Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2024, 13(1), 401-413**
Published Online January 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.131041

一类静电磁Schrödinger-Maxwell系统涡旋基态解的存在性

姬玉萍，滕凯民*

太原理工大学数学学院，山西 晋中

收稿日期：2023年12月25日；录用日期：2024年1月19日；发布日期：2024年1月25日

摘 要

本文研究了一种新的静电磁Schrödinger-Maxwell系统，利用Nehari流形方法证明了涡旋柱对称基态解的存在性。

关键词

静电磁Schrödinger-Maxwell系统，基态解，Nehari流形方法

Existence of Vortex Ground State Solutions for a Class of Electromagnetostatic Schrödinger-Maxwell System

Yuping Ji, Kaimin Teng*

School of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Jinzhong Shanxi

Received: Dec. 25th, 2023; accepted: Jan. 19th, 2024; published: Jan. 25th, 2024

Abstract

In this paper, we study a new type of electromagnetostatic Schrödinger-Maxwell system, and the existence of vortex ground state solutions possessing cylindrically symmetry is established by using the Nehari manifold approach.

*通讯作者。

文章引用: 姬玉萍, 滕凯民. 一类静电磁 Schrödinger-Maxwell 系统涡旋基态解的存在性[J]. 应用数学进展, 2024, 13(1): 401-413. DOI: 10.12677/aam.2024.131041

Keywords

Electromagnetostatic Schrödinger-Maxwell System, Ground State Solutions, Nehari Manifold Approach

1. 引言

本文研究如下静电磁 Schrödinger-Maxwell 系统

$$\begin{cases}-\Delta u+(\phi+\omega)u+|l\nabla\theta-\boldsymbol{A}|^2u=|u|^{p-1}u,\ x\in\mathbb{R}^3,\\ -\Delta\phi=u^2,\ x\in\mathbb{R}^3,\\ \nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=(l\nabla\theta-\boldsymbol{A})u^2,\ x\in\mathbb{R}^3,\end{cases}\tag{1}$$

涡旋基态解的存在性，其中 $3\le p<5,\ u:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\ \phi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ 和 $\boldsymbol{A}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$。

在 1998 年，Benci 和 Fortunato 在[6]中介绍了如下系统

$$\begin{cases}-\Delta u+\left(\phi+S_t+|\nabla S-\boldsymbol{A}|^2\right)u=f(u),x\in\mathbb{R}^3,\\ \dfrac{\partial}{\partial t}u^2+2\mathrm{div}\left[(\nabla S-\boldsymbol{A})u^2\right]=0,x\in\mathbb{R}^3,\\ -\mathrm{div}\left(\nabla\phi+\dfrac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)=u^2,x\in\mathbb{R}^3,\\ \nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}+\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\phi+\dfrac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)=(\nabla S-\boldsymbol{A})u^2,x\in\mathbb{R}^3.\end{cases}\tag{2}$$

在[1] [2]和[3]中，选取

$$u=u(x),\quad S=\omega t,\quad \boldsymbol{A}=0,\quad \phi=\phi(x),\quad \omega\in\mathbb{R},$$

系统(2)退化为如下 Schrödinger-Poisson 系统

$$\begin{cases}-\Delta u+(\phi+\omega)u=f(u),\ x\in\mathbb{R}^3,\\ -\Delta\phi=u^2,\ x\in\mathbb{R}^3.\end{cases}\tag{3}$$

在过去的几十年里，许多学者对系统(3)或其更一般形式的基态、束缚态、变号解的存在性和多重性进行了大量的研究，在这里我们就不再一一列举。感兴趣的读者可以参考文献[4]-[10]及它们的参考文献。

在 2009 年，Benci 和 Fortunato 在[7]中研究如下的 Klein-Gordon-Maxwell 系统

$$\begin{cases}(\partial_t+i\phi)^2\psi-(\nabla-i\boldsymbol{A})^2\psi+W'(|\psi|)\dfrac{\psi}{|\psi|}=0,\\ \nabla\cdot(\partial_t\boldsymbol{A}+\nabla\phi)=\left(\mathrm{Im}\dfrac{\partial_t\psi}{\psi}+\phi\right)|\psi|^2,\\ \nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})+\partial_t(\partial_t\boldsymbol{A}+\nabla\phi)=\left(\mathrm{Im}\dfrac{\nabla\psi}{\psi}-\boldsymbol{A}\right)|\psi|^2.\end{cases}\tag{4}$$

系统(4)可能有三种类型解：静电解：$\boldsymbol{A}=0,\phi\neq 0$；静磁解：$\boldsymbol{A}\neq 0,\phi=0$ 和静电磁解：$\boldsymbol{A}\neq 0,\phi=0$。选取

$$\psi(t,x)=u(x)\mathrm{e}^{i(k\theta(x)-\omega t)},\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(x),\phi=\phi(x),\omega\in\mathbb{R},k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\},$$

其中

$$\Sigma=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3:x_1=x_2=0\},$$

$$\theta:\mathbb{R}^3\setminus\Sigma\to\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}),\quad \theta(x_1,x_2,x_3)=\operatorname{Im}\log(x_1+ix_2). \tag{5}$$

易得，$\nabla\theta(x)=\left(\frac{x_2}{r^2},-\frac{x_1}{r^2},0\right)$，$r^2=x_1^2+x_2^2$。

于是系统(4)退化为如下系统

$$\begin{cases}-\Delta u+\left[|k\nabla\theta-\boldsymbol{A}|^2-(\phi-\omega)^2\right]u+W'(u)=0,\ x\in\mathbb{R}^3,\\ -\Delta\phi=(\omega-\phi)u^2,\ x\in\mathbb{R}^3,\\ \nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=(k\nabla\theta-\boldsymbol{A})u^2,\ x\in\mathbb{R}^3.\end{cases} \tag{6}$$

在[11]中 Benci 和 Fortunato 利用山路引理证明了系统(6)解的存在性。

在 2017 年，Avenia 等人在[12]中考虑了如下的静电磁 Klein-Gordon-Maxwell-Proca 系统

$$\begin{cases}-\Delta u+\left[m^2-(\omega-q\phi)^2\right]u+|l\nabla\theta-q\boldsymbol{A}|^2u=f(x,u),\ x\in\mathbb{R}^3,\\ -\Delta\phi+\mu^2\phi=q(\omega-q\phi)u^2,\ x\in\mathbb{R}^3,\\ \nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}+\mu^2\boldsymbol{A}=q(l\nabla\theta-q\boldsymbol{A})u^2,\ x\in\mathbb{R}^3,\end{cases} \tag{7}$$

且利用 Nehari 流形方法证明了系统(7)圆柱对称基态解的存在性。

就目前现有的文献来看，众多学者都是在静电情况下($\boldsymbol{A}=0,\phi\neq 0$)研究的 Schrödinger-Maxwell 系统，也就是我们常说的 Schrödinger-Poisson 系统，关于 Schrödinger-Maxwell 系统的静电磁解的研究未见任何研究结果。

所以受文献[11]、[13]和[14]的启发，本文的主要目的是研究系统(2)涡旋静电磁解的存在性，也就是形如

$$u=u(x),\quad S=l\theta(x)+\omega t,\quad \boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(x),\quad \phi=\phi(x),$$

的解，其中 $\omega\in\mathbb{R},l\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ 并且 θ 如(5)中所定义，那么系统(2)退化为如下系统

$$\begin{cases}-\Delta u+(\phi+\omega)u+|l\nabla\theta-\boldsymbol{A}|^2u=f(u),\ x\in\mathbb{R}^3,\\ \operatorname{div}\left[(l\nabla\theta-\boldsymbol{A})u^2\right]=0,\ x\in\mathbb{R}^3,\\ -\Delta\phi=u^2,\ x\in\mathbb{R}^3,\\ \nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=(l\nabla\theta-\boldsymbol{A})u^2,\ x\in\mathbb{R}^3.\end{cases} \tag{8}$$

注意到，$\operatorname{div}\left[(l\nabla\theta-\boldsymbol{A})u^2\right]=\operatorname{div}\left[\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})\right]=0$，且选取 $f(u)=|u|^{p-1}u$，则系统(8)就变成了系统(1)。

问题(1)所对应的能量泛函 $I:\hat{H}^1\times\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)\times\left(\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)\right)^3\to\mathbb{R}$ 定义为

$$I(u,\phi,\boldsymbol{A})=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\left(|\nabla u|^2+\omega|u|^2+\phi u^2+|l\nabla\theta-\boldsymbol{A}|^2u^2+|\nabla\times\boldsymbol{A}|^2\right)\mathrm{d}x-\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\phi|^2\,\mathrm{d}x-\frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^3}|u|^{p+1}\,\mathrm{d}x. \tag{9}$$

由于系统(1)中的旋度算子具有无限维的核空间，所以问题(1)的主要困难在于能量泛函 I 是强不定的。为

了解决这个困难，我们在第二节中引入空间 $\mathcal{A}$，使得对于任意的 $\boldsymbol{A}\in\mathcal{A}$，有

$$\int_{\mathbb{R}^3}\left|\nabla\times\boldsymbol{A}\right|^2\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^3}\left|\nabla\boldsymbol{A}\right|^2\mathrm{d}x.$$

本文主要结果陈述如下：

定理 1.1 假设 $\omega>0$ 并且 $3\le p<5$，那么系统(1)存在涡旋基态解 $(u,\phi,\boldsymbol{A})\in\hat{H}^1_{\#}\times\left(\mathcal{D}^{1,2}\left(\mathbb{R}^3\right)\right)_{\#}\times\mathcal{A}$，其满足：1) $u=u(r,x_3)$ 和 $\phi=\phi(r,x_3)$；

2) $\boldsymbol{A}=b(r,x_3)\nabla\theta=b(r,x_3)\left(\dfrac{x_2}{r^2},\dfrac{-x_1}{r^2},0\right)$。

本文结构如下。在第 2 节中，我们给出了一些引理并通过约化方法将(9)化为单变量泛函。在第 3 节中，我们利用 Nehari 流形方法来证明系统(1)基态解的存在性。

2. 准备工作

在本节中，我们将使用以下符号：

$C_i\ (i=1,2,\cdots)$ 表示正数；

$\|\cdot\|_p$ 表示勒贝格空间 $L^p\left(\mathbb{R}^3\right)$ 的范数。

2.1. 工作空间

定义 Sobolev 空间

$$H^1\left(\mathbb{R}^3\right)=\left\{u:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}:u\in L^2\left(\mathbb{R}^3\right),\nabla u\in L^2\left(\mathbb{R}^3\right)\right\},$$

其对应范数为

$$\|u\|_{H^1\left(\mathbb{R}^3\right)}=\left(\|u\|_2^2+\|\nabla u\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

空间 $\mathcal{D}^{1,2}\left(\mathbb{R}^3\right)$ 是 $C_0^\infty\left(\mathbb{R}^3\right)$ 的完备，其对应范数为

$$\|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}\left(\mathbb{R}^3\right)}=\left(\|\nabla u\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

空间 $\hat{H}^1$ 是 $C_0^\infty\left(\mathbb{R}^3\setminus\Sigma\right)$ 的完备，其对应范数为

$$\|u\|_{\hat{H}^1}=\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2+\omega|u|^2+l^2\frac{u^2}{r^2}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}},r=\sqrt{x_1^2+x_2^2},$$

其中 $x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$。事实上，$\hat{H}^1\subset H^1\left(\mathbb{R}^3\right)$，并且 $\hat{H}^1\cap C_0^\infty\left(\mathbb{R}^3\right)$ 在 $\hat{H}^1$ 中稠密。

2.2. 准备性引理

引理 2.1 ([2]命题 3.1)固定 $u\in\hat{H}^1$，$-\Delta\phi=u^2$ 存在唯一解 $\phi_u\in\mathcal{D}^{1,2}\left(\mathbb{R}^3\right)$。

引理 2.2 映射 $\Phi:u\in\hat{H}^1\mapsto\phi_u\in\mathcal{D}^{1,2}\left(\mathbb{R}^3\right)$ 是 C^1 的并且对于任意的 $v\in\hat{H}^1$，有

$$\Phi'(u)[v]=-2\Delta^{-1}[uv] \tag{10}$$

证明：类似于文献[15]中命题 2.1 的证明，定义映射

$$T:\hat{H}^1\times\mathcal{D}^{1,2}\left(\mathbb{R}^3\right)\to\mathcal{D}^{1,2}\left(\mathbb{R}^3\right)$$

满足 $T(u,\phi)=\Delta^{-1}\left[u^2\right]+\phi$。经计算，易知

$$\partial_u T(u,\phi):\quad \hat{H}^1 \to \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3),\qquad v \mapsto 2\Delta^{-1}[uv],$$
$$\partial_\phi T(u,\phi):\quad \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3) \to \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3),\quad w \mapsto w.$$

对于所有的 $(u,\phi)\in \hat{H}^1\times\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$，$\partial_\phi T(u,\phi)$ 是可逆的且 $(\partial_\phi T(u,\phi))^{-1}=I$。又由隐函数定理可知，对任意的 $u\in\hat{H}^1$，存在唯一解 $\phi_u\in\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$，使得

$$T(u,\phi_u)=0,\quad \Phi\in C^1\left(\hat{H}^1,\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)\right),\quad \Phi'(u)[v]=-2\Delta^{-1}[uv].$$

引理 2.3 假设 $u\in H^1(\mathbb{R}^3)$，则

$$\|\nabla\phi_u\|_2^2=\int_{\mathbb{R}^3}\phi_u u^2\mathrm{d}x, \tag{11}$$

$$\phi_u\ge 0, \tag{12}$$

并且存在 $C>0$ 使得

$$\|\nabla\phi_u\|_2^2\le C\|u\|_{\frac{12}{5}}^4. \tag{13}$$

此外，$\psi_u=\dfrac{\Phi'(u)[u]}{2}$ 满足

$$-\Delta\psi_u=u^2, \tag{14}$$

$$\int_{\mathbb{R}^3}\psi_u u^2\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^3}\phi_u u^2\mathrm{d}x, \tag{15}$$

$$0\le\psi_u=\phi_u. \tag{16}$$

证明：类似于[12]中引理 2.1 和[16]的引理 2.2 的证明，可证得引理 2.3。

根据引理 2.1 和引理 2.3，我们可考虑约化泛函

$$J(u,\boldsymbol{A})=I(u,\phi_u,\boldsymbol{A})=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\left(|\nabla u|^2\,\omega|u|^2+|\nabla\times\boldsymbol{A}|^2+|l\nabla\theta-\boldsymbol{A}|^2u^2\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\phi_u u^2\mathrm{d}x-\frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^3}|u|^{p+1}\mathrm{d}x, \tag{17}$$

其在 $\hat{H}^1\times\left(\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)\right)^3$ 是 C^1 的，并且若 $(u,\boldsymbol{A})$ 是 J 的临界点，那么 $(u,\phi_u,\boldsymbol{A})$ 是 I 的临界点。

定义

$$\hat{H}^1_\#=\left\{u\in\hat{H}^1(\mathbb{R}^3):u(x)=u(r,x_3)\right\},$$

其中 $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$，$\hat{H}^1_\#$的范数与 $\hat{H}^1(\mathbb{R}^3)$ 的范数等价。类似地，定义空间 $\left(\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)\right)_\#$。

注意到，若 $u\in\hat{H}^1_\#$，则 $\phi_u\in\left(\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)\right)_\#$。令

$$\mathcal{A}_0^\infty=\left\{\boldsymbol{B}\in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^3\setminus\Sigma,\mathbb{R}^3\right)\mid \boldsymbol{B}=b(r,x_3)\nabla\theta, b\in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^3\setminus\Sigma,\mathbb{R}\right)\right\}$$

并且定义 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{A}_0^\infty$ 的完备，其范数为 $\left(\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)\right)^3$ 的范数，显然 $\mathcal{A}\subset\left(\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)\right)^3$。

引理 2.4 ([13]引理 15)对任意的 $\boldsymbol{A}\in\mathcal{A}$，有 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}=0, \|\nabla\times\boldsymbol{A}\|_2=\|\nabla\boldsymbol{A}\|_2$ 和 $\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=-\Delta\boldsymbol{A}$。

因此，系统(1)中的最后一个方程可退化为

$$-\Delta\boldsymbol{A}=(l\nabla\theta-\boldsymbol{A})u^2. \tag{18}$$

定义

$$V=\hat{H}^1_\#\times\mathcal{A}.$$

引理 2.5 假设 $(u,\boldsymbol{A})\in V$，若对任意的 $v\in\hat{H}^1_\#$有 $\partial_u J(u,\boldsymbol{A})[v]=0$，则 $\partial_u J(u,\boldsymbol{A})=0$。若对任意的 $\boldsymbol{B}\in\mathcal{A}$

有 $\partial_{\boldsymbol{A}} J(u,\boldsymbol{A})[\boldsymbol{B}]=0$，则 $\partial_{\boldsymbol{A}} J(u,\boldsymbol{A})=0$。

证明：类似于[11]中定理 16 的证明，若对任意的 $v\in\hat{H}^1_{\#}$有 $\partial_u J(u,\boldsymbol{A})[v]=0$，我们令

$$\eta=-\Delta u+(\omega+\phi)u+|l\nabla\theta-\boldsymbol{A}|^2 u-|u|^{p-1}u-|u|^4 u .$$

选取任意的 $v\in\hat{H}^1$，$v=v_1+v_2$，其中 $v_1\in\hat{H}^1_{\#}$和 $v_2\in\left(\hat{H}^1_{\#}\right)^{\perp}$，则

$$\partial_u J(u,\boldsymbol{A})[v]=\langle\eta,v\rangle=\partial_u J(u,\boldsymbol{A})[v_1]+\langle\eta,v_2\rangle=\langle\eta,v_2\rangle .$$

因为 $u,\phi_u,|l\nabla\theta-\boldsymbol{A}|^2$ 和 $|u|^{p-1}u$ 是圆柱对称的，由稠密理论可知 $\eta\in\left(\hat{H}^1_{\#}\right)'$，故 $\partial_u J(u,\boldsymbol{A})=0$。

同理，假设对任意的 $\boldsymbol{B}\in\mathcal{A}$ 有 $\partial_{\boldsymbol{A}} J(u,\boldsymbol{A})[\boldsymbol{B}]=0$，且令

$$\xi=-\Delta\boldsymbol{A}-(l\nabla\theta-\boldsymbol{A})u^2 .$$

选取任意的 $\boldsymbol{B}\in\left(\mathcal{D}^{1,2}\left(\mathbb{R}^3\right)\right)^3$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2$，其中 $\boldsymbol{B}_1\in\mathcal{A}$ 和 $\boldsymbol{B}_2\in\mathcal{A}^{\perp}$，则

$$\partial_{\boldsymbol{A}} J(u,\boldsymbol{A})[\boldsymbol{B}]=\langle\xi,\boldsymbol{B}\rangle=\partial_u J(u,\boldsymbol{A})[\boldsymbol{B}_1]+\langle\xi,\boldsymbol{B}_2\rangle=\langle\xi,\boldsymbol{B}_2\rangle .$$

由[11]中引理 12 知 $\xi\in\mathcal{A}'$，故 $\partial_{\boldsymbol{A}} J(u,\boldsymbol{A})=0$。

引理 2.6 若 $u\in\hat{H}^1_{\#}$，那么方程(18)存在唯一解 $\boldsymbol{A}_u\in\mathcal{A}$。

证明：固定 $u\in\hat{H}^1_{\#}$，考虑在 $\mathcal{A}\times\mathcal{A}$ 上的双线性映射：

$$a(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\int_{\mathbb{R}^3}\nabla\boldsymbol{A}\cdot\nabla\boldsymbol{B}\mathrm{d}x .$$

显然有

$$a(\boldsymbol{A},\boldsymbol{A})=\int_{\mathbb{R}^3}\nabla\boldsymbol{A}\cdot\nabla\boldsymbol{A}\mathrm{d}x\ge\|\boldsymbol{A}\|^2_{\mathcal{D}^{1,2}\left(\mathbb{R}^3\right)} .$$

根据 Hölder 不等式，有

$$|a(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})|=\left|\int_{\mathbb{R}^3}\nabla\boldsymbol{A}\cdot\nabla\boldsymbol{B}\mathrm{d}x\right|\le\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\boldsymbol{A}||\nabla\boldsymbol{B}|\mathrm{d}x\le\|\nabla\boldsymbol{A}\|_2\|\nabla\boldsymbol{B}\|_2\le\|\boldsymbol{A}\|^2_{\mathcal{D}^{1,2}\left(\mathbb{R}^3\right)}\|\boldsymbol{B}\|^2_{\mathcal{D}^{1,2}\left(\mathbb{R}^3\right)} .$$

此外，根据 Sobolev 嵌入定理，可得

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}^3}\left(l\nabla\theta\cdot\boldsymbol{B}u^2-u^2\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\right)\mathrm{d}x\right|\\
&\le\int_{\mathbb{R}^3}\left|l\nabla\theta\cdot\boldsymbol{B}u^2\right|\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}\left|u^2\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\right|\mathrm{d}x\\
&\le\int_{\mathbb{R}^3}\frac{l}{r}|\boldsymbol{B}|u^2\mathrm{d}x+\|u\|_3^2\|\boldsymbol{A}\|_6\|\boldsymbol{B}\|_6\\
&\le\left(\int_{\mathbb{R}^3}\frac{l^2}{r^2}u^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\boldsymbol{B}|^6\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{6}}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|u|^3\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{3}}+\|u\|_3^2\|\boldsymbol{A}\|_6\|\boldsymbol{B}\|_6\\
&\le\|u\|_{\hat{H}^1}\|\boldsymbol{B}\|_6\|u\|_3+\|u\|_3^2\|\boldsymbol{A}\|_6\|\boldsymbol{B}\|_6\\
&\le C_1\|u\|^2_{\hat{H}^1}\|\boldsymbol{B}\|_{\mathcal{D}^{1,2}\left(\mathbb{R}^3\right)}+C_2\|u\|^2_{\hat{H}^1}\|\boldsymbol{A}\|_{\mathcal{D}^{1,2}\left(\mathbb{R}^3\right)}\|\boldsymbol{B}\|_{\mathcal{D}^{1,2}\left(\mathbb{R}^3\right)} .
\end{aligned}$$

因此，线性映射 $\boldsymbol{B}\in\mathcal{A}\mapsto\int_{\mathbb{R}^3}u^2(l\nabla\theta-\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}\mathrm{d}x$ 是连续的。再因 Lax-Milgram 定理可知，存在唯一的 $\boldsymbol{A}_u\in\mathcal{A}$，满足

$$\int_{\mathbb{R}^3}\nabla\boldsymbol{A}\cdot\nabla\boldsymbol{B}\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^3}u^2(l\nabla\theta-\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}\mathrm{d}x,\ \ \forall\boldsymbol{B}\in\mathcal{A} .$$

引理 2.7 假设 $u\in\hat{H}^1_{\#}$，则 $\boldsymbol{A}_u$ 满足

$$\|\nabla\times\boldsymbol{A}_u\|_2^2=\int_{\mathbb{R}^3}\left(l\nabla\theta-\boldsymbol{A}_u\right)\cdot\boldsymbol{A}_u u^2\,\mathrm{d}x\,,\tag{19}$$

$$\|\nabla\times\boldsymbol{A}_u\|_2^2=\int_{\mathbb{R}^3}\left(l\nabla\theta-\boldsymbol{A}_u\right)\cdot\boldsymbol{A}_u u^2\,\mathrm{d}x\,,\tag{20}$$

$$\|\nabla\times\boldsymbol{A}_u\|_2^2+\int_{\mathbb{R}^3}\left|l\nabla\theta-\boldsymbol{A}_u\right|^2u^2\,\mathrm{d}x=l^2\int_{\mathbb{R}^3}\frac{u^2}{r^2}\mathrm{d}x-l\int_{\mathbb{R}^3}\nabla\theta\cdot\boldsymbol{A}_u u^2\,\mathrm{d}x\,.\tag{21}$$

证明：若 $u\in\hat{H}^1_\#$，在系统(1)的最后一个方程左右同时乘 $\boldsymbol{A}_u$ 并在 $\mathbb{R}^3$ 上积分，我们很容易得到(19)。接下来，通过直接计算，可得

$$\begin{aligned}0&\le\|\nabla\times\boldsymbol{A}_u\|_2^2+\int_{\mathbb{R}^3}\left|l\nabla\theta-\boldsymbol{A}_u\right|^2u^2\,\mathrm{d}x\\&=\int_{\mathbb{R}^3}\left(l\nabla\theta-\boldsymbol{A}_u\right)\cdot\boldsymbol{A}_u u^2\,\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}\left|l\nabla\theta-\boldsymbol{A}_u\right|^2u^2\,\mathrm{d}x\\&=l^2\int_{\mathbb{R}^3}\frac{u^2}{r^2}\mathrm{d}x-l\int_{\mathbb{R}^3}\nabla\theta\cdot\boldsymbol{A}_u u^2\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

这蕴含了(20)和(21)成立。

引理 2.8 映射 $A:u\in\hat{H}^1_\#\mapsto\boldsymbol{A}_u\in\mathcal{A}$ 是 C^1 的且对于任意的 $v\in\hat{H}^1$，有

$$A'(u)[v]=-2\left(\Delta-u^2\right)^{-1}\left[\left(l\nabla\theta-\boldsymbol{A}_u\right)uv\right].$$

此外，$\Psi_u=\dfrac{A'(u)[u]}{2}$ 满足

$$-\Delta\Psi_u=\left(l\nabla\theta-\boldsymbol{A}_u-\Psi_u\right)u^2\,,\tag{22}$$

$$\|\nabla\Psi_u\|_2^2+\int_{\mathbb{R}^3}u^2\left|\Psi_u\right|^2\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^3}\left(l\nabla\theta-\boldsymbol{A}_u\right)\cdot\Psi_u u^2\,\mathrm{d}x\ge0\,,\tag{23}$$

$$\int_{\mathbb{R}^3}l\nabla\theta\cdot\Psi_u u^2\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^3}\left(l\nabla\theta-\boldsymbol{A}_u\right)\cdot\boldsymbol{A}_u u^2\,\mathrm{d}x\,.\tag{24}$$

证明：定义映射

$$\mathcal{T}:\hat{H}^1_\#\times\mathcal{A}\to\mathcal{A}\,,$$

满足 $\mathcal{T}(u,\boldsymbol{A})=\Delta^{-1}\left[\left(l\nabla\theta-\boldsymbol{A}\right)u^2\right]+\boldsymbol{A}$。经计算，有

$$\begin{aligned}&\partial_u\mathcal{T}(u,\boldsymbol{A}):\quad\hat{H}^1_\#\to\mathcal{A},\quad v\mapsto2\Delta^{-1}\left[\left(l\nabla\theta-\boldsymbol{A}\right)uv\right],\\&\partial_{\boldsymbol{A}}\mathcal{T}(u,\boldsymbol{A}):\quad\mathcal{A}\to\mathcal{A},\quad\boldsymbol{V}\mapsto-\Delta^{-1}\left[\boldsymbol{V}u^2\right]+\boldsymbol{V}.\end{aligned}$$

易知对于所有的 $(u,\boldsymbol{A})\in\hat{H}^1_\#\times\mathcal{A}$，$\partial_{\boldsymbol{A}}\mathcal{T}(u,\boldsymbol{A})$ 是可逆的并且 $\left(\partial_{\boldsymbol{A}}\mathcal{T}(u,\boldsymbol{A})\right)^{-1}=\left(\Delta-u^2\right)^{-1}\circ\Delta$。又由隐函数定理可知，对任意的 $u\in\hat{H}^1$，存在唯一的 $\boldsymbol{A}_u\in\mathcal{A}$ 满足

$$\mathcal{T}(u,\boldsymbol{A}_u)=0\,,\quad A\in C^1\left(\hat{H}^1_\#,\mathcal{A}\right),\quad A'(u)[v]=-2\left(\Delta-u^2\right)^{-1}\left[\left(l\nabla\theta-\boldsymbol{A}\right)uv\right].$$

因此，$\Psi_u=-\left(\Delta-u^2\right)^{-1}\left[\left(l\nabla\theta-\boldsymbol{A}\right)u^2\right]$，即 Ψ_u 满足式(22)。

此外，由于 $-\Delta\boldsymbol{A}_u=\left(l\nabla\theta-\boldsymbol{A}_u\right)u^2$ 和(22)，可得

$$\int_{\mathbb{R}^3}\left(l\nabla\theta-\boldsymbol{A}_u\right)\Psi_u u^2\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^3}\left(-\Delta\boldsymbol{A}_u\right)\Psi_u\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^3}\left(-\Delta\Psi_u\right)\boldsymbol{A}_u\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^3}\left(l\nabla\theta-\boldsymbol{A}_u-\Psi_u\right)\boldsymbol{A}_u u^2\,\mathrm{d}x\,,$$

故(24)成立。

根据引理 2.2 和引理 2.8，我们可考虑如下的约化泛函

$$\mathcal{J}(u)=J(u,\boldsymbol{A}_u)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\frac{\omega}{2}\int_{\mathbb{R}^3}|u|^2\mathrm{d}x+\frac{l^2}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{u^2}{r^2}\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\phi_u u^2\mathrm{d}x$$
$$-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}l\nabla\theta\cdot\boldsymbol{A}_u u^2\mathrm{d}x-\frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^3}|u|^{p+1}\mathrm{d}x, \tag{25}$$

其在 $\hat{H}^1_{\#}$ 上是 C^1 的并且若 $(u,\phi,\boldsymbol{A})\in\hat{H}^1_{\#}\times\left(\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)\right)_{\#}\times\mathcal{A}$ 是 I 的临界点当且仅当 $(u,\boldsymbol{A})\in\hat{H}^1_{\#}\times\mathcal{A}$ 是 J 的临界点，$\phi=\phi_u$ 当且仅当 $u\in\hat{H}^1_{\#}$ 是 $\mathcal{J}$ 的临界点，$\phi=\phi_u$ 和 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_u$。因此，我们只需寻找泛函 $\mathcal{J}$ 的临界点。

3. 定理 1.1 的证明

定义 Nehari 流形

$$\mathcal{N}=\left\{u\in\hat{H}^1_{\#}\setminus\{0\}:\mathcal{J}'(u)[u]=0\right\}.$$

引理 3.1 $\mathcal{N}$ **是**非空的。

证明：对于任意的 $t\in\mathbb{R}$，固定 $u\in\hat{H}^1_{\#}\setminus\{0\}$，定义

$$j(t)=\mathcal{J}'(tu)[tu]=t^2\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2+(\omega+\phi_{tu})u^2+|l\nabla\theta-\boldsymbol{A}_{tu}|^2u^2\mathrm{d}x\right)-t^{p+1}\int_{\mathbb{R}^3}|u|^{p+1}\mathrm{d}x.$$

显然，$j(0)=0$。对于充分小的 $t>0$，有 $j(t)>0$ 且 $\lim\limits_{t\to\infty}j(t)=-\infty$。因此，根据连续函数的介值性定理可知，存在 $\bar{t}>0$，使得 $j(\bar{t})=\mathcal{J}'(\bar{t}u)[\bar{t}u]=0$，即 $\bar{t}u\in\mathcal{N}$。

引理 3.2 对任意的 $u\in\mathcal{N}$，有 $\|u\|_{p+1}\geq C$。

证明：假设 $u\in\mathcal{N}$，通过计算，可得

$$\mathcal{J}'(u)[u]=\|\nabla u\|_2^2+\int_{\mathbb{R}^3}(\omega+\phi_u)u^2\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}|l\nabla\theta-\boldsymbol{A}_u|^2u^2\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}|u|^{p+1}\mathrm{d}x=0,$$

这蕴含着

$$\int_{\mathbb{R}^3}|u|^{p+1}\mathrm{d}x=\|\nabla u\|_2^2+\int_{\mathbb{R}^3}(\omega+\phi_u)u^2\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}|l\nabla\theta-\boldsymbol{A}_u|^2u^2\mathrm{d}x. \tag{26}$$

由(12)可推出 $\int_{\mathbb{R}^3}\phi_u u^2\mathrm{d}x\geq0$。因此，$\int_{\mathbb{R}^3}|u|^{p+1}\mathrm{d}x\geq\|\nabla u\|_2^2+\omega\|u\|_2^2$。

又由 Sobolev 嵌入定理易知，$\|u\|_{p+1}^2\leq C\left(\|\nabla u\|_2^2+\omega\|u\|_2^2\right)\leq C\|u\|_{p+1}^{p+1}$。

引理 3.3 $\mathcal{N}$ 是自然约束。

证明：假设 $u\in\mathcal{N}$ 是 $\mathcal{J}|_{\mathcal{N}}$ 的临界点，由拉格朗日乘子定理知，存在 $\lambda\in\mathbb{R}$，使得 $\mathcal{J}'(u)=\lambda\partial_u\left(\mathcal{J}'(u)[u]\right)$。下证 $\lambda=0$。因为 $0=\mathcal{J}'(u)[u]=\lambda\partial_u\left(\mathcal{J}'(u)[u]\right)[u]$，故只需证明 $\partial_u\left(\mathcal{J}'(u)[u]\right)[u]\neq0$。

结合(16)，(23)和(26)，有

$$\begin{aligned}\partial_u\left(\mathcal{J}'(u)[u]\right)[u]&=2\|\nabla u\|_2^2+2\omega\|u\|_2^2+2\int_{\mathbb{R}^3}\phi_u u^2\mathrm{d}x+2\int_{\mathbb{R}^3}|l\nabla\theta-\boldsymbol{A}_u|^2u^2\mathrm{d}x+2\int_{\mathbb{R}^3}\psi_u u^2\mathrm{d}x\\&\quad-4\int_{\mathbb{R}^3}(l\nabla\theta-\boldsymbol{A}_u)\Psi_u u^2\mathrm{d}x-(p+1)\int_{\mathbb{R}^3}|u|^{p+1}\mathrm{d}x\\&=(1-p)\left(\|\nabla u\|_2^2+\omega\|u\|_2^2+\int_{\mathbb{R}^3}\phi_u u^2\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}|l\nabla\theta-\boldsymbol{A}_u|^2u^2\mathrm{d}x\right)\\&\quad+2\int_{\mathbb{R}^3}\psi_u u^2\mathrm{d}x-4\int_{\mathbb{R}^3}(l\nabla\theta-\boldsymbol{A}_u)\Psi_u u^2\mathrm{d}x\\&\leq(1-p)\left(\|\nabla u\|_2^2+\omega\|u\|_2^2+\int_{\mathbb{R}^3}\phi_u u^2\mathrm{d}x\right)+2\int_{\mathbb{R}^3}\psi_u u^2\mathrm{d}x\\&\leq(1-p)\left(\|\nabla u\|_2^2+\omega\|u\|_2^2\right)+(3-p)\int_{\mathbb{R}^3}\psi_u u^2\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由于 $p\in[3,5)$ 和 $\psi_u\geq0$，故 $(1-p)\left(\|\nabla u\|_2^2+\omega\|u\|_2^2\right)+(3-p)\int_{\mathbb{R}^3}\psi_u u^2\mathrm{d}x\leq-C\left(\|\nabla u\|_2^2+\omega\|u\|_2^2\right)\leq-C$，

因此 $\lambda=0$。

引理 3.4 泛函 $\mathcal{J}|_{\mathcal{N}}$ 有正下界。

证明：假设 $u\in\mathcal{N}$，结合(16)，(21)和(26)，有

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(u)&=\frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2+\frac{\omega}{2}\|u\|_2^2+\frac{l^2}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{u^2}{r^2}\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\phi_u u^2\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}l\nabla\theta\cdot\boldsymbol{A}_u u^2\mathrm{d}x-\frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^3}|u|^{p+1}\mathrm{d}x\\&=\frac{p-1}{2(p+1)}\left(\|\nabla u\|_2^2+\omega\|u\|_2^2\right)+\frac{p-3}{4(p+1)}\int_{\mathbb{R}^3}\phi_u u^2\mathrm{d}x+\frac{p-1}{2(p+1)}\left(l^2\int_{\mathbb{R}^3}\frac{u^2}{r^2}\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}l\nabla\theta\cdot\boldsymbol{A}_u u^2\mathrm{d}x\right)\\&\quad+\frac{1}{p+1}\left(\int_{\mathbb{R}^3}l\nabla\theta\boldsymbol{A}_u u^2\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}|\boldsymbol{A}_u|^2u^2\mathrm{d}x\right)\\&\ge\frac{p-1}{2(p+1)}\left(\|\nabla u\|_2^2+\omega\|u\|_2^2\right),\end{aligned}$$

故存在常数 $C>0$，使得对于任意的 $u\in\mathcal{N}$ 有 $\mathcal{J}(u)\ge C$。

引理 3.5 假设 $\{u_n\}\in\mathcal{N}$ 是极小化序列，那么 $\{u_n\}$ 在 $\hat{H}^1_{\#}$ 上有界。

证明：假设 $\{u_n\}\in\mathcal{N}$ 是极小化序列，即

$$\lim_n\mathcal{J}(u_n)=\inf_{u\in\mathcal{N}}\mathcal{J}(u)=c.$$

由定理 3.4 可知

$$c\ge\lim_n\mathcal{J}(u_n)\ge\lim_{n\to\infty}\frac{p-1}{2(p+1)}\left(\|\nabla u_n\|_2^2+\omega\|u_n\|_2^2\right),$$

这蕴含了 $\{u_n\}$ 在 $H^1(\mathbb{R}^3)$ 上有界。经计算，有

$$\mathcal{J}(u_n)\ge\frac{1}{2}\|\nabla u_n\|_2^2+\frac{\omega}{2}\|u_n\|_2^2+\frac{l^2}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{u_n^2}{r^2}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}l\nabla\theta\cdot\boldsymbol{A}_{u_n}u_n^2\mathrm{d}x-\frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^3}|u_n|^{p+1}\mathrm{d}x. \tag{27}$$

故可推出 $\{\boldsymbol{A}_{u_n}\}$ 在 $\mathcal{A}$ 上有界。由基本不等式和 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3}l\nabla\theta\cdot\boldsymbol{A}_{u_n}u_n^2\mathrm{d}x&\le\int_{\mathbb{R}^3}\left|l\nabla\theta\cdot\boldsymbol{A}_{u_n}u_n^2\right|\mathrm{d}x\le\int_{\mathbb{R}^3}\frac{l}{r}\left|\boldsymbol{A}_{u_n}\right|u_n^2\mathrm{d}x\le\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\left|\boldsymbol{A}_{u_n}\right|^2u_n^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{l^2}{r^2}u_n^2\mathrm{d}x\\&\le C\left\|\boldsymbol{A}_{u_n}\right\|_6^2\left\|u_{u_n}\right\|_3^2+\frac{l^2}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{u_n^2}{r^2}\mathrm{d}x\le C+\frac{l^2}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{u_n^2}{r^2}\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{28}$$

结合(27)和(28)，有

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(u_n)&\ge\frac{1}{2}\|\nabla u_n\|_2^2+\frac{\omega}{2}\|u_n\|_2^2+\frac{l^2}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{u_n^2}{r^2}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}l\nabla\theta\cdot\boldsymbol{A}_{u_n}u_n^2\mathrm{d}x-\frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^3}|u_n|^{p+1}\mathrm{d}x\\&\ge\frac{1}{2}\|\nabla u_n\|_2^2+\frac{\omega}{2}\|u_n\|_2^2+\frac{l^2}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{u_n^2}{r^2}\mathrm{d}x-\frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^3}|u_n|^{p+1}\mathrm{d}x-\frac{C}{2}.\end{aligned}$$

因此，$\frac{1}{2}\|\nabla u_n\|_2^2+\frac{\omega}{2}\|u_n\|_2^2+\frac{l^2}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{u_n^2}{r^2}\mathrm{d}x\le\mathcal{J}(u_n)+\frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^3}|u_n|^{p+1}\mathrm{d}x+\frac{C}{2}$，故 $\{u_n\}$ 在 $\hat{H}^1_{\#}$ 上有界。

引理 3.6 任意的有界序列 $\{u_n\}\subset\mathcal{N}$ 是非消失的。

证明：假设序列 $\{u_n\}\subset\mathcal{N}$ 消失，即

$$\lim_n\sup_{\xi\in\mathbb{R}^3}\int_{B_{\bar{r}}(\xi)}u_n^2\mathrm{d}x=0.$$

由 Lions 的消失引理(可见[17]的引理 1.1)可知，当 $2<s<6$ 时，$u_n\to 0$ 在 $L^s(\mathbb{R}^3)$，这与引理 3.2 矛盾，

证毕。

引理 3.7 若 $u_n \rightharpoonup u_0$ 在 $\hat{H}^1_{\#}\backslash\{0\}$，那么通过选取子列，则 $\phi_{u_n} \rightharpoonup \phi_{u_0}$ 在 $\left(\mathcal{D}^{1,2}\left(\mathbb{R}^3\right)\right)_{\#}$ 和 $\boldsymbol{A}_{u_n} \rightharpoonup \boldsymbol{A}_{u_0}$ 在 $\mathcal{A}$。因此，$\mathcal{J}'(u_n) \to \mathcal{J}'(u_0)$。

证明：根据引理 3.5，通过选取子列仍记为 $\{u_n\}$，那么存在 $u_0 \in \hat{H}^1_{\#}\backslash\{0\}$，使得

$$u_n \rightharpoonup u_0 \text{ 在 } \hat{H}^1_{\#}\backslash\{0\} \text{ 中}, \tag{29}$$

$$u_n \rightharpoonup u_0 \text{ 在 } L^s\left(\mathbb{R}^3\right) \text{ 中，其中 } 2 \le s \le 6, \tag{30}$$

$$u_n \rightharpoonup u_0 \text{ 在 } L^s_{loc}\left(\mathbb{R}^3\right) \text{ 中，其中 } 1 \le s < 6. \tag{31}$$

由(13)可得 $\left\{\phi_{u_n}\right\}$ 在 $\left(\mathcal{D}^{1,2}\left(\mathbb{R}^3\right)\right)_{\#}$ 中有界，则存在 $\phi_0 \in \left(\mathcal{D}^{1,2}\left(\mathbb{R}^3\right)\right)_{\#}$，使得

$$\phi_{u_n} \rightharpoonup \phi_0 \text{ 在 } \left(\mathcal{D}^{1,2}\left(\mathbb{R}^3\right)\right)_{\#} \text{ 中}, \tag{32}$$

$$\phi_{u_n} \rightharpoonup \phi_0 \text{ 在 } L^6\left(\mathbb{R}^3\right) \text{ 中}, \tag{33}$$

$$\phi_{u_n} \to \phi_0 \text{ 在 } L^s_{loc}\left(\mathbb{R}^3\right) \text{ 中，其中 } 1 \le s < 6. \tag{34}$$

又因为 $\left\{\boldsymbol{A}_{u_n}\right\}$ 在 $\mathcal{A}$ 中有界，则存在 $\boldsymbol{A}_0 \in \mathcal{A}$，使得

$$\boldsymbol{A}_{u_n} \rightharpoonup \boldsymbol{A}_0 \text{ 在 } \mathcal{A} \text{ 中}, \tag{35}$$

$$\boldsymbol{A}_{u_n} \rightharpoonup \boldsymbol{A}_0 \text{ 在 } \left(L^6\left(\mathbb{R}^3\right)\right)^3 \text{ 中}, \tag{36}$$

$$\boldsymbol{A}_{u_n} \to \boldsymbol{A}_0 \text{ 在 } \left(L^s_{loc}\left(\mathbb{R}^3\right)\right)^3 \text{ 中，其中 } 1 \le s < 6. \tag{37}$$

下证 $\phi_0 = \phi_{u_0}$ 和 $\boldsymbol{A}_0 = \boldsymbol{A}_{u_0}$。由于系统(1)后两个方程解的唯一性，故只需证明

$$-\Delta\phi_0 = u_0^2, \tag{38}$$

$$-\Delta\boldsymbol{A}_0 = \left(l\nabla\theta - \boldsymbol{A}_0\right)u_0^2. \tag{39}$$

记 $\phi_n = \phi_{u_n}$，因为 $-\Delta\phi_n = u_n^2$，对 $w \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^3\right)$，由(31)和(32)，有

$$\int_{\mathbb{R}^3} u_n^2 w \mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^3} u_0^2 w \mathrm{d}x,$$
$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla\phi_n \nabla w \mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^3} \nabla\phi_0 \nabla w \mathrm{d}x.$$

因此，(38)成立。

令 $\boldsymbol{V} \in \mathcal{A}_0^\infty$ 和 $K = supp\boldsymbol{V}$，记 $\boldsymbol{A}_n = \boldsymbol{A}_{u_n}$，因为 $-\Delta\boldsymbol{A}_n = \left(l\nabla\theta - \boldsymbol{A}_n\right)u_n^2$，只需证明

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla\boldsymbol{A}_n \cdot \nabla\boldsymbol{V} \mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^3} \nabla\boldsymbol{A}_0 \cdot \nabla\boldsymbol{V} \mathrm{d}x, \tag{40}$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} l\nabla\theta \cdot \boldsymbol{V} u_n^2 \mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^3} l\nabla\theta \cdot \boldsymbol{V} u_0^2 \mathrm{d}x, \tag{41}$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} l\nabla\theta \cdot \boldsymbol{V} u_n^2 \mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^3} l\nabla\theta \cdot \boldsymbol{V} u_0^2 \mathrm{d}x, \tag{42}$$

由(35)，(40)显然成立。注意到，$\int_{\mathbb{R}^3} \left(l\nabla\theta \cdot \boldsymbol{V}\right)^2 \mathrm{d}x \le l^2 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\boldsymbol{V}^2}{r^2} \mathrm{d}x \le l^2 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|b|^2 r^2}{r^2} \le l^2 \int_{\mathbb{R}^3} |b|^2 \mathrm{d}x < \infty$，并结合(30)，于是(41)成立。

根据 Hölder 不等式，有

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^3}\left(u_n^2\boldsymbol{A}_n-u_0^2\boldsymbol{A}_0\right)\boldsymbol{V}\mathrm{d}x\\
&=\int_{\mathbb{R}^3}\left(u_n^2-u_0^2\right)\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{V}\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}u_0^2\left(\boldsymbol{A}_n-\boldsymbol{A}_0\right)\boldsymbol{V}\mathrm{d}x=\int_K\left(u_n^2-u_0^2\right)\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{V}\mathrm{d}x+\int_K u_0^2\left(\boldsymbol{A}_n-\boldsymbol{A}_0\right)\boldsymbol{V}\mathrm{d}x\\
&\le\left(\int_K\left|u_n^2-u_0^2\right|^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{3}}\left(\int_K\left|\boldsymbol{A}_n\right|^6\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{6}}\left(\int_K\left|\boldsymbol{V}\right|^6\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{6}}+\left(\int_K\left|u_0^2\right|^3\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{3}}\left(\int_K\left|\boldsymbol{A}_n-\boldsymbol{A}_0\right|^3\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{3}}\left(\int_K\left|\boldsymbol{V}\right|^6\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{6}}\\
&\le\left(\int_K\left|\left|u_n\right|^3-\left|u_0\right|^3\right|\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{3}}\left(\int_K\left|\boldsymbol{A}_n\right|^6\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{6}}\left(\int_K\left|\boldsymbol{V}\right|^6\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{6}}+\left(\int_K\left|u_0\right|^6\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{3}}\left(\int_K\left|\boldsymbol{A}_n-\boldsymbol{A}_0\right|^3\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{3}}\left(\int_K\left|\boldsymbol{V}\right|^6\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{6}},
\end{aligned}
$$

那么由(31)，(37)及$\{\boldsymbol{A}_n\}$的有界性，(42)成立。

若$v\in\hat{H}^1\cap C_0^\infty\left(\mathbb{R}^3\right)$且令$M=supp\,v$，则有

$$
\mathcal{J}'(u_n)[v]=\int_{\mathbb{R}^3}\nabla u_n\nabla v+\omega u_nv+l^2\frac{u_n}{r^2}v-2l\nabla\theta\cdot\boldsymbol{A}_nu_nv\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}\phi_nu_nv+\left|\boldsymbol{A}_n\right|^2u_nv-\left|u_n\right|^{p-1}u_nv\mathrm{d}x,
$$

$$
\mathcal{J}'(u_0)[v]=\int_{\mathbb{R}^3}\nabla u_0\nabla v+\omega u_0v+l^2\frac{u_0}{r^2}v-2l\nabla\theta\cdot\boldsymbol{A}_0u_nv\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}\phi_0u_0v+\left|\boldsymbol{A}_0\right|^2u_0v-\left|u_0\right|^{p-1}u_0v\mathrm{d}x.
$$

根据(31)，(34)和$\{\phi_n\}$的有界性，可推出

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^3}\left(\phi_nu_n-\phi_0u_0\right)v\mathrm{d}x\\
&=\int_{\mathbb{R}^3}\phi_n\left(u_n-u_0\right)v\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}\left(\phi_n-\phi_0\right)u_0v\mathrm{d}x=\int_M\phi_n\left(u_n-u_0\right)v\mathrm{d}x+\int_M\left(\phi_n-\phi_0\right)u_0v\mathrm{d}x\\
&\le\left(\int_M\left|\phi_n\right|^6\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{6}}\left(\int_M\left|u_n-u_0\right|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_M\left|v\right|^3\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\int_M\left|\phi_n-\phi_0\right|^3\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{3}}\left(\int_M\left|u_0\right|^3\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{3}}\left(\int_M\left|v\right|^3\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{3}}\\
&=o_n(1).
\end{aligned}
$$

由(31)，(37)和$\{\boldsymbol{A}_n\}$的有界性可得

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^3}\left(\boldsymbol{A}_n^2u_n-\boldsymbol{A}_0^2u_0\right)v\mathrm{d}x\\
&=\int_{\mathbb{R}^3}\boldsymbol{A}_n^2\left(u_n-u_0\right)v\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}\left(\boldsymbol{A}_n^2-\boldsymbol{A}_0^2\right)u_0v\mathrm{d}x=\int_M\boldsymbol{A}_n^2\left(u_n-u_0\right)v\mathrm{d}x+\int_M\left(\boldsymbol{A}_n^2-\boldsymbol{A}_0^2\right)u_0v\mathrm{d}x\\
&\le\left(\int_M\left|\boldsymbol{A}_n^2\right|^3\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{3}}\left(\int_M\left|u_n-u_0\right|^3\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{3}}\left(\int_M\left|v\right|^3\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\int_M\left|\boldsymbol{A}_n^2-\boldsymbol{A}_0^2\right|^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{3}}\left(\int_M\left|u_0\right|^6\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{6}}\left(\int_M\left|v\right|^6\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{6}}\\
&\le\left(\int_M\left|\boldsymbol{A}_n\right|^6\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{3}}\left(\int_M\left|u_n-u_0\right|^3\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{3}}\left(\int_M\left|v\right|^3\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\int_M\left|\left|\boldsymbol{A}_n\right|^3-\left|\boldsymbol{A}_0\right|^3\right|\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{3}}\left(\int_M\left|u_0\right|^6\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{6}}\left(\int_M\left|v\right|^6\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{6}}\\
&=o_n(1),\\
&\int_{\mathbb{R}^3}l\nabla\theta\cdot\left(\boldsymbol{A}_nu_n-\boldsymbol{A}_0u_0\right)v\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^3}l\nabla\theta\cdot\boldsymbol{A}_n\left(u_n-u_0\right)v\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}l\nabla\theta\cdot\left(\boldsymbol{A}_n-\boldsymbol{A}_0\right)u_0v\mathrm{d}x\\
&=\int_M l\nabla\theta\cdot\boldsymbol{A}_n\left(u_n-u_0\right)v\mathrm{d}x+\int_M l\nabla\theta\cdot\left(\boldsymbol{A}_n-\boldsymbol{A}_0\right)u_0v\mathrm{d}x\le\int_M\frac{l}{r}\left|\boldsymbol{A}_n\right|\left|u_n-u_0\right|\left|v\right|\mathrm{d}x+\int_M\frac{l}{r}\left|\boldsymbol{A}_n-\boldsymbol{A}_0\right|\left|u_0\right|\left|v\right|\mathrm{d}x\\
&\le\left(\int_M\left|\boldsymbol{A}_n\right|^6\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{6}}\left(\int_M\left|u_n-u_0\right|^3\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{3}}\left(\int_M\frac{l^2}{r^2}\left|v\right|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_M\left|\boldsymbol{A}_n-\boldsymbol{A}_0\right|^3\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{3}}\left(\int_M\left|u_0\right|^6\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{6}}\left(\int_M\frac{l^2}{r^2}\left|v\right|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\\
&=o_n(1).
\end{aligned}
$$

故当$n\to\infty$时，$\mathcal{J}'(u_n)[v]\to\mathcal{J}'(u_0)[v]$。

因为$\mathcal{N}$是自然约束，由[18]中定理 8.5 知，可假设$\{u_n\}$是$\mathcal{J}$的 PS 序列，即$\mathcal{J}(u_n)\to c$以及对于任意的$v\in\hat{H}^1_\#$，$\mathcal{J}'(u_n)[v]\to 0$。

定理 1.1 的证明 根据引理 3.6，可知存在$R,\sigma>0$，序列$\left\{x_n=\left(x_{1n},x_{2n},x_{3n}\right)\right\}\subset\mathbb{R}^3$，使得

$$\int_{B_R(x_n)} |u_n(x)|^2 \,\mathrm{d}x \ge \sigma .$$

断言：$r_n^2 := (x_{1n})^2 + (x_{2n})^2$ 有界。由于 $u_n(x)$ 具有柱对称性，则

$$\int_{B_R(x_n)} |u_n(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \int_{B_R(\tilde{x}_n)} |u_n(x)|^2 \,\mathrm{d}x ,$$

其中 $x_{3n} = \tilde{x}_{3n}$ 和 $(x_{1n})^2 + (x_{2n})^2 = (\tilde{x}_{1n})^2 + (\tilde{x}_{2n})^2$。注意到，若 $|r_n| \to \infty$，则有

$$\int_{\mathbb{R}^3} |u_n(x)|^2 \,\mathrm{d}x \ge \sum_{n=1}^{\infty} \int_{B_R(\tilde{x}_n)} |u_n(x)|^2 \,\mathrm{d}x \ge \sum_{n=1}^{\infty} \sigma = +\infty ,$$

这与 $\{u_n\}$ 的 L^2 范数有界矛盾。故断言成立。定义 $r_0 = R + \sup_{n\in\mathbb{N}} |r_n|$，则有

$$\int_{B_{r_0}(\overline{x}_n)} |u_n(x)|^2 \,\mathrm{d}x \ge \sigma , \quad \overline{x}_n = (0,0,x_{3n}) .$$

令 $\overline{u}_n(x) = u_n(x + \overline{x}_n)$，那么

$$\int_{B_{r_0}(0)} |\overline{u}_n(x)|^2 \,\mathrm{d}x \ge \sigma . \tag{43}$$

根据(43)可知存在 $u \in \hat{H}^1_{\#} \setminus \{0\}$，使得 $\overline{u}_n \rightharpoonup u$。此外，$\{\overline{u}_n\} \subset \mathcal{N}$ 满足

$$\mathcal{J}(u_n) = \mathcal{J}(\overline{u}_n) \to c \text{ 和 } \mathcal{J}'(u_n) = \mathcal{J}'(\overline{u}_n) \to 0 .$$

由引理 3.7 可知 $\mathcal{J}'(\overline{u}_n) \to \mathcal{J}'(u)$，故 $\mathcal{J}'(u) = 0$。即 u 是 $\mathcal{J}$ 的临界点。结合(17)和(25)可得

$$\mathcal{J}(u) = J(u, \boldsymbol{A}_u) = I(u, \phi_u, \boldsymbol{A}_u) .$$

因此，$(u, \phi_u, \boldsymbol{A}_u)$ 是系统(1)的非平凡解且 $u \in \mathcal{N}$。

最后我们证明 u 是基态解。

$$\mathcal{J}|_{\mathcal{N}}(u) = \frac{p-1}{2(p+1)} \left(\|\nabla u\|_2^2 + \omega \|u\|_2^2 \right) + \frac{p-3}{4(p+1)} \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2} \|\nabla \boldsymbol{A}_u\|_2^2 + \frac{p-1}{2(p+1)} \int_{\mathbb{R}^3} |l\nabla\theta - \boldsymbol{A}_u|^2 u^2 \mathrm{d}x ,$$

根据 Fatou 引理和范数函数的弱下半连续性可知

$$\inf_{\mathcal{N}} \mathcal{J}(u) \le \mathcal{J}(u) \le \liminf_{n} \mathcal{J}(u_n) = \inf_{\mathcal{N}} \mathcal{J}(u) .$$

4. 结论

本文研究了一类静电磁 Schrödinger-Maxwell 系统涡旋基态解的存在性。通过柱对称处理旋度算子，把强不定问题约化为定的问题，最后利用 Nehari 流形方法证明基态解的存在性。

基金项目

山西省自然科学基金面上项目(202303021211056)。

参考文献

[1] Benci, V. and Fortunato, D. (1998) An Eigenvalue Problem for the Schrödinger-Maxwell Equations. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, **11**, 283-293. https://doi.org/10.12775/TMNA.1998.019

[2] D'Aprile, T. and Mugnai, D. (2004) Solitary Waves for Nonlinear Klein-Gordon-Maxwell and Schrödinger-Maxwell Equations. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A*: *Mathematics*, **134**, 893-906. https://doi.org/10.1017/S030821050000353X

[3] d'Avenia, P. (2002) Non-Radially Symmetric Solutions of Nonlinear Schrödinger Equation Coupled with Maxwell Equations. *Advanced Nonlinear Studies*, **2**, 177-192. https://doi.org/10.1515/ans-2002-0205

[4] Azzollini, A., d'Avenia, P. and Pomponio, A. (2010) On the Schrödinger-Maxwell Equations under the Effect of a

General Nonlinear Term. *Annales de l'Institut Henri Poincaré C*, *Analyse Non Linéaire*, **27**, 779-791. https://doi.org/10.1016/j.anihpc.2009.11.012

[5] Ambrosetti, A. and Ruiz, D. (2008) Multiple Bound States for the Schrödinger-Poisson Problem. *Communications in Contemporary Mathematics*, **10**, 391-404. https://doi.org/10.1142/S021919970800282X

[6] Alves, C.O., Souto, M.A.S. and Soares, S.H. (2011) Schrödinger-Poisson Equations without Ambrosetti-Rabinowitz Condition. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **377**, 584-592. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2010.11.031

[7] Jiang, Y. and Zhou, H.S. (2014) Schrödinger-Poisson System with Singular Potential. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **417**, 411-438. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2014.03.034

[8] Mugnai, D. (2011) The Schrödinger-Poisson System with Positive Potential. *Communications in Partial Differential Equations*, **36**, 1099-1117. https://doi.org/10.1080/03605302.2011.558551

[9] Ruiz, D. (2006) The Schrödinger-Poisson Equation under the Effect of a Nonlinear Local Term. *Journal of Functional Analysis*, **237**, 655-674. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2006.04.005

[10] Siciliano, G. (2010) Multiple Positive Solutions for a Schrödinger-Poisson-Slater System. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **365**, 288-299. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2009.10.061

[11] Benci, V. and Fortunato, D. (2009) Three-Dimensional Vortices in Abelian Gauge Theories. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **70**, 4402-4421. https://doi.org/10.1016/j.na.2008.10.023

[12] Azzollini, A. and Pomponio, A. (2008) Ground State Solutions for the Nonlinear Schrödinger-Maxwell Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **345**, 90-108. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2008.03.057

[13] Benci, V. and Fortunato, D. (2010) Spinning Q-Balls for the Klein-Gordon-Maxwell Equations. *Communications in Mathematical Physics*, **295**, 639-668. https://doi.org/10.1007/s00220-010-0985-z

[14] d'Avenia, P., Mederski, J. and Pomponio, A. (2017) Vortex Ground States for Klein-Gordon-Maxwell-Proca Type Systems. *Journal of Mathematical Physics*, **58**, 041503. https://doi.org/10.1063/1.4982038

[15] D'Aprile, T. and Mugnai, D. (2004) Non-Existence Results for the Coupled Klein-Gordon-Maxwell Equations. *Advanced Nonlinear Studies*, **4**, 307-322. https://doi.org/10.1515/ans-2004-0305

[16] Azzollini, A. and Pomponio, A. (2010) Ground State Solutions for the Nonlinear Klein-Gordon-Maxwell Equations. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, **35**, 33-42.

[17] Lions, P.L. (1984) The Concentration-Compactness Principle in the Calculus of Variations. The Locally Compact Case, Part 2. *Annales de l'Institut Henri Poincaré C*, *Analyse Non Linéaire*, **1**, 223-283. https://doi.org/10.1016/s0294-1449(16)30422-x

[18] Willem, M. (1996) Minimax Theorems, Birkhäuser, Boston. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4146-1