Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(9), 4024-4028
Published Online September 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.129394

Hans汉斯

无穷区间反常积分的积分变换计算方法

程　慧，郭丰家，韩　萍，何桂添*

广西民族大学数学与物理学院，广西　南宁

收稿日期：2023年8月12日；录用日期：2023年9月6日；发布日期：2023年9月14日

摘　要

本文基于两个积分变换的定义及其性质，给出无穷区间反常积分的积分变换计算方法，包括Fourier变换计算方法和Laplace变换计算方法。通过经典例题的求解表明相对于常规计算方法，积分变换法可大大简化计算反常积分。

关键词

反常积分，积分变换，留数

The Method of Integral Transformation Calculation of Improper Integral in Infinite Interval

Hui Cheng, Fengjia Guo, Ping Han, Guitian He*

School of Mathematics and Physics, Guangxi Minzu University, Nanning Guangxi

Received: Aug. 12th, 2023; accepted: Sep. 6th, 2023; published: Sep. 14th, 2023

Abstract

Based on the definition and properties of two integral transformations, this paper gives the integral transformations method for the calculation of improper integral in infinite interval, including Fourier transformation and Laplace transformation. The classical examples show that the calculation of improper integrals by integral transformation can greatly simplify the calculation, compared with the typical method.

*通讯作者。

文章引用: 程慧, 郭丰家, 韩萍, 何桂添. 无穷区间反常积分的积分变换计算方法[J]. 应用数学进展, 2023, 12(9): 4024-4028. DOI: 10.12677/aam.2023.129394

Keywords

Improper Integral, Integral Transformation, Residue

1. 引言

反常积分是微积分的重要专题之一，其应用也非常广泛[1]。无穷区间的反常积分与含参量反常积分的常用计算方法有牛顿–莱布尼茨公式、变量替换、分部积分法。然而对于复杂反常积分与含参量反常积分绝非易事，本文研究无穷区间反常积分的 Fourier 变换与 Laplace 变换计算方法。

文献[2]利用换元法、分部积分法、重积分理论、级数理论以及利用函数奇偶性讨论了计算无穷区间反常积分。文献[3] [4]研究了计算反常积分的 Laplace 变换法。我们知道积分变换包含 Fourier 变换与 Laplace 变换，文献[3] [4]并未讨论无穷区间积分的 Fourier 变换法，本文拟系统讨论无穷区间反常积分的积分变换法。最近文献[5]则讨论了分形插值函数的积分变换的性质。相对于经典的反常积分的变量替换以及分部积分法，积分变换在简化积分上以及含参量反常积分的计算上具有独特的优势。

2. Fourier 变换与 Laplace 变换概念及性质

为了叙述方便，这里给出 Fourier 变换与 Laplace 变换的定义。

定义 1. [6] 若函数 $f(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上满足 Fourier 积分定理的条件，则称函数 $F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t$ 为 $f(t)$ 的 Fourier 变换(或象函数)，记为 $F(\omega)=\mathcal{F}\left[f(t)\right]$。

当 $f(t)$ 为奇函数时，则 $F_s(\omega)=\int_0^{+\infty} f(t)\sin\omega t\mathrm{d}t$ 称为 $f(t)$ 的 Fourier 正弦变换式，即 $F_s=\mathcal{F}_s\left[f(t)\right]$ 当 $f(t)$ 为偶函数时，则 $F_c(\omega)=\int_0^{+\infty} f(t)\cos\omega t\mathrm{d}t$ 称为 $f(t)$ 的 Fourier 余弦变换式，即 $F_c=\mathcal{F}_c\left[f(t)\right]$。

定义 2. [6] 设函数 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有定义，而且积分 $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$ (s 是一个复参量)在 s 的某一域内收敛，则积分 $F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$ 称为函数 $f(t)$ 的 Laplace 变换。记为 $F(s)=\mathcal{L}\left[f(t)\right]$ 称为 $f(t)$ 的 Laplace 变换。

下面给出 Laplace 变换象函数的积分性质。

定理 1. [6] 若 $\mathcal{L}\left[f(t)\right]=F(s)$，则 $\mathcal{L}\left[\dfrac{f(t)}{t}\right]=\int_s^{\infty} F(s)\mathrm{d}s$ 或 $f(t)=t\mathcal{L}^{-1}\left[\int_s^{\infty} F(s)\mathrm{d}s\right]$。

一般地，$\mathcal{L}\left[\dfrac{f(t)}{t^n}\right]=\underbrace{\int_s^{\infty}\mathrm{d}s\int_s^{\infty}\mathrm{d}s\cdots\int_s^{\infty} F(s)\mathrm{d}s}_{n}$。

注：如果积分 $\mathcal{L}\left[\dfrac{f(t)}{t}\right]$ 存在，据定理 1，取 $s=0$，则有 $\int_0^{+\infty}\dfrac{f(t)}{t}\mathrm{d}t=\int_0^{\infty} F(s)\mathrm{d}s$，其中 $F(s)=L\left[f(t)\right]$。

3. 反常积分的 Fourier 变换计算方法

下面我们通过具体的例题展现 Fourier 变换计算反常积分的方法。

例 1. 计算反常积分 $\int_0^{\infty}\frac{\cos(kx)}{a^2+x^2}\mathrm{d}x$，$\int_0^{\infty}\frac{x\sin(kx)}{a^2+x^2}\mathrm{d}x$。

解： 这里我们可考查函数 e^{-at} (a 为常数)的正弦变换和余弦变换。

$$F_c(\omega)+iF_s(\omega)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-at}(\cos\omega t+i\sin\omega t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{(-a+i\omega)t}\mathrm{d}t=\left[\frac{1}{-a+i\omega}\mathrm{e}^{(-a+i\omega)t}\right]\Bigg|_{t=0}^{\infty}$$

$$=\frac{1}{a-i\omega}=\frac{a+i\omega}{a^2+\omega^2},$$

因此，$F_c(\omega)=\frac{a}{a^2+\omega^2}$，$F_s(\omega)=\frac{\omega}{a^2+\omega^2}$。利用正弦逆变换与余弦逆变换，可得

$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{a}{a^2+\omega^2}\cos(\omega t)\mathrm{d}\omega=\mathrm{e}^{-at}$，$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\omega}{a^2+\omega^2}\sin(\omega t)\mathrm{d}\omega=\mathrm{e}^{-at}$。更换变量，可得

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos(kx)}{a^2+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-ak},\quad \int_0^{\infty}\frac{x\sin(kx)}{a^2+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-ak}.$$

例 2. 计算反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos\omega t}{1+t^4}\mathrm{d}t\,(\omega>0)$。

解： 这里我们可考查函数 $f(t)=\frac{1}{1+t^4}$ 的 Fourier 变换。利用 Fourier 变换的定义，可得

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+t^4}\mathrm{e}^{-i\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\omega t}{1+t^4}\mathrm{d}t-i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\omega t}{1+t^4}\mathrm{d}t$$

$$=2\int_0^{+\infty}\frac{\cos\omega t}{1+t^4}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\omega t}{1+t^4}\mathrm{d}t.$$

令 $R(z)=\frac{1}{1+z^4}$，则 $R(z)$ 在上半平面有两个一级极点 $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$。根据留数性质，有 $\int_{-\infty}^{+\infty}R(t)\mathrm{e}^{i\omega t}\mathrm{d}t=2\pi i\cdot\mathrm{Res}\left[R(z)\mathrm{e}^{i\omega z},\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right]+2\pi i\cdot\mathrm{Res}\left[R(z)\mathrm{e}^{i\omega z},\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)\right]$。

因此，

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\omega t}{1+t^4}\mathrm{d}t=\mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{i\omega t}}{1+t^4}\mathrm{d}t\right]$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-|\omega|\sqrt{2}}\left(\cos\frac{|\omega|}{2}+\sin\frac{|\omega|}{2}\right),$$

从而

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos\omega t}{1+t^4}\mathrm{d}t=\frac{1}{4\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-|\omega|/\sqrt{2}}\left(\cos\frac{|\omega|}{2}+\sin\frac{|\omega|}{2}\right).$$

4. 反常积分的 Laplace 变换计算方法

下面我们通过具体的例题展现 Laplace 变换计算反常积分的方法。

例 3. 计算反常积分

$$\int_0^{\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx\left(b>a>0\right).$$

解： 由于 $\mathcal{L}\left[e^{-ax}-e^{-bx}\right]=\frac{1}{s+a}-\frac{1}{s+b}$，利用定理 1，可得

$$\int_0^{\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx=\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{s+a}-\frac{1}{s+b}\right)ds$$

$$=\ln\frac{s+a}{s+b}\Big|_{s=0}^{+\infty}=\ln\frac{b}{a}.$$

例题 3 的其他解法可参见《数学分析(下)》(第十九章第二节习题 2)习题解答。

例 4. 计算反常积分

$$\int_0^{+\infty}e^{-px}\frac{\sin bx-\sin ax}{x}dx\left(p>0,b>a\right).$$

例 4 的经典解法可参见《数学分析(下)》第十九章第二节例题 5，下面给出 Laplace 变换解法。

解： 根据 Laplace 变换的定义以及定理 1，可知

$$\int_0^{+\infty}e^{-px}\frac{\sin bx-\sin ax}{x}dx=\mathcal{L}\left[\frac{\sin bx-\sin ax}{x}\right]=\mathcal{L}\left[\frac{\sin bx}{x}\right]-\mathcal{L}\left[\frac{\sin ax}{x}\right]$$

$$=\int_p^{+\infty}\left(\frac{b}{s^2+b^2}-\frac{a}{s^2+a^2}\right)ds=\arctan\frac{s}{b}\Big|_p^{+\infty}-\arctan\frac{s}{a}\Big|_p^{+\infty}$$

$$=\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{p}{b}-\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{p}{a}\right)=\arctan\frac{p}{a}-\arctan\frac{p}{b}.$$

注： 实际上，本文例题 4 的计算结果与《数学分析(下)》[1]第十九章第二节例题 5 的计算结果是一致的。为了说明结果的一致性，这里证明如下命题。

命题 1. 等式 $\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}\left(x\neq 0\right)$ 恒成立。

证明： 令 $F\left(x\right)=\arctan x+\arctan\frac{1}{x}-\frac{\pi}{2}$。对 $F\left(x\right)$ 求导可得

$$F'\left(x\right)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=0,$$

从而 $F\left(x\right)$ 为常数。又因为

$$F\left(1\right)=\arctan 1+\arctan 1-\frac{\pi}{2}=0,$$

从而 $F\left(x\right)\equiv 0$，即命题成立。

由命题 1 可知，

$$\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}-\arctan x\left(x\neq 0\right),$$

进而可得

$$\arctan\frac{p}{a}-\arctan\frac{p}{b}=\arctan\frac{b}{p}-\arctan\frac{a}{p}.$$

此即说明本文例题 4 的计算结果与《数学分析(下)》[1]第十九章第二节例题 5 的计算结果是一致的。

为了说明结果的一致性。

例 5. 计算反常积分 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx^2}\mathrm{d}x\left(t>0\right)$

解： 对 e^{-tx^2} 关于 t 求 Laplace 变换，则 $\mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{-tx^2}\right]=\dfrac{1}{s+x^2}$，

由于

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{s+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{s}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{s}}\right)^2}\mathrm{d}\frac{x}{\sqrt{s}}=\frac{\pi}{2\sqrt{s}}$$

从而 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx^2}\mathrm{d}x=\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{\pi}{2\sqrt{s}}\right]=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}}$。

特别地，当 $t=1$ 时，有 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$。

同样，我们可发现例题 5 的计算结果与《数学分析(下)》[1]第十九章第二节的习题 6 的结果是一致的。

许多反常积分在收敛的情况下都可以通过积分变换来计算，上述例子也表明积分变换计算反常积分可以大大简化计算。

5. 总结

本文利用积分变换的概念及其性质，并通过例题阐述说明积分变换法在计算反常积分具有独特的优势，特别是针对含参量反常积分，利用积分变换可简化复杂计算过程。并与《数学分析》中的经典例题的计算，说明积分变换法的特点。由于积分变换的概念是基于无穷区间的积分定义的，因此在计算瑕积分时，积分变换法并不是很方便。对于复杂的瑕积分，可以通过变量变换转换为无穷区间的反常积分，可再借助积分变换来计算。值得注意的是积分变换除了在积分计算有优势，在解方程(包括常微分方程与偏微分方程)上都有重要的应用[6]。此外，积分变换在信号处理、图像处理、工程计算中都有重要应用[6] [7]。

基金项目

广西民族大学高等教育教学改革工程项目(2019XJGY40)和广西自然科学基金(AD21159013, 2021GXNSFAA220033)。

参考文献

[1] 华东师范大学数学系. 数学分析(第四版, 下册) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2010.

[2] 李志军. 无穷区间广义积分的几种计算方法[J]. 内江科技, 2010, 31(9): 81-81.

[3] 黄绪明. 用 Laplace 变换求反常积分的新方法[J]. 高等函授学报(自然科学版), 2005, 18(1): 34-35.

[4] 余海洋, 陈国东, 邓晓宇. 用 Laplace 变换求一类无穷限积分[J]. 成都理工大学学报: 自然科学版, 2006, 33(2): 218-220.

[5] Agathiyan, A., Gowrisankar, A., Fataf, N.A.A., *et al*. (2023) Remarks on the Integral Transform of Non-Linear Fractal Interpolation Functions. *Chaos*, *Solitons* & *Fractals*, **173**, 113749. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2023.113749

[6] 何桂添, 唐国吉. 复变函数与积分变换[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 2023.

[7] Wolf, K.B. (2013) Integral Transforms in Science and Engineering. Springer Science & Business Media, Berlin/Heidelberg.