CW_n)\le 2n-2$。结合 $|F|\ge 2n-2$，我们有 $\kappa\lambda(CW_n)=2n-2$。

4. 轮图的强自然连通性

引理 4.1 令 $F\subseteq V(CW_4)$ 且 $|F|\le 9$。如果 CW_4-F 是不连通的，则 CW_4-F 满足以下情形之一：

(1) CW_4-F 有两个分支，其中分支一个是孤立点；

(2) CW_4-F 有三个分支，其中分支两个是孤立点。

证明：根据命题 8，$|F|\ge 6$。令 $F_i=F\cap V(CW_4^i)$，其中 $i\in[1,4]$ 且 $|F_1|\ge|F_2|\ge|F_3|\ge|F_4|$。由 $|F|\le 9$，则 $|F_4|\le 2$，我们首先证明以下声明。

声明 1：对于一些 $i\in[1,3]$，如果 $|F_i|\le 2$，那么 $CW_4\left[V(CW_4^i-F_i)\cup V(CW_4^4-F_4)\right]$ 是连通的。

声明 1 的证明：根据命题 7 和对于 $i\in[1,3]$，$CW_4^i\cong BS_3$，则对于每个 $j\in[i,3]$，$CW_4^j-F_j$ 是连通的。并且 $|E_{p,4}(CW_4)|=6>4\ge|F_p|+|F_4|$，其中 $p\in[i,3]$，这意味着 $E_{p,4}(CW_4-F)\ne\varnothing$。因此，$CW_4\left[V(CW_4^i-F_i)\cup V(CW_4^4-F_4)\right]$ 是连通的。

声明 2： $|F_4|\ge 1$

声明 2 的证明：若 $F_4=\varnothing$，则 $CW_4^4-F_4$ 是连通的。根据命题 6，可以得到 CW_4-F 是连通的，这与假设矛盾。

根据声明 1 和假设，则 $|F_1|\ge 3$。根据声明 2，可得 $|F_2|\ge|F_3|\ge 1$，并且由 $|F|\le 9$，则 $|F_1|\le 6$。

如果$|F_1|=3$，那么$|F_2|+|F_3|+|F_4|\le 6$，并且根据命题5可得，在CW_4-F中有一条边连接$CW_4^1-F_1$和$CW_4\left[V\left(CW_4^2-F_2\right)\cup V\left(CW_4^3-F_3\right)\cup V\left(CW_4^4-F_4\right)\right]$。

a) 如果$|F_2|\le 2$，那么根据声明1，$CW_4\left[V\left(CW_4^2-F_2\right)\cup V\left(CW_4^3-F_3\right)\cup V\left(CW_4^4-F_4\right)\right]$是连通的。因此根据假设可得$CW_4^1-F_1$是不连通的。令$x_1,x_2,x_3$是$CW_4^1-F_1$的三个孤立点，并且令$X=\{x_i:x_i$是$CW_4-F$的孤立点，其中$i\in[1,3]\}$，那么根据命题4(2)，$3|X|\le|F_2|+|F_3|+|F_4|$，即$|X|\le 2$。因此，如果$|X|=1$，那么$CW_4-F$满足(1)；如果$|X|=2$，则$CW_4-F$满足(2)。

b) 如果$|F_2|=3$，那么$|F_3|\le 2$，且$|F_4|=1$。根据声明1，我们可以得到$CW_4\left[V\left(CW_4^3-F_3\right)\cup V\left(CW_4^4-F_4\right)\right]$是连通的。因为$|E_{i,4}(CW_4)|=6>4\ge|F_i|+|F_4|$，其中$i\in[1,2]$，所以$|E_{i,4}(CW_4-F)|\ne 0$。因此，根据假设，对于某些$i\in[1,2]$，$CW_4^i-F_i$是不连通的。不失一般性，我们假设$CW_4^2-F_2$是不连通的。令$y_1,y_2,y_3$是$CW_4^2-F_2$的三个孤立点，并且令$Y=\{y_i:y_i$是$CW_4-F$的孤立点，其中$i\in[1,3]\}$，那么根据命题4(2)，得到$3|Y|\le|F_1\setminus F_2|$，即$|Y|\le 2$。因此，如果$|Y|=1$，那么$CW_4-F$满足(1)；如果$|Y|=2$，则$CW_4-F$满足(2)。如果$CW_4^1-F_1$和$CW_4^2-F_2$都不连通，当$|X|=1$且$|Y|=1$时，$CW_4-F$满足(2)。

如果$|F_1|=4$，那么根据声明2，$|F_2|\le 3$。

a) 如果$|F_2|\le 2$，那么根据声明1，$CW_4\left[V\left(CW_4^2-F_2\right)\cup V\left(CW_4^3-F_3\right)\cup V\left(CW_4^4-F_4\right)\right]$是连 通的。因此，根据假设，$CW_4^1-F_1$是不连通的，并且$|E_{1,4}(CW_4)|=6>5\ge|F_1|+|F_4|$，那么$CW_4-F$满足(1)。

b) 如果$|F_2|=3$，那么$|F_3|=|F_4|=1$。然后根据声明1，可以得到$CW_4\left[V\left(CW_4^3-F_3\right)\cup V\left(CW_4^4-F_4\right)\right]$是连通的。因为$|E_{1,4}(CW_4)|=6>5\ge|F_1|+|F_4|$且$|E_{1,4}(CW_4)|=6>5\ge|F_1|+|F_4|$，所以$|E_{1,4}(CW_4-F)|\ne 0$和$|E_{2,4}(CW_4-F)|\ne 0$。因此，根据假设，对于某些$i\in[1,2]$，$CW_4^i-F_i$是不连通的。不失一般性，我们假设$CW_4^2-F_2$是不连通的。令$y_1,y_2,y_3$是$CW_4^2-F_2$的三个孤立点，并且令$Y=\{y_i:y_i$是$CW_4-F$的孤立点，其中$i\in[1,3]\}$，那么根据命题4(2)，得到$3|Y|\le|F_1\setminus F_2|$，即$|Y|\le 2$。因此，如果$|Y|=1$，那么$CW_4-F$满足(1)；如果$|Y|=2$，则$CW_4-F$满足(2)。如果$CW_4^1-F_1$和$CW_4^2-F_2$都不连通，当$|X|=1$且$|Y|=1$时，$CW_4-F$满足(2)。

如果$5\le|F_1|\le 6$，那么根据声明2，$|F_2|\le 2$。再由声明1，可以得到$CW_4\left[V\left(CW_4^2-F_2\right)\cup V\left(CW_4^3-F_3\right)\cup V\left(CW_4^4-F_4\right)\right]$是连通的。但是根据命题5，当$|F_1|=5$时$CW_4-F$满足(1)；当$|F_1|=6$时，可得$CW_4-F$是连通的，矛盾。

引理4.2 当$n\ge 4$，令$F\subseteq V(CW_n)$且$|F|\le 4n-7$。如果CW_n-F是不连通的，那么CW_n-F满足以下情形之一：

(1) CW_n-F有两个分支，其中一个分支是孤立点；

(2) CW_n-F有三个分支，其中两个分支是孤立点。

证明：根据引理 4.1，当$n=4$时，结果成立。下证当$n\ge 5$时，结果成立。现在我们假设对于任何$F\subseteq V(CW_n)$，且$|F|\le 4n-7$，CW_n-F是不连通的。根据命题 8，$|F|\ge 2n-2$。令$F_i=F\cap V\left(CW_n^i\right)$，$|F_1|\ge|F_2|\ge\cdots\ge|F_n|$，其中$i\in[1,n]$。

声明3：$1\le|F_4|\le 2n-6$

声明3的证明：如果$F_4=\varnothing$，那么$F_5=F_6=\cdots=F_n=\varnothing$，因此，根据命题4(1)，$CW_n\left[V\left(CW_n^4-F_4\right)\cup V\left(CW_n^5-F_5\right)\cup\cdots\cup V\left(CW_n^n-F_n\right)\right]$是连通的，那么根据命题 6，$CW_n-F$是连通的，矛盾。如果$|F_4|\ge 2n-5$，则$|F|\ge 4(2n-5)>4n-7$，这与$|F|\le 4n-7$是矛盾的。

根据声明 3，对于每个 $i\in[4,n]$，$CW_n^i-F_i$ 是连通的，并且 $|F_2|\ge|F_3|\ge|F_4|\ge 1$。因此，由于 $|F|\le 4n-7$，我们可以得到 $|F_1|\le 4n-10$。同时 $1\le|F_3|\le 2n-6$，否则的话 $|F|\ge 3(2n-5)+1>4n-7$，这与 $|F|\le 4n-7$ 是矛盾的。注意，$|E_{i,j}(CW_n-F)|\ge 3(n-2)!-(4n-7)>1$，其中 $i,j\in[1,n]$ 且 $n\ge 5$。因此在每对 $CW_n^i-F_i$ 之间都有一条边连接，其中 $i\in[1,n]$。那么根据 CW_n-F 是不连通的，我们可以得到对于某些 $j\in[1,2]$，$CW_n^j-F_j$ 是不连通的。不失一般性，我们假设 $CW_n^1-F_1$ 是不连通的，并且令 $C_1^1,\cdots,C_1^a$ 是 $CW_n^1-F_1$ 的非平凡分支，$x_1,\cdots,x_b$ 是 $CW_n^1-F_1$ 的孤立点。令 $X=\{x_i:x_i$ 是 CW_n-F 的孤立点，其中 $i\in[1,b]\}$。注意，如果 x_i 是 CW_n-F 的孤立点，那么 $N_{x_i}^+\subseteq F\setminus F_1$。因此根据命题 4(2)，$3|X|\le|F_2|+|F_3|+\cdots+|F_n|$。

如果 $CW_n^2-F_2$ 是连通的，那么 $CW_n\left[V(CW_n^2-F_2)\cup V(CW_n^3-F_3)\cup\cdots\cup V(CW_n^n-F_n)\right]$ 是连通的。

a) 如果 $|F_1|\le 4n-13$，根据命题 9，则 $a=1$ 且 $1\le b\le 2$。另一方面，当 $n\ge 5$ 时，

$\left|\left(N(C_1^1)\right)\cap\left(V(CW_n^2)\cup V(CW_n^3)\cup\cdots\cup V(CW_n^n)\right)\right|\ge 3\left((n-1)!-|F_1|-2\right)-\left(|F|-|F_1|\right)\ge 3(n-1)!-(12n-31)\ge 39$，即在 CW_n-F 中有一条边连接 C_1^1 和 $CW_n\left[V(CW_n^2-F_2)\cup V(CW_n^3-F_3)\cup\cdots\cup V(CW_n^n-F_n)\right]$。因此 CW_n-F 满足(1)或者(2)。

b) 如果 $|F_1|\ge 4n-12$，那么 $|F_2|+|F_3|+\cdots+|F_n|\le 5$，因此，$3|X|\le|F_2|+|F_3|+\cdots+|F_n|\le 5$，即 $|X|\le 1$。由 $\left|N\left(V(C_1^i)\right)\cap\left(V(CW_n^2)\cup V(CW_n^3)\cup\cdots\cup V(CW_n^n)\right)\right|\ge 3|C_1^i|-|F\setminus F_1|\ge 6-5=1$，其中 $1\le a\le i$，即在 CW_n-F 中有一条边连接 C_1^i 和 $CW_n\left[V(CW_n^2-F_2)\cup V(CW_n^3-F_3)\cup\cdots\cup V(CW_n^n-F_n)\right]$。进一步，根据假设，我们得到 $|X|=1$。因此 CW_n-F 满足(1)。

如果 $CW_n^2-F_2$ 是不连通的，根据命题 7，能够得到 $|F_2|\ge 2n-5$，并且根据声明 3，有 $|4n-7|\ge|F|\ge|F_1|+|F_2|+|F_3|+|F_4|\ge 2(2n-5)+1+1$，这意味着 $|F_1|\le 2n-4$ 且 $|F_2|\ge 2n-5$。因此 $a=b=1$（如果 $b=2$，那么当 $n\ge 5$ 时，$|F_1|\ge 2(2n-5)-3=4n-13>2n-4$，矛盾)，并且因为 CW_n 是 $(2n-5)$-正则的，所以 $CW_n^2-F_2$ 包含一个非平凡分支 C_2^1 和一个孤立点 w。注意

$\left|\left(N(C_1^1)\right)\cap\left(V(CW_n^3)\cup V(CW_n^4)\cup\cdots\cup V(CW_n^n)\right)\right|\ge 3\left((n-1)!-|F_1|-1\right)-\left(|F_3|+|F_4|+\cdots+|F_n|\right)>1$，

$\left|\left(N(C_2^1)\right)\cap\left(V(CW_n^3)\cup V(CW_n^4)\cup\cdots\cup V(CW_n^n)\right)\right|\ge 3\left((n-1)!-|F_2|-1\right)-\left(|F_3|+|F_4|+\cdots+|F_n|\right)>1$，即在 CW_n-F 有一条边连接 C_i^1 和 $CW_n\left[V(CW_n^3-F_3)\cup V(CW_n^4-F_4)\cup\cdots\cup V(CW_n^n-F_n)\right]$，其中 $1\le i\le 2$。如果 $(x_1,w)\in E(CW_n)$，则当 $n\ge 5$ 时 $|F|=2(2n-3)=4n-6>4n-7$，矛盾。因此 CW_n-F 满足(2)当 $N_{x_1}^+\subseteq F$ 且 $N_w^+\subseteq F$，否则满足(1)。

引理 4.3 设 $F\subseteq E(CW_4)$，且 $|F|\le 9$。如果 CW_4-F 不连通，则 CW_4-F 有两个分支，其中一个分支是一个孤立点。

证明：因为 CW_4-F 是不连通的，不失一般性，假设 $|F_1|\ge|F_2|\ge|F_3|\ge|F_4|$，令 CW_4 的所有交叉边为 C，令 $F_c=F\cap C$。因为 $n=4$，根据命题 4(1)，$|E_{i,j}(CW_4)|=6$，其中 $i,j\in[1,4]$，$i\ne j$。由 $|F|\le 9$，可得 $|F_4|\le 2$；否则 $|F|\ge 3\times 4=12$，与 $|F|\le 9$ 相矛盾。根据命题 7，CW_4-F 是连通的。设 H 是 CW_4-F 的包含 $CW_4^4-F_4$ 作为一个子集的连通部分。接下来我们考虑如下情况：

情况 1： $|F_1|\le 2$

在这种情形下，根据命题 7，CW_4-F 是连通的，$i\in[1,4]$。现在我们声称 $|E_{1,2}(CW_4)|-F\ne 0$ 或者 $|E_{1,3}(CW_4)|-F\ne 0$；否则的话 $|F|\ge|E_{1,2}(CW_4)|+|E_{1,3}(CW_4)|=12>9$，与 $|F|\le 9$ 相矛盾。不失一般性，我们可以假设 $|E_{1,2}(CW_4)|-F\ne 0$。相似的，可得 $|E_{1,i}(CW_4)|-F\ne 0$，或者 $|E_{2,i}(CW_4)|-F\ne 0$，其中 $i\in[3,4]$。

因此 CW_4-F 是连通的，与假设相矛盾。

情况 2： $|F_1|=3$

假设 $|F_2|\le 2$，则 $|F_c|\le 6$。根据命题 7，$CW_4^i-F_i$ 是连通的，$i\in[2,4]$。我们可以得到 $|E_{2,3}(CW_4)|-F\ne 0$ 或者 $|E_{2,4}(CW_4)|-F\ne 0$；否则 $|F|\ge|E_{2,3}(CW_4)|+|E_{2,4}(CW_4)|=12>9$，与 $|F|\le 9$ 相矛盾。不失一般性，假设 $|E_{2,3}(CW_4)|-F\ne 0$。因此 $CW_4\left[V(CW_4^2)\cup V(CW_4^3)\cup V(CW_4^4)\right]-F$ 是 H 的一个子集。因为 $|F_1|=3$，根据定理 2.8，$CW_4^1-F_1$ 有一个连通分支 H_1，使得 $|V(H_1)|\ge 3!-1$。因为

$|E_{1,3}(CW_4)|-2\left(\left|V(CW_4^1)-V(H_1)\right|\right)-|F_c|\ge 12-2-9>0$，所以 H_1 是 H 的一个子集。因此 $|V(H)|\ge 4!-1$。

假设 $|F_2|=3$，则 $|F_c|\le 3$。如果 $|F_3|\le 2$，根据命题 7，$CW_4^i-F_i$ 是连通的，$i\in[3,4]$。因为，所以 $CW_4\left[V(CW_4^3)\cup V(CW_4^4)\right]-F$ 是 H 的一个子图。由命题 6，对于任意的 $v\in V(CW_4^1)\cup V(CW_4^2)$，存在两个顶点 $v_1,v_2\in\{v^+,v^-,v^*\}$，使得 $v_1\in V(CW_4^3)\cup V(CW_4^4)$ 和 $v_2\in V(CW_4^3)\cup V(CW_4^4)$。因为 $|F_c|\le 3$，所以在 $CW_4\left[V(CW_4^1)\cup V(CW_4^2)\right]$ 中最多有一个顶点不被包含在 H 中。因此 $|V(H)|\ge 4!-1$。如果 $|F_3|=3$，则 $|F_c|=0$。根据命题 6 得，$H=CW_4-F$ 是连通的，与假设矛盾。

情况 3： $|F_1|\ge 4$

假设 $|F_2|\le 2$，则 $|F_c|\le 5$。根据命题 7，$CW_4^i-F_i$ 是连通的，$i\in[2,4]$。因为 $|E_{i,j}(CW_4)|=6>5$，其中 $i,j\in[2,4]$，$i\ne j$，所以 $CW_4\left[V(CW_4^3)\cup V(CW_4^4)\right]-F$ 是 H 的一个子图。已知对于任意的 $u\in V(CW_4^1)$，$\{u^+,u^-,u^*\}\subseteq V(CW_4^2)\cup V(CW_4^3)\cup V(CW_4^4)$。因为 $|F_c|\le 5$，所以在 $V(CW_4^1)$ 中最多有一个顶点不被包含在 H 中。因此 $|V(H)|\ge 4!-1$。

假设 $|F_2|\ge 3$，则 $|F_c|\le 2$，$|F_3|\le 2$。根据命题 7，$CW_4^3-F_3$。因为 $|E_{3,4}(CW_4)-F|\ge 4$，所以 $CW_4\left[V(CW_4^3)\cup V(CW_4^4)\right]-F$ 是 H 的一个子图。根据命题 6，对于任意的 $v\in V(CW_4^1)\cup V(CW_4^2)$，存在两个顶点 $v_1,v_2\in\{v^+,v^-,v^*\}$，使得 $v_1\in V(CW_4^3)\cup V(CW_4^4)$ 和 $v_2\in V(CW_4^3)\cup V(CW_4^4)$。因为 $|F_c|\le 2$，所以在 $CW_4\left[V(CW_4^1)\cup V(CW_4^2)\right]$ 中最多有一个顶点不被包含在 H 中。因此 $|V(H)|\ge 4!-1$。

引理 4.4 设 $F\subseteq E(CW_n)$，且 $|F|\le 4n-7$，$n\ge 4$。如果 CW_n-F 是不连通的，则 CW_n-F 由两个分支组成，其中一个分支是一个孤立点。

证明： 当 $n=4$ 时，根据引理 4.3，已证结论是成立的。下证当 $n\ge 5$ 时，结论成立。假设 $n\ge 5$ 且 CW_n-F 是不连通的。不失一般性，我们可以假设 $|F_1|\ge|F_2|\ge\cdots\ge|F_n|$。令 CW_n 的所有交叉边为 C，令 $F_c=F\cap C$。设 H 是 CW_n-F 的包含 $CW_n^n-F_n$ 作为一个子集的连通部分。接下来我们考虑如下情况：

情况 1： $|F_1|\le 2n-6$

在这种情况下，根据命题 7，$CW_n^i-F_i$ 是连通的，$i\in[1,n]$。因为 $n\ge 5$，所以 $3(n-2)!-(4n-7)>0$，因此根据命题 4(1)可得，$H=CW_n-F$ 是连通的，与假设 CW_n-F 不连通相矛盾。

情况 2： $2n-5\le|F_1|\le 4n-13$

假设 $|F_2|\le 2n-6$，则 $|F_c|\le 2n-2$。根据命题 7，$CW_n^i-F_i$ 是连通的，$i\in[2,n]$。因为 $n\ge 5$，所以 $3(n-2)!-(2n-2)>0$。故，$CW_n\left[V(CW_n^2)\cup V(CW_n^3)\cup\cdots\cup V(CW_n^n)\right]-F$ 是 H 的一个子集。因为 $2n-5\le|F_1|\le 4n-13$，根据命题 11，$CW_n^1-F_1$ 有一个连通分支 H_1，使得 $|V(H_1)|\ge(n-1)!-1$。又因为 $\left|E_{cw_n}\left(V(H_1),V(CW_n^2)\right)-F\right|\ge|E_{1,2}(CW_n)|-\left(\left|V(CW_n^1)\right|-\left|V(H_1)\right|\right)-|F_c|\ge 3(n-2)!-1-(2n-2)>0$，其中

$n\geq 5$，所以 H_1 是 H 的一个子集。因此 $|V(H)|\geq n!-1$。

假设 $|F_2|\geq 2n-5$，则 $|F_c|\leq 3$，$|F_3|\leq 3<2n-6$，$n\geq 5$。根据命题 7，$CW_n^i-F_i$ 是连通的，$i\in[3,n]$。因为 $3(n-2)!>3$，其中 $n\geq 5$，$CW_n\left[V(CW_n^3)\cup V(CW_n^4)\cup\cdots\cup V(CW_n^n)\right]-F$ 是 H 的一个子集。由命题 6，对于任意的 $v\in V(CW_4^1)\cup V(CW_4^2)$，存在两个顶点 $v_1,v_2\in\{v^+,v^-,v^*\}$，使得 $v_1\in V(CW_n^3)\cup V(CW_4^4)\cup\cdots\cup V(CW_n^n)$ 和 $v_2\in V(CW_n^3)\cup V(CW_4^4)\cup\cdots\cup V(CW_n^n)$。又 $|F_c|\leq 3$，所以在 $CW_n\left[V(CW_n^1)\cup V(CW_n^2)\right]$ 中最多有一个顶点不被包含在 H 中。因此 $|V(H)|\geq n!-1$。

情况 3： $4n-12\leq|F_1|\leq 4n-7$

在这种情况中，可得 $|F_c|\leq 5$，$|F_3|\leq 2<2n-6$，$n\geq 5$，根据命题 7，$CW_n^i-F_i$ 是连通的，$i\in[3,n]$。因为 $3(n-2)!>5$，其中 $n\geq 5$，$V(CW_n^2)\cup V(CW_n^3)\cup\cdots\cup V(CW_n^n)$ 是 H 的一个子集。

假设 $|F_2|\leq 2n-6$，则 $CW_n\left[V(CW_n^2)\cup V(CW_n^3)\cup\cdots\cup V(CW_n^n)\right]-F$ 是 H 的一个子集。已知对于任意的 $u\in V(CW_n^1)$，$\{u^+,u^-,u^*\}\subseteq V(CW_n^2)\cup V(CW_n^3)\cup\cdots\cup V(CW_n^n)$。又因为 $|F_c|\leq 5$，所以在 $V(CW_n^1)$ 中最多有一个顶点不被包含在 H 中。因此 $|V(H)|\geq n!-1$。

假设 $|F_2|\geq 2n-5$。因为 $n\geq 5$，所以 $|F_2|\geq 5$，则 $|F_c|=0$。根据命题 6，$H=CW_n-F$ 是连通的，与假设相矛盾。

引理 4.5 对于 $n\geq 4$，令 $F\subseteq V(CW_n)\cup E(CW_n)$ 且 $|F|\leq 4n-7$。如果 CW_n-F 是不连通的，则 CW_n-F 满足以下情形之一：

(1) CW_n-F 有两个分支，其中一个分支是孤立点；

(2) CW_n-F 有三个分支，其中两个分支是孤立点。

证明： 当 $n\geq 4$ 时，若 $F\subseteq V(CW_n)$ 且 $|F|\leq 4n-7$，根据引理 4.2 得，在该情况下定理成立。若 $F\subseteq E(CW_n)$ 且 $|F|\leq 4n-7$，根据引理 4.4 得，结论成立。因此，假设 $F\subseteq V(CW_n)\cup E(CW_n)$ 且 $|F|\leq 4n-7$，其中 $F\cap V(CW_n)\neq\varnothing$，$F\cap E(CW_n)\neq\varnothing$。令 $F_i=F\cap V(CW_n^i)$，$F_i^e=F\cap E(CW_n^i)$，其中 $i\in[1,n]$，且 $|F_1\cup F_1^e|\geq|F_2\cup F_2^e|\geq\cdots\geq|F_n\cup F_n^e|$。设 C 是 CW_n 中的所有交叉边构成的集合，令 $F_c=F\cap C$。因此 $1\leq|F_1|+|F_2|+\cdots+|F_n|\leq 4n-8$，$1\leq|F_1^e|+|F_2^e|+\cdots+|F_n^e|\leq 4n-8$。当 $n=4$ 时，如果 $|F|\leq 5$，根据命题 8，那么 CW_4-F 是连通的。当 $|F|=5$ 时，由定理 3.1 得，CW_4-F 有两个分支，其中一个分支是孤立点。因此，假设 $7\leq|F|\leq 9$，CW_4-F 是不连通的。我们考虑以下情况：

情况 1： $|F_1|=7$

在这种情况中，$CW_4^i\cong BS_3$，$BS_3\cong K_{3,3}$，其中 $i\in[1,4]$。

情况 1.1： $5\leq|F_1|\leq 6$

在该情形下，$5\leq|F_1\cup F_1^e|\leq 7$，则 $0\leq|F_2\cup F_2^e|+|F_3\cup F_3^e|+|F_4\cup F_4^e|+|F_c|\leq 2$。故，根据命题 4(1)和命题 7 得 CW_4-F 是连通的，矛盾。

情况 1.2： $|F_1|=4$

情况 1.2.1： $5\leq|F_1\cup F_1^e|\leq 7$

在该情形下，$0\leq|F_2\cup F_2^e|+|F_3\cup F_3^e|+|F_4\cup F_4^e|+|F_c|\leq 2$。根据命题 4(1)和命题 7 得，$CW_4\left[V(CW_4^2-F_2-F_2^e)\cup V(CW_4^3-F_3-F_3^e)\cup V(CW_4^4-F_4-F_4^e)\right]-F_c$ 是连通的，根据命题 5 得，CW_4-F 是连通的，矛盾。

情况 1.2.2： $|F_1\cup F_1^e|=4$

在本情况中，$\left|F_2\cup F_2^e\right|+\left|F_3\cup F_3^e\right|+\left|F_4\cup F_4^e\right|+\left|F_c\right|=3$，而且$\left|V\left(CW_4^1-F_1-F_1^e\right)\right|=2$。

情况 1.2.2.1： $\left|F_2\cup F_2^e\right|=3$

根据$\left|F_1\cup F_1^e\right|=4$得，$\left|F_3\cup F_3^e\right|+\left|F_4\cup F_4^e\right|+\left|F_c\right|=0$。故根据命题 4(1)、$CW_4^i\cong BS_3$ 和命题 7 得，$CW_4\left[V\left(CW_4^3-F_3-F_3^e\right)\cup V\left(CW_4^4-F_4-F_4^e\right)\right]-F_c$ 是连通的。再由命题 5，我们可以得 $CW_4\left[V\left(CW_4^1-F_1-F_1^e\right)\cup V\left(CW_4^3-F_3-F_3^e\right)\cup V\left(CW_4^4-F_4-F_4^e\right)\right]-F_c$，$CW_4\left[V\left(CW_4^2-F_2-F_2^e\right)\cup V\left(CW_4^3-F_3-F_3^e\right)\cup V\left(CW_4^4-F_4-F_4^e\right)\right]-F_c$ 都是连通的。因此，CW_4-F 是连通的，矛盾。

情况 1.2.2.2： $\left|F_j\cup F_j^e\right|\le 2$，$j\in[2,4]$

由命题 4(1)、7 得，$CW_4\left[V\left(CW_4^2-F_2-F_2^e\right)\cup V\left(CW_4^3-F_3-F_3^e\right)\cup V\left(CW_4^4-F_4-F_4^e\right)\right]-F_c$ 是连通的。因为$\left|F_2\cup F_2^e\right|+\left|F_3\cup F_3^e\right|+\left|F_4\cup F_4^e\right|+\left|F_c\right|=3$，所以由命题 4(2)和命题 5 可知，$CW_4-F$ 是连通的(矛盾)或CW_4-F 有两个分支，其中一个分支是孤立点。

情况 1.3： $\left|F_1\right|=3$

情况 1.3.1： $5\le\left|F_1\cup F_1^e\right|\le 7$

通情况 1.2.1 的讨论方式类似，可得CW_4-F 是连通的，矛盾。

情况 1.3.2： $\left|F_1\cup F_1^e\right|=4$

本情况的讨论方法与情况 1.2.2 的讨论方法一致，同样可得CW_4-F 是连通的(矛盾)或CW_4-F 有两个分支，其中一个分支是孤立点。

情况 1.3.3： $\left|F_1\cup F_1^e\right|=3$

在这种情况中，$\left|F_2\cup F_2^e\right|+\left|F_3\cup F_3^e\right|+\left|F_4\cup F_4^e\right|+\left|F_c\right|=4$，且$\left|V\left(CW_4^1-F_1-F_1^e\right)\right|=3$。

情况 1.3.3.1： $\left|F_2\cup F_2^e\right|=3$

根据$\left|F_1\cup F_1^e\right|=3$得，$\left|F_3\cup F_3^e\right|+\left|F_4\cup F_4^e\right|+\left|F_c\right|=1$。故根据命题 4(1)、$CW_4^i\cong BS_3$ 和命题 7 得，$CW_4\left[V\left(CW_4^3-F_3-F_3^e\right)\cup V\left(CW_4^4-F_4-F_4^e\right)\right]-F_c$ 是连通的。再由命题 5，我们可以得到 $CW_4\left[V\left(CW_4^1-F_1-F_1^e\right)\cup V\left(CW_4^3-F_3-F_3^e\right)\cup V\left(CW_4^4-F_4-F_4^e\right)\right]-F_c$，$CW_4\left[V\left(CW_4^2-F_2-F_2^e\right)\cup V\left(CW_4^3-F_3-F_3^e\right)\cup V\left(CW_4^4-F_4-F_4^e\right)\right]-F_c$ 都是连通的。因此，CW_4-F 是连通的，矛盾。

情况 1.3.3.2： $\left|F_j\cup F_j^e\right|\le 2$，$j\in[2,4]$

由命题 4(1)、7 得，$CW_4\left[V\left(CW_4^2-F_2-F_2^e\right)\cup V\left(CW_4^3-F_3-F_3^e\right)\cup V\left(CW_4^4-F_4-F_4^e\right)\right]-F_c$ 是连通的。由于$CW_4^i\cong BS_3$，$BS_3\cong K_{3,3}$，如果$CW_4^1-F_1$ 是不连通的，那么$CW_4^1-F_1$ 是三个孤立点。由于$\left|F_2\cup F_2^e\right|+\left|F_3\cup F_3^e\right|+\left|F_4\cup F_4^e\right|+\left|F_c\right|=4$，则$CW_4-F$ 是连通的(矛盾)或CW_4-F 有两个分支，其中一个分支是孤立点。

情况 1.4： $1\le\left|F_1\right|\le 2$

情况 1.4.1： $5\le\left|F_1\cup F_1^e\right|\le 7$

通情况 1.2.1 的讨论方式类似，可得CW_4-F 是连通的，矛盾。

情况 1.4.2： $\left|F_1\cup F_1^e\right|=4$

本情况的讨论方法与情况 1.2.2 的讨论方法一致，同样可得CW_4-F 是连通的(矛盾)或CW_4-F 有两个分支，其中一个分支是孤立点。

情况 1.4.3： $|F_1 \cup F_1^e| = 3$

本情况可参考 1.3.3 的讨论方法，可得 $CW_4 - F$ 是连通的(矛盾)或 $CW_4 - F$ 有两个分支，其中一个分支是孤立点。

情况 1.4.4： $1 \le |F_1 \cup F_1^e| \le 2$

由于 $2 \ge |F_1 \cup F_1^e| \ge |F_2 \cup F_2^e| \ge |F_3 \cup F_3^e| \ge |F_4 \cup F_4^e| \ge 1$。因此，根据命题 4(1)、命题 6 和命题 7 得，$CW_4 - F$ 是连通的，矛盾。

情况 2： $8 \le |F| \le 9$

情况 2.1： $|F_1| = 6$

情况 2.1.1： $6 \le |F_1 \cup F_1^e| \le 9$

由 $8 \le |F| \le 9$ 得，$0 \le |F_2 \cup F_2^e| + |F_3 \cup F_3^e| + |F_4 \cup F_4^e| + |F_c| \le 3$，故 $0 \le |F_3 \cup F_3^e| + |F_4 \cup F_4^e| + |F_c| \le 2$。根据命题 4(1)和命题 7 得，$CW_4\left[V\left(CW_4^3 - F_3 - F_3^e\right) \cup V\left(CW_4^4 - F_4 - F_4^e\right)\right] - F_c$ 是连通的。再根据命题 5 和 $|F_1| = 6$ 可以得到 $CW_4\left[V\left(CW_4^2 - F_2 - F_2^e\right) \cup V\left(CW_4^3 - F_3 - F_3^e\right) \cup V\left(CW_4^4 - F_4 - F_4^e\right)\right] - F_c$ 是连通的，即 $CW_4 - F$ 是连通的，矛盾。

情况 2.2： $|F_1| = 5$

情况 2.2.1： $7 \le |F_1 \cup F_1^e| \le 9$

由于 $7 \le |F_1 \cup F_1^e| \le 9$，故 $0 \le |F_2 \cup F_2^e| + |F_3 \cup F_3^e| + |F_4 \cup F_4^e| + |F_c| \le 2$。根据命题 4(1)和命题 7 得，$CW_4\left[V\left(CW_4^2 - F_2 - F_2^e\right) \cup V\left(CW_4^3 - F_3 - F_3^e\right) \cup V\left(CW_4^4 - F_4 - F_4^e\right)\right] - F_c$ 是连通的。再根据命题 4(2)和命题 5，可以得到 $CW_4 - F$ 是连通的，矛盾。

情况 2.2.2： $|F_1 \cup F_1^e| = 6$

在这种情况中，$2 \le |F_2 \cup F_2^e| + |F_3 \cup F_3^e| + |F_4 \cup F_4^e| + |F_c| \le 3$。

如果 $|F_2 \cup F_2^e| + |F_3 \cup F_3^e| + |F_4 \cup F_4^e| + |F_c| = 2$，根据命题 7 得，$CW_4^i - F_i$ 是连通的，$i \in [2,4]$。根据命题 4(1)，可以得到 $CW_4\left[V\left(CW_4^2 - F_2 - F_2^e\right) \cup V\left(CW_4^3 - F_3 - F_3^e\right) \cup V\left(CW_4^4 - F_4 - F_4^e\right)\right] - F_c$ 是连通的。由于 $|F_c| \le 2$，根据命题 4(2)和命题 5，可以得到 $CW_4 - F$ 是连通的，矛盾。

如果 $|F_2 \cup F_2^e| + |F_3 \cup F_3^e| + |F_4 \cup F_4^e| + |F_c| = 3$ 且 $|F_2 \cup F_2^e| = 3$，则 $|F_3 \cup F_3^e| = |F_4 \cup F_4^e| = 0$ 且 $|F_c| = 0$。因此，根据命题 4(1)和命题 7，有 $CW_4\left[V\left(CW_4^3 - F_3 - F_3^e\right) \cup V\left(CW_4^4 - F_4 - F_4^e\right)\right] - F_c$ 是连通的。由于 $|F_c| = 0$，那么根据命题 4(2)和命题 5，可得 $CW_4 - F$ 是连通的，矛盾。若 $|F_i \cup F_i^e| \le 2$，其中 $i \in [2,4]$。由命题 4(1)、7 得，$CW_4\left[V\left(CW_4^2 - F_2 - F_2^e\right) \cup V\left(CW_4^3 - F_3 - F_3^e\right) \cup V\left(CW_4^4 - F_4 - F_4^e\right)\right] - F_c$ 是连通的。由于 $|F_c| \le 3$，那么 $CW_4 - F$ 是连通的(矛盾)或 $CW_4 - F$ 有两个分支，其中一个分支是孤立点。

情况 2.2.3： $|F_1 \cup F_1^e| = 5$

在这种情况中，$3 \le |F_2 \cup F_2^e| + |F_3 \cup F_3^e| + |F_4 \cup F_4^e| + |F_c| \le 4$。

情况 2.2.3.1： $3 \le |F_2 \cup F_2^e| \le 4$

根据 $8 \le |F| \le 9$，得 $|F_3 \cup F_3^e| + |F_4 \cup F_4^e| + |F_c| = 0$。因此，根据命题 4(1)、$CW_4^i \cong BS_3$ 和命题 7，有 $CW_4\left[V\left(CW_4^3 - F_3 - F_3^e\right) \cup V\left(CW_4^4 - F_4 - F_4^e\right)\right] - F_c$ 是连通的。由于 $|F_c| = 0$，那么根据命题 4(2)和命题 5，可得 $CW_4 - F$ 是连通的，矛盾。

情况 2.2.3.2： $|F_i \cup F_i^e| \le 2$，$i \in [2,4]$

由命题 4(1)和命题 7 得，$CW_4\left[V\left(CW_4^2-F_2-F_2^e\right)\cup V\left(CW_4^3-F_3-F_3^e\right)\cup V\left(CW_4^4-F_4-F_4^e\right)\right]-F_c$ 是连通的。且$\left|V\left(CW_4^1-F_1-F_1^e\right)\right|=2$。由于$3\le\left|F_2\cup F_2^e\right|+\left|F_3\cup F_3^e\right|+\left|F_4\cup F_4^e\right|+\left|F_c\right|\le 4$，故$CW_4-F$ 是连通的(矛盾)或CW_4-F 有两个分支，其中一个分支是孤立点。

情况 2.3： $\left|F_1\right|=4$

情况 2.3.1： $7\le\left|F_1\cup F_1^e\right|\le 9$

同情况 2.2.1 的讨论方式一样，可得CW_4-F 是连通的，矛盾。

情况 2.3.2： $\left|F_1\cup F_1^e\right|=6$

同情况 2.2.2 的讨论方式一样，可得CW_4-F 是连通的(矛盾)或CW_4-F 有两个分支，其中一个分支是孤立点。

情况 2.3.3： $4\le\left|F_1\cup F_1^e\right|\le 5$

在这种情况中，$3\le\left|F_2\cup F_2^e\right|+\left|F_3\cup F_3^e\right|+\left|F_4\cup F_4^e\right|+\left|F_c\right|\le 5$。若$3\le\left|F_2\cup F_2^e\right|\le 4$，根据$8\le|F|\le 9$，得$\left|F_3\cup F_3^e\right|+\left|F_4\cup F_4^e\right|+\left|F_c\right|\le 1$。根据命题 4(1)、$CW_4^i\cong BS_3$ 和命题 7，我们可以得到 $CW_4\left[V\left(CW_4^3-F_3-F_3^e\right)\cup V\left(CW_4^4-F_4-F_4^e\right)\right]-F_c$ 是连通的。再根据命题 4(2)和命题 5，我们可以得到 $CW_4\left[V\left(CW_4^2-F_2-F_2^e\right)\cup V\left(CW_4^3-F_3-F_3^e\right)\cup V\left(CW_4^4-F_4-F_4^e\right)\right]-F_c$ 是连通的。由于$\left|F_c\right|\le 1$，故通过命题 4(1)、命题 4(2)和命题 5，我们有CW_4-F 是连通的，矛盾。若$\left|F_i\cup F_i^e\right|\le 2$，其中$i\in[2,4]$。由命题 4(1)、7 得，$CW_4\left[V\left(CW_4^2-F_2-F_2^e\right)\cup V\left(CW_4^3-F_3-F_3^e\right)\cup V\left(CW_4^4-F_4-F_4^e\right)\right]-F_c$ 是连通的。由于$3\le\left|F_c\right|\le 5$，那么$CW_4-F$ 是连通的(矛盾)或CW_4-F 有两个分支，其中一个分支是孤立点。

情况 2.4： $\left|F_1\right|=3$

情况 2.4.1： $7\le\left|F_1\cup F_1^e\right|\le 9$

同情况 2.2.1 的讨论方式一样，可得CW_4-F 是连通的，矛盾。

情况 2.4.2： $\left|F_1\cup F_1^e\right|=6$

同情况 2.2.2 的讨论方式一样，可得CW_4-F 是连通的(矛盾)或CW_4-F 有两个分支，其中一个分支是孤立点。

情况 2.4.3： $4\le\left|F_1\cup F_1^e\right|\le 5$

同情况 2.3.3 的讨论方式一样，可得CW_4-F 是连通的(矛盾)或CW_4-F 有两个分支，其中一个分支是孤立点。

情况 2.4.4： $\left|F_1\cup F_1^e\right|=3$

在这种情况中，$5\le\left|F_2\cup F_2^e\right|+\left|F_3\cup F_3^e\right|+\left|F_4\cup F_4^e\right|+\left|F_c\right|\le 6$

情况 2.4.4.1： $\left|F_2\cup F_2^e\right|=3$

根据$8\le|F|\le 9$，得$2\le\left|F_3\cup F_3^e\right|+\left|F_4\cup F_4^e\right|+\left|F_c\right|\le 3$。若$\left|F_3\cup F_3^e\right|=3$，则$\left|F_4\cup F_4^e\right|+\left|F_c\right|=0$。由$CW_4^i\cong BS_3$ 和命题 7，得$CW_4\left[V\left(CW_4^4-F_4-F_4^e\right)\right]-F_c$ 是连通的。由于$3(n-2)!>0=\left|F_c\right|$，故可得 $CW_4\left[V\left(CW_4^3-F_3-F_3^e\right)\cup V\left(CW_4^4-F_4-F_4^e\right)\right]-F_c$，$CW_4\left[V\left(CW_4^2-F_2-F_2^e\right)\cup V\left(CW_4^4-F_4-F_4^e\right)\right]-F_c$ 是连通的。同理，$CW_4\left[V\left(CW_4^1-F_1-F_1^e\right)\cup V\left(CW_4^4-F_4-F_4^e\right)\right]-F_c$ 是连通的，即CW_4-F 是连通的，矛盾。若$\left|F_i\cup F_i^e\right|\le 2$，其中$i\in[3,4]$。根据命题 4(1)、$CW_4^i\cong BS_3$ 和命题 7，我们可以得到 $CW_4\left[V\left(CW_4^3-F_3-F_3^e\right)\cup V\left(CW_4^4-F_4-F_4^e\right)\right]-F_c$ 是连通的。由$2\le\left|F_c\right|\le 3$ 和命题 4(1)我们可以得到，

$CW_4\left[V\left(CW_4^1-F_1-F_1^e\right)\cup V\left(CW_4^3-F_3-F_3^e\right)\cup V\left(CW_4^4-F_4-F_4^e\right)\right]-F_c$，

$CW_4\left[V\left(CW_4^2-F_2-F_2^e\right)\cup V\left(CW_4^3-F_3-F_3^e\right)\cup V\left(CW_4^4-F_4-F_4^e\right)\right]-F_c$ 都是连通的。因为 $\left|F_j\cup F_j^e\right|=3$，$j\in[1,2]$，所以 $CW_4^1-F_1$ 是连通的或者 $CW_4^1-F_1$ 是三个孤立点。$CW_4^2-F_2$ 是连通的或者 $CW_4^2-F_2$ 是三个孤立点或者 $CW_4^2-F_2$ 有两个分支，其中一个分支是孤立点。如果 $CW_4^j-F_j$ 是连通的，那么根据命题 4(1)，我们有 CW_4-F 是连通的，矛盾。如果 $CW_4^1-F_1$ 是三个孤立点且 $CW_4^2-F_2$ 是三个孤立点或者 $CW_4^2-F_2$ 有两个分支，其中一个分支是孤立点，根据 $2\le\left|F_3\cup F_3^e\right|+\left|F_4\cup F_4^e\right|+\left|F_c\right|\le 3$，则 CW_4-F 是连通的(矛盾)或 CW_4-F 有两个分支，其中一个分支是孤立点或 CW_4-F 有三个分支，其中两个分支是孤立点。如果 $CW_4^1-F_1$ 是连通的，$CW_4^2-F_2$ 是不连通的，那么根据命题 4(1)、命题 4(2)和命题 5 以及 $2\le\left|F_c\right|\le 3$，有 CW_4-F 是连通的(矛盾)或 CW_4-F 有两个分支，其中一个分支是孤立点。

情况 2.4.4.2： $\left|F_i\cup F_i^e\right|\le 2$，$i\in[2,4]$

由命题 4(1)和命题 7 得，$CW_4\left[V\left(CW_4^2-F_2-F_2^e\right)\cup V\left(CW_4^3-F_3-F_3^e\right)\cup V\left(CW_4^4-F_4-F_4^e\right)\right]-F_c$ 是连通的。因为 $CW_4^i\cong BS_3$，故 $CW_4^1-F_1$ 是连通的或者 $CW_4^1-F_1$ 是三个孤立点。如果 $CW_4^1-F_1$ 是连通的，根据命题 4(1)，有 CW_4-F 是连通的，矛盾。如果 $CW_4^1-F_1$ 是三个孤立点，且 $5\le\left|F_c\right|\le 6$，那么根据命题 4(2)和命题 5，可得 CW_4-F 有两个分支，其中一个分支是孤立点或者 CW_4-F 有 三个分支，其中两个分支是孤立点。

情况 2.5： $1\le\left|F_1\right|\le 2$

情况 2.5.1： $7\le\left|F_1\cup F_1^e\right|\le 9$

同情况 2.2.1 的讨论方式一样，可得 CW_4-F 是连通的，矛盾。

情况 2.5.2： $5\le\left|F_1\cup F_1^e\right|\le 6$

同情况 2.2.2 的讨论方式一样，可得 CW_4-F 是连通的(矛盾)或 CW_4-F 有两个分支，其中一个分支是孤立点。

情况 2.5.3： $\left|F_1\cup F_1^e\right|=4$

本情况中，讨论方法类似于情况 2.2.3，可得 CW_4-F 是连通的(矛盾)或 CW_4-F 有两个分支，其中一个分支是孤立点。

情况 2.5.4： $\left|F_1\cup F_1^e\right|=3$

本情况的讨论方法类似于情况 2.4.4.，可得 CW_4-F 是连通的(矛盾)或 CW_4-F 有两个分支，其中一个分支是孤立点或者 CW_4-F 有三个分支，其中两个分支是孤立点。

情况 2.5.5： $1\le\left|F_1\cup F_1^e\right|\le 2$

由于 $2\ge\left|F_1\cup F_1^e\right|\ge\left|F_2\cup F_2^e\right|\ge\left|F_3\cup F_3^e\right|\ge\left|F_4\cup F_4^e\right|\ge 1$。因此，根据命题 4(1)、命题 6 和命题 7 得，CW_4-F 是连通的，矛盾。

综上可得，本引理结果对于 $n=4$ 成立。下证当 $n\ge 5$ 时，结果仍成立。

情况 1： $\left|F_1\cup F_1^e\right|\le 2n-6$

在这种情况中，$\left|F_c\right|\le 4n-8$，且 $\left|F_i\cup F_i^e\right|\le 2n-6$，其中 $i\in[1,n]$。根据定理 2.7，对于 $i\in[1,n]$，$CW_n^i-F_i-F_i^e$ 是连通的。根据命题 4(1)，可得在任意两个不同的子图 $CW_n^{i\prime}s$ 之间有 $3(n-2)!$ 条独立的交叉边。由于 $n\ge 5$，故 $3(n-2)!>4n-7$。因此，$CW_n\left[V\left(CW_n^i-F_i-F_i^e\right)\cup V\left(CW_n^j-F_j-F_j^e\right)\right]-F_c$ 是连通的，其中 $i,j\in[1,n]$，$i\ne j$，即 CW_n-F 是连通的，与 CW_n-F 是不连通的矛盾。

情况 2： $\left|F_1 \cup F_1^e\right| = 2n-5$

情况 2.1： $\left|F_2 \cup F_2^e\right| \le 2n-6$

根据定理 2.7，可得对于 $i \in [2,n]$，$CW_n^i - F_i - F_i^e$ 是连通的。因为 $CW_n^1 \cong BS_{n-1}$，所以根据定理 2.9，$CW_n^1 - F_1 - F_1^e$ 是连通的或 $CW_n^i - F_i - F_i^e$ 有两个分支，其中一个分支是一个孤立点。若 $CW_n^1 - F_1 - F_1^e$ 是连通的。因为当 $n \ge 5$ 时，有 $3(n-2)! > 4n-7$，所以根据命题 4(1)，我们可以得到 $CW_n\left[V\left(CW_n^i - F_i - F_i^e\right) \cup V\left(CW_n^j - F_j - F_j^e\right)\right] - F_c$ 是连通的，其中 $i, j \in [1,n]$，$i \ne j$，即 $CW_n - F$ 是连通的，矛盾。假设 $CW_n^1 - F_1 - F_1^e$ 有两个分支，其中一个分支是一个孤立点 v。由于 $3(n-2)! > 2n-2$，通过命题 4(1)，可得 $CW_n\left[V\left(CW_n^2 - F_2 - F_2^e\right) \cup V\left(CW_n^3 - F_3 - F_3^e\right) \cup \cdots \cup V\left(CW_n^n - F_n - F_n^e\right)\right] - F_c$ 是连通的。因为 $3\left((n-1)! - (2n-5) - 1\right) > 2n-2$，其中 $n \ge 5$，所以根据命题 5，我们可以得到 $CW_n\left[V\left(CW_n^1 - F_1 - F_1^e - v\right) \cup V\left(CW_n^2 - F_2 - F_2^e\right) \cup V\left(CW_n^3 - F_3 - F_3^e\right) \cup \cdots \cup V\left(CW_n^n - F_n - F_n^e\right)\right] - F_c$ 是连通的。因此，$CW_n - F$ 是连通的(矛盾)或 $CW_n - F$ 有两个分支，其中一个分支是一个孤立点。

情况 2.2： $\left|F_2 \cup F_2^e\right| = 2n-5$

由 $\left|F_1 \cup F_1^e\right| = 2n-5$ 和 $|F| \le 4n-7$ 得，$\left|F_i \cup F_i^e\right| \le 3$，$i \in [3,n]$，$|F_c| \le 3$。因为 $CW_n^i \cong BS_{n-1}$，所以根据定理 2.7，可得 $CW_n^i - F_i - F_i^e$ 是连通的。因为 $3(n-2)! > 3$，所以根据命题 4(1)，可以得到 $CW_n\left[V\left(CW_n^3 - F_3 - F_3^e\right) \cup V\left(CW_n^4 - F_4 - F_4^e\right) \cup \cdots \cup V\left(CW_n^n - F_n - F_n^e\right)\right] - F_c$ 是连通的。由定理 2.9，$CW_n^j - F_j - F_j^e$ 是连通的或者 $CW_n^j - F_j - F_j^e$ 有两个分支，其中一个分支是一个孤立点 v_j，$j \in [1,2]$。假设 $CW_n^j - F_j - F_j^e$ 是连通的。因为 $3\left((n-1)! - (2n-5)\right) > 3$，所以 $CW_n - F$ 是连通的，矛盾。

不失一般性，我们假设 $CW_n^1 - F_1 - F_1^e$ 是不连通的，$CW_n^2 - F_2 - F_2^e$ 是连通的。因为 $n \ge 5$，所以 $3\left((n-1)! - (2n-5) - 1\right) > 3$，所以 $CW_n - F$ 是连通的(矛盾)或 $CW_n - F$ 有两个分支，其中一个分支是一个孤立点。

若 $CW_n^j - F_j - F_j^e$ 是不连通的，即 $CW_n^j - F_j - F_j^e$ 有一个孤立点 v_j。由 $3\left((n-1)! - (2n-5) - 1\right) > 3$，则 $CW_n\left[V\left(CW_n^1 - F_1 - F_1^e - v_1\right) \cup V\left(CW_n^2 - F_2 - F_2^e - v_2\right) \cup V\left(CW_n^3 - F_3 - F_3^e\right) \cup V\left(CW_n^4 - F_4 - F_4^e\right) \cup \cdots \cup \left(CW_n^n - F_n - F_n^e\right)\right] - F_c$ 是连通的。假设 v_1 与 v_2 相连。那么根据命题 4(2)和命题 6，可以得到 $\left|N\left(v_j\right) \cap \left(V\left(CW_n^2\right) \cup V\left(CW_n^3\right) \cup \cdots \cup V\left(CW_n^n\right)\right)\right| = 2$，通过命题 2 和 $\left|F_i \cup F_i^e\right| \le 3$，$i \in [3,n]$，$|F_c| \le 3$，所以 $CW_n - F$ 是连通的，矛盾。若 v_1 与 v_2 不相连，则 $CW_n - F$ 是连通的(矛盾)或 $CW_n - F$ 有两个分支，其中一个分支是一个孤立点或 $CW_n - F$ 有三个分支，其中两个分支是孤立点。

情况 3： $\left|F_1 \cup F_1^e\right| = 2n-4$

本情况的讨论方法类似于情况 2，可得 $CW_n - F$ 是连通的(矛盾)或 $CW_n - F$ 有两个分支，其中一个分支是一个孤立点或 $CW_n - F$ 有三个分支，其中两个分支是孤立点。

情况 4： $2n-3 \le \left|F_1 \cup F_1^e\right| \le 4n-13$

情况 4.1： $2n-5 \le \left|F_2 \cup F_2^e\right| \le 2n-4$

根据 $|F| \le 4n-7$，得 $\left|F_3 \cup F_3^e\right| + \left|F_4 \cup F_4^e\right| + \cdots + \left|F_n \cup F_n^e\right| \le 1$，$|F_c| \le 1$，所以根据命题 4(1)，$CW_n\left[V\left(CW_n^3 - F_3 - F_3^e\right) \cup V\left(CW_n^4 - F_4 - F_4^e\right) \cup \cdots \cup V\left(CW_n^n - F_n - F_n^e\right)\right] - F_c$ 是连通的。因为 $n \ge 5$，所以 $3(n-2)! > 4n-7$，所以 $CW_n\left[V\left(CW_n^1 - F_1 - F_1^e\right) \cup V\left(CW_n^3 - F_3 - F_3^e\right) \cup \cdots \cup V\left(CW_n^n - F_n - F_n^e\right)\right] - F_c$ 是连通

的，$CW_n\left[V\left(CW_n^2-F_2-F_2^e\right)\cup V\left(CW_n^3-F_3-F_3^e\right)\cup\cdots\cup V\left(CW_n^n-F_n-F_n^e\right)\right]-F_c$ 是连通的，即 CW_n-F 是连通的，矛盾。

情况 4.2： $\left|F_2\cup F_2^e\right|\le 2n-6$

根据定理 2.7，可得对于 $i\in[2,n]$，$CW_n^i-F_i-F_i^e$ 是连通的。因为 $n\ge 5$，$3(n-2)!>4n-7$，所以根据命题 4(1)，有 $CW_n\left[V\left(CW_n^2-F_2-F_2^e\right)\cup V\left(CW_n^3-F_3-F_3^e\right)\cup\cdots\cup V\left(CW_n^n-F_n-F_n^e\right)\right]-F_c$ 是连通的。根据命题 10，可得 $CW_n^1-F_1-F_1^e$ 是连通的或者 $CW_n^1-F_1-F_1^e$ 有两个分支，其中一个分支是孤立点或 $CW_n^1-F_1-F_1^e$ 有三个分支，其中两个分支是孤立点。假设 $CW_n^1-F_1-F_1^e$ 是连通的。因为 $n\ge 5$，所以 $3\left((n-1)!-(4n-13)\right)>2n-4$。因此，$CW_n-F$ 是连通的，矛盾。假设 $CW_n^1-F_1-F_1^e$ 有两个分支，其中一个分支是孤立点。因为 $3\left((n-1)!-(4n-13)-1\right)>2n-4$，其中 $n\ge 5$，所以 CW_n-F 是连通的(矛盾)或 CW_n-F 有两个分支，其中一个分支是孤立点。假设 $CW_n^1-F_1-F_1^e$ 有三个分支，其中两个分支是孤立点。因为当 $n\ge 5$ 时，有 $3\left((n-1)!-(4n-13)-2\right)>2n-4$，所以 CW_n-F 是连通的(矛盾)或 CW_n-F 有两个分支，其中一个分支是一个孤立点或 CW_n-F 有三个分支，其中两个分支是孤立点。

情况 5： $4n-12\le\left|F_1\cup F_1^e\right|\le 4n-7$

在这种情况中，$\left|F_2\cup F_2^e\right|+\left|F_3\cup F_3^e\right|+\cdots+\left|F_n\cup F_n^e\right|+\left|F_c\right|\le 5$。当 $n\ge 5$，$3(n-2)!>5$，故由命题 4(1)和定理 2.7，有 $CW_n\left[V\left(CW_n^3-F_3-F_3^e\right)\cup V\left(CW_n^4-F_4-F_4^e\right)\cup\cdots\cup V\left(CW_n^n-F_n-F_n^e\right)\right]-F_c$ 是连通的。因为 $\left|F_c\right|\le 5$，$CW_n\left[V\left(CW_n^2-F_2-F_2^e\right)\cup V\left(CW_n^3-F_3-F_3^e\right)\cup\cdots\cup V\left(CW_n^n-F_n-F_n^e\right)\right]-F_c$ 是连通的。若 $CW_n^1-F_1-F_1^e$ 是连通的，则根据命题 4(1)，我们可以得到 CW_n-F 是连通的，矛盾。若 $CW_n^1-F_1-F_1^e$ 是不连通的。由命题 4(1)和命题 4(2)以及 $\left|F_2\cup F_2^e\right|+\left|F_3\cup F_3^e\right|+\cdots+\left|F_n\cup F_n^e\right|\le 5$ 和 $\left|F_c\right|\le 5$，可得 CW_n-F 是连通的(矛盾)或 CW_n-F 有两个分支，其中一个分支是一个孤立点。

定理 4.6 对于任何整数 $n\ge 4$，$n\kappa\lambda\left(CW_n\right)=4n-6$。

证明： 令 F 是 CW_n 的一个最小强自然割。那么根据引理 4.5，$|F|\ge 4n-6$。令 $u=(1)$，$v=(12)$，并且令 $F=\left\{ux:x\in\left\{(1,i):3\le i\le n\right\}\cup\left\{(i,i+1):2\le i\le n-1\right\}\cup\left\{(2,n)\right\}\cup\left\{(12)(1,i):3\le i\le n\right\}\cup\right.$ $\left.\left\{(12)(i,i+1):2\le i\le n-1\right\}\cup\left\{(12)(2,n)\right\}\right\}$。由命题 2 得，$CW_n$ 没有奇圈。因此，对于任意的 $x\in\left(CW_n-F\right)$，$d_{CW_n}(x)\ge 2n-2-(2n-3)\ge 1$。因此，我们可以得到 F 是 CW_n 的一个自然割，所以，$n\kappa\lambda\left(CW_n\right)\le 4n-6$。结合 $|F|\ge 4n-6$，我们有 $n\kappa\lambda\left(CW_n\right)=4n-6$。

5. 结论

本文研究了 n 维轮图 CW_n 当 $g=0$、$g=1$ 的强连通性质，得到了当 $g=0$ 时，对于任何整数 $n\ge 4$，$\kappa\lambda\left(CW_n\right)=2n-2$。进一步，在条件加强的基础上，即当 $g=1$ 时，得到了 $n\kappa\lambda\left(CW_n\right)=4n-6$。由于本文没有对 $g\ge 2$ 进行研究，因此这将是一个今后很有研究价值的课题。

致　谢

本论文是在我的导师王世英教授的悉心指导下完成的。他渊博的专业知识，严谨的治学态度，精益求精的工作作风，诲人不倦的高尚师德，严于律己、严以律己、宽以待人的崇高风范，朴实无华、平易近人的人格魅力对本人影响深远。不仅使本人树立了远大的学习目标，掌握了基本的研究方法，还使本人明白了许多为人处事的道理。本次论文从选题到完成，每一步都倾注了导师大量的心血。在写论文的过程中，遇到了很多的问题，在王老师的耐心指导下，问题都得以解决。在此，谨向王老师表示崇高的

敬意和衷心的感谢！

还要感谢我同小组的赵丽娜师姐和两位同门，是你们在平时论文中和我一起探讨问题，并指出我论文上的误区，使我能及时地发现问题把论文顺利的进行下去，没有你们的帮忙我不可能这样顺利地结稿，在此表示深深的谢意。

基金项目

国家自然科学基金资助项目(61772010)，山西省基础研究计划(202203021221128)。

参考文献

[1] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. (2008) Graph Theory. Springer, New York.

[2] Wei, F. and Wang, S. (2021) Structure Connectivity and Substructure Connectivity of Wheel Networks. *Theoretical Computer Science*, **850**, 20-29. https://doi.org/10.1016/j.tcs.2020.10.028

[3] Wang, S. and Wang, M. (2019) The Strong Connectivity of Bubble-Sort Star Graphs. *The Computer Journal*, **62**, 715-729. https://doi.org/10.1093/comjnl/bxy077

[4] Guo, J. and Lu, M. (2021) Edge-Fault-Tolerant Strong Menger Edge Connectivity of Bubble-Sort Star Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **297**, 109-119. https://doi.org/10.1016/j.dam.2021.03.006

[5] Wang, S., Wang, Z. and Wang, M. (2016) The 2-Extra Connectivity and 2-Extra Diagnosability of Bubble-Sort Star Graph Networks. *The Computer Journal*, **59**, 1839-1856. https://doi.org/10.1093/comjnl/bxw037

[6] Hou, F. (2013) Some New Results of the Wheel Networks and Bubble-Sort Star Networks. Master's Thesis, Northwest Normal University, Lanzhou. (In Chinese)

[7] Feng, W., Ren, J. and Wang, S. (2019) The Nature Diagnosability of Wheel Graph Networks Under the PMC Model and MM Model. *Ars Combinatoria*, **143**, 255-287.

[8] Feng, W., Ren, J., Enhe, C. and Wang, S. (2020) The 2-Good-Neighbor Connectivity of Wheel Graph Networks. *Utilitas Mathematica Journal*, **116**, 139-167.

[9] Cai, H., Liu, H. and Lu, M. (2015) Fault-Tolerant Maximal Local-Connectivity on Bubble-Sort Star Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **181**, 33-40. https://doi.org/10.1016/j.dam.2014.10.006

[10] Gu, M., Hao, R., Tang, S. and Chang, J. (2019) Analysis on Component Connectivity of Bubble-Sort Star Graphs and Burnt Pancake Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **279**, 80-91. https://doi.org/10.1016/j.dam.2019.10.018

[11] Wang, S., Wang, Z. and Wang, M. (2017) The 2-Good-Neighbor Connectivity and 2-Good-Neighbor Diagnosability of Bubble-Sort Star Graph Networks. *Discrete Applied Mathematics*, **217**, 691-706. https://doi.org/10.1016/j.dam.2016.09.047

[12] Feng, W. and Wang, S. (2020) The Diagnosability of Wheel Networks with Missing Edges under the Comparison Model. *Mathematics*, **8**, Article 1818. https://doi.org/10.3390/math8101818

[13] Feng, W. and Wang, S. (2020) The 2-Extra Connectivity of Wheel Networks. *Mathematical Problems in Engineering*, **2020**, Article ID: 8910240. https://doi.org/10.1155/2020/8910240

[14] Guo, J. and Lu, M. (2016) Conditional Diagnosability of Bubble-Sort Star Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **201**, 141-149. https://doi.org/10.1016/j.dam.2015.07.026

[15] Wang, M., Yang, W., Guo, Y. and Wang, S. (2016) Conditional Fault Tolerance in a Class of Cayley Graphs. *International Journal of Computer Mathematics*, **3**, 67-82. https://doi.org/10.1080/00207160.2014.988615

[16] He, S.J., Hao, R.X. and Cheng, E. (2018) Strongly Menger-Edge-Connectedness and Strongly Menger-Vertex-Connectedness of Regular Networks. *Theoretical Computer Science*, **731**, 50-67. https://doi.org/10.1016/j.tcs.2018.04.001

[17] Wang, Y. and Wang, S. (2021) Edge-Fault-Tolerant Strong Menger Edge Connectivity of Bubble-Sort Graphs. *AIMS Mathematics*, **6**, 13210-13221. https://doi.org/10.3934/math.2021763

[18] Zhou, S. and Chen, L. (2010) Fault Tolerant Maximal Local Connectivity of Alternating Group Networks. *Proceedings of* 2010 3*rd International Congress on Image and Signal Processing*, Yantai, 16-18 October 2010, 4394-4398. https://doi.org/10.1109/CISP.2010.5648134