Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(1), 61-69
Published Online January 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.131008

带扰动算子的Landweber迭代在Hanke-Raus准则下的收敛阶分析

谷　苒[1]**，董超峰**[2]

[1]浙江师范大学数学科学学院，浙江　金华
[2]嘉兴学院数据科学学院，浙江　嘉兴

收稿日期：2023年12月10日；录用日期：2024年1月5日；发布日期：2024年1月12日

摘　要

本文针对带有扰动算子的非线性反问题提出了一种基于Hanke-Raus启发式停止准则的Landweber迭代法，并在一定的假设条件下分析了此迭代法的收敛阶。

关键词

非线性反问题，Landweber迭代法，扰动算子，Hanke-Raus准则

Convergence Order Analysis of a Landweber Iteration with Perturbed Operators under the Hanke-Raus Rule

Ran Gu[1]**, Chaofeng Dong**[2]

[1]School of Mathematical Sciences, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang
[2]College of Data Science, Jiaxing University, Jiaxing Zhejiang

Received: Dec. 10th, 2023; accepted: Jan. 5th, 2024; published: Jan. 12th, 2024

Abstract

In this paper, a Landweber iteration based on the Hanke-Raus rule for nonlinear inverse problems with perturbed operators is proposed, and the convergence order of this method is analyzed under certain reasonable assumptions.

文章引用: 谷苒, 董超峰. 带扰动算子的 Landweber 迭代在 Hanke-Raus 准则下的收敛阶分析[J]. 应用数学进展, 2024, 13(1): 61-69. DOI: 10.12677/aam.2024.131008

Keywords

Nonlinear Inverse Problem, Landweber Iteration Method, Perturbed Operators, Hanke-Raus Rule

1. 引言

许多反问题都可以被建模成不适定方程

$$F(x)=y, \tag{1.1}$$

其中，$F:D(F)\subset X\to Y$ 是一个连续且 Fréchet 可微的非线性算子，X,Y 是 Hilbert 空间。在实际中，我们一般不会获得精确数据 y，而是需要处理满足下式的噪音数据 y^{δ}：

$$\left\|y^{\delta}-y\right\|\le\delta, \tag{1.2}$$

其中 $\delta>0$ 为噪音水平。因为方程(1.1)是不适定的，即解不连续依赖于数据，直接求解往往导致近似解严重偏离真实解，所以需要正则化方法来获得解的合理近似。而 Landweber 迭代法[1]就是一种有效的正则化方法，其经典格式为

$$x_{k+1}^{\delta}=x_k^{\delta}+F'\left(x_k^{\delta}\right)^*\left(y^{\delta}-F\left(x_k^{\delta}\right)\right), \tag{1.3}$$

其中，$x_k^{\delta},x_{k+1}^{\delta}$ 为迭代变量，$x_0^{\delta}=x_0$ 是初始迭代点，包含着对方程(1.1)精确解 x^+ 的先验信息。到目前为止，Landweber 迭代已被广泛研究，例如[2]-[8]。但是这些文献所考虑的向前算子 F 大部分都是精确的，而实际中算子一般是带有扰动的，从而方程(1.1)就变成了

$$F_h(x)=y^{\delta}, \tag{1.4}$$

其中 F_h 为 F 的扰动算子。因此，本文针对不适定的非线性方程(1.4)，在经典 Landweber 迭代法的基础上构建如下 Landweber 迭代

$$x_{k+1}^{\delta,h}=x_k^{\delta,h}+wF_h'\left(x_k^{\delta,h}\right)^*\left(y^{\delta}-F_h\left(x_k^{\delta,h}\right)\right), \tag{1.5}$$

其中 $w>0$ 是一个被合适选择的固定步长。

需要指出的是，对方程(1.4)的研究已出现一些文献：1994 年，陈宏和侯宗义[9]提出了方程(1.4)在线性情况下的 Tikhonov 正则化方法；2000 年，Q。Jin [10]提出了非线性方程(1.4)在离散后求解的迭代正则化高斯－牛顿方法，该问题中扰动算子是通过有限维的子空间去逼近函数空间形成的；2002 年，韩波，刘家琦等[11]提出了求解非线性方程(1.4)的 Landweber 迭代法；文献[12] [13] [14]给出了 Banach 空间中当算子带统计误差数据时变分正则化方法的收敛阶；文献[15]推导了在 Hilbert 空间和 Banach 空间中两种算子噪音模型的收敛速度；文献[16]给出了当扰动算子具有一般数据拟合项时变分正则化的误差界；文献[17]提供了推导带扰动算子变分正则化误差界的一般框架。

由于反问题的内在不适定性，Landweber 迭代序列呈现出半收敛现象。因此，大部分文献(比如[2]-[8] [10] [11])采用最经典的偏差原则作为Landweber迭代的停止准则。但是偏差原则严重依赖于噪音水平 δ，而实际应用中噪音水平往往是不可获得或不可靠的，所以不依赖噪音水平的启发式停止准则被提出：1996

年，Martin Hanke 与 Toomas Raus [18]首次对多种正则化方法提出了一种选择适当正则化参数的启发式方法，即 Hanke-Raus 准则；2011 年，Bangti Jin 与 Dirk A. Lorenz [19]导出并推广了二次变分正则化的两个启发式参数选取准则，即 Hanke-Raus 准则和拟最优性准则；2016 年，Qinian Jin [20]将关于二次变分正则化的 Hanke-Raus 启发式准则推广到求解 Banach 空间不适定反问题的一般变分正则化；2018 年，Zhengqiang Zhang 与 Qinian Jin [21]针对 Banach 空间中非平稳迭代 Tikhonov 正则化方法提出了 Hanke-Raus 准则；之后，Qinian Jin 与 Wei Wang [22]，Zhenwu Fu 等人[23]分别针对 Hilbert 空间和 Banach 空间中的高斯－牛顿方法提出了启发式参数选取准则；2022 年，Simon Hubmer 与 Ekaterina Sherina 等人[24]对 Landweber 迭代法的若干启发式停止准则进行了比较。本文为 Landweber 迭代(1.5)提出以下 Hanke-Raus 准则：

$$k_* := \in \mathop{\arg\min}_{k\in(0,k_\infty]} \left\{\theta\left(k;y^\delta,F_h\right) := (k+a)\left\|F_h\left(x_k^\delta\right)-y^\delta\right\|\right\}, \tag{1.6}$$

其中，$a>0$ 为一固定的常数，$k_\infty := k_\infty\left(y^\delta\right)$ 满足 $\forall 0\le k\le k_\infty$，有 $x_k^\delta \in D(F)$。

下面将分析 Landweber 迭代(1.5)在 Hanke-Raus 准则(1.6)下的收敛阶。

2. 主要假设条件

本节介绍对 Landweber 迭代(1.5)进行收敛阶证明的一些假设条件，部分细节可参考[4] [25]。

假设 2-1 假设扰动算子及其导算子在方程(1.1)的精确解 x^+ 处的误差估计为：

$$\begin{cases}\left\|F\left(x^+\right)-F_h\left(x^+\right)\right\|\le h_F,\\ \left\|F'\left(x^+\right)-F_h'\left(x^+\right)\right\|\le h_{F'}.\end{cases} \tag{2.1}$$

在下面的理论分析中，令 $\delta := \left\|y^\delta - y\right\|$，$h_F := \left\|F_h\left(x^+\right)-F\left(x^+\right)\right\|$，注意此噪声水平 δ 不用于实际计算。为使 Landweber 迭代法(1.5)在 Hanke-Raus 准则下收敛，我们还需要对 $\delta + h_F$ 附加假设条件。

假设 2-2 存在一个常数 $0<\kappa<1$，使得对于任意的 $v\in\left\{F_h(x): x\in S\left(y^\delta,F_h\right)\right\}$，有

$$\left\|y^\delta - v\right\| \ge \kappa\left(\delta+h_F\right).$$

其中，$S\left(y^\delta,F_h\right) := \left\{x_k^{\delta,h} : 0\le k\le k_\infty\right\}$。

下面给出对迭代正则化方法进行收敛阶证明的一些常用的假设条件。

假设 2-3 存在 $\rho>0$，使得方程(1.1)在 $B_\rho\left(x_0\right)\subset D(F)$ 有一个解 x^+，其中 $B_\rho\left(x_0\right) := \left\{x\in X : \left\|x-x_0\right\|\le\rho\right\}$。

切锥条件：存在 $0<\eta\le\frac{1}{2}$，使得

$$\left\|F_h(x)-F_h(y)-F_h'(x)(x-y)\right\|\le\eta\left\|F_h(x)-F_h(y)\right\|, \forall x,y\in B_{2\rho}\left(x_0\right). \tag{2.2}$$

扰动算子的导算子的一致有界性：

$$w\left\|F_h'(x)\right\|^2\le 1,\ \forall x\in B_{2\rho}\left(x_0\right). \tag{2.3}$$

存在一类有界线性算子 $\left\{R_x : x\in B_{2\rho}\left(x_0\right)\right\}$ 使得对于某个正常数 $C>0$，有

$$F_h'(x) = R_x F_h'\left(x^+\right);\ \left\|R_x - I\right\|\le C\left\|x-x^+\right\|,\ x\in B_{2\rho}\left(x_0\right). \tag{2.4}$$

源条件：存在 $f\in X$，使得

$$x^+ - x_0 = F_h'\left(x^+\right)^* f. \tag{2.5}$$

3. 收敛阶分析

本节将会给出迭代法(1.5)收敛阶的分析过程。为了简化符号，我们令 $e_k := x_k^{\delta,h} - x^+$， $K_h := F_h'\left(x^+\right)$， $K = F'\left(x^+\right)$。

引理 3-1 令**假设 2-3** 中条件 1)，2)，3)成立。k_δ 是由偏差原则

$$\left\| y^\delta - F_h\left(x_{k_\delta}^{\delta,h}\right)\right\| \le \tau\left(\delta + h_F\right) < \left\| y^\delta - F_h\left(x_k^{\delta,h}\right)\right\|, \ 0 \le k < k_\delta,$$

所定义的，其中 $\tau > 2\dfrac{1+\eta}{1-\eta}$。那么 k_δ 是个有限数且对于任意的 $0 \le k \le k_\delta$， $x_k^{\delta,h} \in B_{2\rho}\left(x_0\right)$。进一步若源条件(2.5)成立，且 $\|f\|$ 充分小，那么

$$k_\delta \le c_1 w^{-1}\left(\frac{\|f\|}{\delta + h_F}\right),$$

其中， c_1 是仅依赖于 w,η,τ 的某个正常数。

证明：采用与文献[1]收敛阶证明过程类似的方法，即可证得结论。

引理 3-2 令**假设 2-3** 中条件 1)，2)，3)成立。$k_* := k_*\left(y^\delta, F_h\right)$ 是由 Hanke-Raus 准则(1.6)所确定的。进一步若源条件(2.5)成立，且 $\|f\|$ 充分小，那么

$$\left(k_* + a\right)^{-1} \ge \frac{w\left(\delta + h_F\right)}{c_2\|f\|}, \tag{3.1}$$

其中 c_2 仅依赖于 w,η,τ,κ,a。

证明：可参考文献[25]的**引理 4.3.1** 的证明过程，其中需要用到本文中的**引理 3-1**。

引理 3-3 ([4]**引理 2.9**)假设 p,q 是正的，存在一个与 k 无关的正常数 $c\left(p,q\right)$ 使得

$$\sum_{j=0}^{k-1}\left(j+1\right)^{-p}\left(k-j\right)^{-q} \le c\left(p,q\right)\left(k+1\right)^{1-p-q}\begin{cases} 1, & \max\{p,q\} < 1, \\ \ln\left(k+1\right), & \max\{p,q\} = 1, \\ \left(k+1\right)^{\max\{p,q\}-1}, & \max\{p,q\} > 1, \end{cases}$$

其中 $c\left(p,q\right)$ 是一个仅依赖于 p,q 的正常数。

引理 3-4 ([4]**引理 2.10**)令 $T \in L\left(X,Y\right)$， $w > 0$，使得 $w\|T\|^2 \le 1$，且设 $s \in [0,1]$， $k \in N$，那么有下面的不等式成立：

$$\left\|\left(I - wT^*T\right)^k\left(T^*T\right)^s\right\| \le w^{-s}\left(k+1\right)^{-s},$$

$$\left\|\left(I - wT^*T\right)^k T^*\right\| \le w^{-\frac{1}{2}}\left(k+1\right)^{-\frac{1}{2}},$$

$$\left\| w\sum_{j=0}^{k-1}\left(I - wTT^*\right)^j\left(TT^*\right)^s\right\| \le \left(wk\right)^{1-s}.$$

引理 3-5 令**引理 3-2** 的所有条件都成立。若源条件(2.5)成立，且 $\|f\|$ 充分小，那么对于任意的 $0 \le k < k_*$，有

$$\|e_k\| \le c_w\|f\|\left(w\left(k+1\right)\right)^{-\frac{1}{2}};\ \|K_h e_k\| \le c_w\|f\|\left(w\left(k+1\right)\right)^{-1},$$

$$\left\|F_h\left(x_k^{\delta,h}\right) - y^\delta\right\| \le \left(c_2 + 2c_w\right)\|f\|\left(k+1\right)^{-1},$$

其中，c_w 是一个仅依赖于 w,η,τ,κ,C。

证明：首先我们需要找到对于任意的 $0\le k\le k_*$，e_k 和 $K_h e_k$ 的表达式，根据迭代法(1.5)，可得

$$\begin{aligned}e_{k+1}&=e_k-wF_h'\left(x_k^{\delta,h}\right)^*\left(F_h\left(x_k^{\delta,h}\right)-y^\delta\right)+wF_h'\left(x^+\right)^*\left(\left[F_h\left(x_k^{\delta,h}\right)-y^\delta\right]-\left[F_h\left(x_k^{\delta,h}\right)-F_h\left(x^+\right)\right]+\left[y^\delta-F_h\left(x^+\right)\right]\right)\\&=e_k-w\left(F_h'\left(x_k^{\delta,h}\right)-F_h'\left(x^+\right)\right)^*\left(F_h\left(x_k^{\delta,h}\right)-y^\delta\right)-wF_h'\left(x^+\right)^*\left(F_h\left(x_k^{\delta,h}\right)-F_h\left(x^+\right)-F_h'\left(x^+\right)\left(x_k^{\delta,h}-x^+\right)\right.\\&\quad\left.+F_h'\left(x^+\right)\left(x_k^{\delta,h}-x^+\right)\right)+wF_h'\left(x^+\right)^*\left(y^\delta-F_h\left(x^+\right)\right).\end{aligned}$$

利用(2.4)，可得

$$\begin{aligned}e_{k+1}=&\left(I-wK_h^*K_h\right)e_k+wK_h^*\left(\left[I-R_{x_k^{\delta,h}}^*\right]\left(F_h\left(x_k^{\delta,h}\right)-y^\delta\right)\right.\\&\left.-\left[F_h\left(x_k^{\delta,h}\right)-F_h\left(x^+\right)-F_h'\left(x^+\right)\left(x_k^{\delta,h}-x^+\right)\right]\right)+wK_h^*\left(y^\delta-F_h\left(x^+\right)\right).\end{aligned}\tag{3.2}$$

令

$$z_k=\left(I-R_{x_k^{\delta,h}}^*\right)\left(F_h\left(x_k^{\delta,h}\right)-y^\delta\right)-R\left(x_k^{\delta,h},x^+\right),\tag{3.3}$$

其中 $R\left(x_k^{\delta,h},x^+\right)=F_h\left(x_k^{\delta,h}\right)-F_h\left(x^+\right)-F_h'\left(x^+\right)\left(x_k^{\delta,h}-x^+\right)$。结合(3.2)和(3.3)，可得

$$e_{k+1}=\left(I-wK_h^*K_h\right)e_k+wK_h^*z_k+wK_h^*\left(y^\delta-F_h\left(x^+\right)\right).$$

由 $e_0=x_0-x^+=-K^*f=-K_h^*f-\left(K^*-K_h^*\right)f$，通过归纳假设，我们可以得到对于 $0\le k\le k_*$，有

$$\begin{aligned}e_k&=\left(I-wK_h^*K_h\right)^k e_0+w\sum_{j=0}^{k-1}\left\{\left(I-wK_h^*K_h\right)^j K_h^*\right\}z_{k-j-1}+\left\{w\sum_{j=0}^{k-1}\left(I-wK_h^*K_h\right)^j K_h^*\right\}\left(y^\delta-F_h\left(x^+\right)\right)\\&=\left(I-wK_h^*K_h\right)^k\left(-K_h^*f\right)+\left(I-wK_h^*K_h\right)^k\left(-\left[K^*-K_h^*\right]f\right)\\&\quad+w\sum_{j=0}^{k-1}\left\{\left(I-wK_h^*K_h\right)^j K_h^*\right\}z_{k-j-1}+\left\{w\sum_{j=0}^{k-1}\left(I-wK_h^*K_h\right)^j K_h^*\right\}\left(y^\delta-F_h\left(x^+\right)\right),\end{aligned}$$

与

$$\begin{aligned}K_he_k&=\left(I-wK_hK_h^*\right)^k K_he_0+w\sum_{j=0}^{k-1}\left\{\left(I-wK_hK_h^*\right)^j K_hK_h^*\right\}z_{k-j-1}\\&\quad+\left\{w\sum_{j=0}^{k-1}\left(I-wK_hK_h^*\right)^j K_hK_h^*\right\}\left(y^\delta-F_h\left(x^+\right)\right)\\&=\left(I-wK_hK_h^*\right)^k K_he_0+w\sum_{j=0}^{k-1}\left\{\left(I-wK_hK_h^*\right)^j K_hK_h^*\right\}z_{k-j-1}+\left\{I-\left(I-wK_hK_h^*\right)^k\right\}\left(y^\delta-F_h\left(x^+\right)\right)\\&=\left(I-wK_h^*K_h\right)^k K_h\left(-K_h^*f\right)+\left(I-wK_h^*K_h\right)^k K_h\left(-\left[K^*-K_h^*\right]f\right)\\&\quad+w\sum_{j=0}^{k-1}\left\{\left(I-wK_hK_h^*\right)^j K_hK_h^*\right\}z_{k-j-1}+\left\{I-\left(I-wK_hK_h^*\right)^k\right\}\left(y^\delta-F_h\left(x^+\right)\right).\end{aligned}$$

接下来，我们将证明对于 $0\le j<k_*$，有

$$\left\|e_j\right\|\le c_w\left\|f\right\|\left(w\left(j+1\right)\right)^{-\frac{1}{2}};\ \left\|K_he_j\right\|\le c_w\left\|f\right\|\left(w\left(j+1\right)\right)^{-1}.\tag{3.4}$$

对于 $j=0$，结合(2.1)，(2.3)与(2.5)，有 $c_w=1+w^{\frac{1}{2}}h_{F'}$，所以(3.4)成立是显然的。我们采用数学归纳法，假设对于 $0\le j<k<k_*$，(3.4)成立，只需要证明 $j=k$ 时结论成立即可。应用(2.4)我们可以得到

$$\left\|F_h(x)-F_h\left(x^+\right)-K_h\left(x-x^+\right)\right\|\le\frac{C}{2}\left\|K_h\left(x-x^+\right)\right\|\left\|x-x^+\right\|. \tag{3.5}$$

通过三角不等式，(2.2)，(3.1)与(3.4)，可得 $\forall 0\le j<k$ ，有

$$\begin{aligned}\left\|F_h\left(x_j^{\delta,h}\right)-y^\delta\right\|&\le\delta+h_F+\frac{1}{1-\eta}\left\|K_he_j\right\|\le\delta+h_F+2\left\|K_he_j\right\|\\&\le c_2w^{-1}(j+1)^{-1}\|f\|+2c_ww^{-1}\|f\|(j+1)^{-1}\\&=(c_2+2c_w)\|f\|(w(j+1))^{-1}.\end{aligned}$$

将上式结合(2.4)，(3.5)与(3.4)，则 $\forall 0\le j<k$ 我们有

$$\begin{aligned}\left\|z_j\right\|&=\left\|\left(I-R^*_{x_j^{\delta,h}}\right)\left(F_h\left(x_j^{\delta,h}\right)-y^\delta\right)\right\|+\left\|R\left(x_j^{\delta,h},x^+\right)\right\|\\&\le C\left\|e_j\right\|\left\|F_h\left(x_j^{\delta,h}\right)-y^\delta\right\|+\frac{C}{2}\left\|e_j\right\|\left\|K_he_j\right\|\\&\le Cc_w\left(c_2+\frac{5}{2}c_w\right)\|f\|^2\left(w(j+1)\right)^{-\frac{3}{2}}\\&=c_3\|f\|^2\left(w(j+1)\right)^{-\frac{3}{2}},\end{aligned}$$

其中 $c_3=Cc_w\left(c_2+\frac{5}{2}c_w\right)$。通过上式以及**引理 3-3**，令 $\bar{c}=c_3\max\left\{c\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right),c\left(1,\frac{3}{2}\right)\right\}$，可得

$$\begin{cases}w^{\frac{1}{2}}\sum_{j=0}^{k-1}(j+1)^{-\frac{1}{2}}\left\|z_{k-j-1}\right\|\le\bar{c}w^{-1}\|f\|^2(k+1)^{-\frac{1}{2}},\\\sum_{j=0}^{k-1}(j+1)^{-1}\left\|z_{k-j-1}\right\|\le\bar{c}w^{-\frac{3}{2}}\|f\|^2(k+1)^{-1}.\end{cases}$$

因为 $\|f\|$ 充分小，所以存在一个常数 $c'>0$，使得 $\forall 0\le k<k_*$，有

$$\left(w(k+1)\right)^{-\frac{1}{2}}h_{F'}\|f\|\le c'\left(\delta+h_F\right). \tag{3.6}$$

基于以上的断言，通过**引理 3-2**，**引理 3-4** 与(2.1)，可得

$$\begin{aligned}\left\|e_k\right\|&\le\left(w(k+1)\right)^{-\frac{1}{2}}\|f\|+h_{F'}\|f\|+w^{\frac{1}{2}}\sum_{j=0}^{k-1}(j+1)^{-\frac{1}{2}}\left\|z_{k-j-1}\right\|+(wk)^{\frac{1}{2}}\left(\delta+h_F\right)\\&=\left(1+c'c_2+\bar{c}w^{-\frac{1}{2}}\|f\|+c_2\right)\left(\|f\|w^{-\frac{1}{2}}(k+1)^{-\frac{1}{2}}\right)\end{aligned}$$

与

$$\begin{aligned}\left\|K_he_k\right\|&\le\left(w(k+1)\right)^{-1}\|f\|+\left(w(k+1)\right)^{-\frac{1}{2}}h_{F'}\|f\|+\sum_{j=0}^{k-1}(j+1)^{-\frac{1}{2}}\left\|z_{k-j-1}\right\|+\left(\delta+h_F\right)\\&=\left(1+c'c_2+\bar{c}w^{-\frac{1}{2}}\|f\|+c_2\right)\left(\|f\|\left(w(k+1)\right)^{-1}\right).\end{aligned}$$

令 $c_w=1+c'c_2+\bar{c}w^{-\frac{1}{2}}\|f\|+c_2$，结论成立。

定理 3-1 令**假设 2-3** 中条件 1)，2)，3)成立，$k_*:=k_*\left(y^\delta,F_h\right)$ 是由 Hanke-Raus 准则(1.6)所确定的。进

一步若源条件(2.5)成立，且$\|f\|$充分小，那么

$$\left\|x_{k_*}^{\delta,h}-x^+\right\|\le C_*\|f\|^{1/2}\left(\delta+h_F+\delta_*\right)^{\frac{1}{2}},$$

其中的C_*仅依赖于w,η,τ,κ,a且$\delta_*:=\left\|F_h\left(x_{k_*}^{\delta,h}\right)-y^\delta\right\|$。

证明：通过**引理 3-5** 证明的$e_k, K_h e_k$的表达式，可得

$$e_{k_*}=K_h^* f_{k_*}-\left(I-wK_h^*K_h\right)^{k_*}\left(K^*-K_h^*\right)f+\left\{w\sum_{j=0}^{k_*-1}\left(I-wK_h^*K_h\right)^j K_h^*\right\}\left(y^\delta-F_h\left(x^+\right)\right),$$

$$K_h e_{k_*}=K_hK_h^* f_{k_*}-K_h\left(I-wK_h^*K_h\right)^{k_*}\left(K^*-K_h^*\right)f+\left(I-\left(I-wK_hK_h^*\right)^{k_*}\right)\left(y^\delta-F_h\left(x^+\right)\right),$$

其中 $f_{k_*}=-\left(I-wK_hK_h^*\right)^{k_*}f+w\sum_{j=0}^{k_*-1}\left(I-wK_hK_h^*\right)^j z_{k_*-j-1}$。

由于**引理 3-5** 成立，再根据**引理 3-5** 中$\|z_j\|$的估计证明过程，可知$\forall 0\le j<k_*$，$\|z_j\|$估计成立。因此应用**引理 3-4** 以及$\|f\|$充分小(可认为$\|f\|\le 1$)，可得

$$\left\|f_{k_*}\right\|\le\left\|\left(I-wK_hK_h^*\right)^{k_*}f\right\|+\left\|w\sum_{j=0}^{k_*-1}\left\{\left(I-wK_hK_h^*\right)^j\right\}z_{k_*-j-1}\right\|\le(1+\tilde{c})\|f\|.$$

其中 $\tilde{c}=c_3w^{-\frac{1}{2}}c\left(0,\frac{3}{2}\right)$。

基于$K_h e_{k_*}$的表达式，应用**引理 3-4**，(2.1)，(2.2)以及(3.6)可得

$$\begin{aligned}\left\|K_hK_h^* f_{k_*}\right\|&=\left\|K_h e_{k_*}+K_h\left(I-wK_h^*K_h\right)^{k_*}\left(K^*-K_h^*\right)f+\left(I-\left(I-wK_hK_h^*\right)^{k_*}\right)\left(F_h\left(x^+\right)-y^\delta\right)\right\|\\&\le\left\|F_h\left(x_{k_*}^{\delta,h}\right)-F_h\left(x^+\right)-K_h e_{k_*}\right\|+\left\|F_h\left(x_{k_*}^{\delta,h}\right)-F_h\left(x^+\right)\right\|+h_{F'}\left(k_*+1\right)^{-\frac{1}{2}}\|f\|+\left(\delta+h_F\right)\\&\le(1+\eta)\left(\left\|F\left(x_{k_*}^{\delta,h}\right)-y^\delta\right\|+\left\|F_h\left(x^+\right)-y^\delta\right\|\right)+h_{F'}\left(k_*+1\right)^{-\frac{1}{2}}\|f\|+\left(\delta+h_F\right)\\&\le M\left(\delta+h_F+\delta_*\right),\end{aligned}$$

其中$M>0$。

由插值不等式以及上面的断言可得

$$\begin{aligned}\left\|K_h^* f_{k_*}\right\|&\le\left\|K_hK_h^* f_{k_*}\right\|^{\frac{1}{2}}\left\|f_{k_*}\right\|^{\frac{1}{2}}\\&\le\left[M\left(\delta+h_F+\delta_*\right)\right]^{\frac{1}{2}}\left[(1+\tilde{c})\|f\|\right]^{\frac{1}{2}}\\&\le c_4\|f\|^{\frac{1}{2}}\left(\delta+h_F+\delta_*\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

其中 $c_4=\left[M\left(1+\tilde{c}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$。

基于e_{k_*}的表达式，根据以上的断言，**引理 3-4** 与(2.1)，可得

$$\left\|e_{k_*}\right\|\le c_4\|f\|^{\frac{1}{2}}\left(\delta+h_F+\delta_*\right)^{\frac{1}{2}}+h_{F'}\|f\|+\left(wk_*\right)^{\frac{1}{2}}\left(\delta+h_F\right),$$

根据(3.1)以及(3.6)，可得

$$h_{F'}\|f\|\le c'\sqrt{c_2}\left(\left(\delta+h_F\right)\|f\|\right)^{\frac{1}{2}}$$

以及

$$w^{\frac{1}{2}}\sqrt{k_*}\left(\delta+h_F\right)\le w^{\frac{1}{2}}\left(k_*+a\right)^{1/2}\left(\delta+h_F\right)\le\left(c_2\|f\|\right)^{\frac{1}{2}}\left(\delta+h_F\right)^{\frac{1}{2}}.$$

所以结论得证。

4. 总结与展望

本文针对带有扰动算子的非线性反问题提出了一种 Landweber 迭代法，并在一定的假设条件下，证明了此迭代法在不依赖于噪音水平的 Hanke-Raus 准则下的收敛阶。由于该方法在每步迭代过程中需要计算 $F_h'\left(x_k^{\delta,h}\right)$，我们可借鉴文献[7]简化的思想，将每步计算的导数固定为某个合适的导数来减少计算量。另一方面，我们也可引入加速收敛的策略(比如采用文献[8]的两点梯度格式等)提出新的 Landweber 迭代格式。证明这些迭代法在 Hanke-Raus 准则下的收敛阶将是我们后续的工作。

基金项目

国家自然科学基金(批准号：12071184)资助项目。

参考文献

[1] Hanke, M., Neubauer, A. and Scherzer, O. (1995) A Convergence Analysis of the Landweber Iteration for Nonlinear Ill-Posed Problems. *Numerische Mathematik*, **72**, 21-37. https://doi.org/10.1007/s002110050158

[2] Ramlau, R. (1999) A Modified Landweber Method for Inverse Problems. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, **20**, 79-98. https://doi.org/10.1080/01630569908816882

[3] Xu, J., Han, B. and Li, L. (2007) Frozen Landweber Iteration for Nonlinear Ill-Posed Problems. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, **23**, 329-336. https://doi.org/10.1007/s10255-007-0375-2

[4] Kaltenbacher, B., Neubauer, A. and Scherzer, O. (2008) Iterative Regularization Methods for Nonlinear Ill-Posed Problems. Walter de Gruyter, Berlin. https://doi.org/10.1515/9783110208276

[5] Kaltenbacher, B., Schpfer, F. and Schuster, T. (2009) Iterative Methods for Nonlinear Ill-Posed Problems in Banach Spaces: Convergence and Applications to Parameter Identification Problems. *Inverse Problems*, **25**, Article ID: 065003. https://doi.org/10.1088/0266-5611/25/6/065003

[6] Jin, Q. and Wang, W. (2013) Landweber Iteration of Kaczmarz Type with General Non-Smooth Convex Penalty Functionals. *Inverse Problems*, **29**, 1400-1416. https://doi.org/10.1088/0266-5611/29/8/085011

[7] Jose, J. and Rajan, M. P. (2017) A Simplified Landweber Iteration for Solving Nonlinear Ill-Posed Problems. *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, **3**, 1001-1018. https://doi.org/10.1007/s40819-017-0395-4

[8] Hubmer, S. and Ramlau, R. (2017) Convergence Analysis of a Two-Point Gradient Method for Nonlinear Ill-Posed Problems. *Inverse Problems*, **33**, Article ID: 095004. https://doi.org/10.1088/1361-6420/aa7ac7

[9] 陈宏，侯宗义. 算子与右端都为近似的迭代正则化方法[J]. 中国科学(A 辑数学物理学天文学技术科学), 1994, 24(8): 808-814.

[10] Jin, Q. (2000) The Analysis of a Discrete Scheme of the Iteratively Regularized Gauss-Newton Method. *Inverse Problems*, **16**, 1457-1476. https://doi.org/10.1088/0266-5611/16/5/319

[11] 韩波，刘家琦，后步风. 非线性不适定算子方程算子与右端项皆有扰动的 Landweber 迭代法[J]. 计算数学, 2002, 24(4): 479-486.

[12] Werner, F. and Hohage, T. (2012) Convergence Rates in Expectation for Tikhonov-Type Regularization of Inverse Problems with Poisson Data. *Inverse Problems*, **28**, Article ID: 104004. https://doi.org/10.1088/0266-5611/28/10/104004

[13] Hohage, T. and Miller, P. (2019) Optimal Convergence Rates for Sparsity Promoting Wavelet-Regularization in Besov Spaces. *Inverse Problems*, **35**, Article ID: 065005. https://doi.org/10.1088/1361-6420/ab0b15

[14] Weidling, F., Sprung, B. and Hohage, T. (2020) Optimal Convergence Rates for Tikhonov Regularization in Besov Spaces. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **58**, 21-47. https://doi.org/10.1137/18M1178098

[15] Lu, S. and Flemming, J. (2012) Convergence Rate Analysis of Tikhonov Regularization for Nonlinear Ill-Posed Problems with Noisy Operators. *Inverse Problems*, **28**, Article ID: 104003. https://doi.org/10.1088/0266-5611/28/10/104003

[16] Burger, M., Korolev, Y. and Rasch, J. (2019) Convergence Rates and Structure of Solutions of Inverse Problems with

Imperfect Forward Models. *Inverse Problems*, **35**, Article ID: 024006. https://doi.org/10.1088/1361-6420/aaf6f5

[17] Hohage, T. and Werner, F. (2022) Error Estimates for Variational Regularization of Inverse Problems with General Noise Models for Data and Operator. *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, **57**, 127-152. https://doi.org/10.1553/etna_vol57s127

[18] Hanke, M. and Raus, T. (1996) A General Heuristic for Choosing the Regularization Parameter in Ill-Posed Problems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, **17**, 956-972. https://doi.org/10.1137/0917062

[19] Jin, B. and Lorenz, D.A. (2011) Heuristic Parameter-Choice Rules for Convex Variational Regularization Based on Error Estimates. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **48**, 1208-1229. https://doi.org/10.1137/100784369

[20] Jin, Q. (2016) Hanke-Raus Heuristic Rule for Variational Regularization in Banach Spaces. *Inverse Problems*, **32**, Article ID: 085008. https://doi.org/10.1088/0266-5611/32/8/085008

[21] Zhang, Z. and Jin, Q. (2018) Heuristic Rule for Non-Stationary Iterated Tikhonov Regularization in Banach Spaces. *Inverse Problems*, **34**, Article ID: 115002. https://doi.org/10.1088/1361-6420/aad918

[22] Jin, Q. and Wang, W. (2018) Analysis of the Iteratively Regularized Gauss-Newton Method under a Heuristic Rule. *Inverse Problems*, **34**, Article ID: 035001. https://doi.org/10.1088/1361-6420/aaa0fb

[23] Fu, Z., Jin, Q. Zhang, Z., Han, B. and Che, Y. (2020) Analysis of a Heuristic Rule for the IRGNM in Banach Spaces with Convex Regularization Terms. *Inverse Problems*, **36**, Article ID: 075002. https://doi.org/10.1088/1361-6420/ab8448

[24] Hubmer, S., Sherina, E., Kindermann, S., *et al*. (2022) A Numerical Comparison of Some Heuristic Stopping Rules for Nonlinear Landweber Iteration. *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, **57**, 216-241. https://doi.org/10.1553/etna_vol57s216

[25] Real, R.R. (2021) Convergence Results for Variational Regularization and Landweber Iteration under Heuristic Rules. Ph.D. Thesis, Australian National University, Canberra.