

# 几类特殊图的广义邻接距离谱

孙会路

浙江师范大学数学科学学院, 浙江 金华

收稿日期: 2024年3月23日; 录用日期: 2024年4月21日; 发布日期: 2024年4月28日

## 摘要

图谱理论近年来被很多学者广泛研究, 其中对广义矩阵的研究吸引了很多学者。最近, Pastén 和 Rojo 引入了一种新的广义矩阵, 为邻接矩阵和距离矩阵的凸线性组合, 称为广义邻接距离矩阵。此外, 谱极值问题也是图谱理论中的一个重要课题。一些特殊图类经常被作为极值图类来研究, 如: 块无差异图, 菠萝图等。本文研究了四类特殊图的广义邻接距离谱, 不仅对邻接谱和距离谱进行了推广, 也对其邻接距离谱进行了推广。

## 关键词

等划分, 图的谱, 广义邻接距离矩阵

# Generalized Adjacency Distance Spectrum of Several Classes of Special Graphs

Huilu Sun

School of Mathematical Sciences, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: Mar. 23<sup>rd</sup>, 2024; accepted: Apr. 21<sup>st</sup>, 2024; published: Apr. 28<sup>th</sup>, 2024

## Abstract

Graph theory has been widely studied by many scholars in recent years, among which the study on generalized matrix has attracted many scholars. Recently, Pasten and Rojo introduced a new generalized matrix, which is a convex linear combination of the adjacency matrix and the distance matrix, called the generalized adjacency distance matrix. In addition, extremal spectrum is also an important subject in spectrum theory. Some special graphs are often studied as extremal graphs, such as block indifference graphs, pineapple graphs, etc. In this paper, we study the generalized adjacency distance spectrum of four kinds of special graphs. We generalize not only the adjacency spectrum and distance spectrum, but also their adjacency distance spectrum.

## Keywords

Equal Division, Spectrum of a Graph, Generalized Adjacency Distance Matrix

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

图谱理论近年来被很多学者广泛研究, 其中对广义矩阵的研究吸引了很多学者. 在2017年, Nikiforov [1] 给出了图 $G$  的广义邻接矩阵 $A_\alpha(G)$  的定义:  $A_\alpha(G) = \alpha D_e(G) + (1 - \alpha)A(G)$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$ , 简称为图 $G$  的 $A_\alpha$  矩阵. 显然, 广义邻接矩阵 $A_\alpha(G)$  是邻接矩阵 $A(G)$  和度对角矩阵 $D_e(G)$  的凸线性组合.

在2022年, Brondani 等人在文献 [2] 中研究了四类特殊图: 菠萝图 $K_p^q$ , 块无差异图,  $KK_n^l$  图和 $\mathcal{H}_n^l$  图的 $A_\alpha$ 特征值, 并给出了这些图的 $A_\alpha(G)$  矩阵半正定时 $\alpha$  需要满足的条件.

最近, Pastén 和Rojo 在文献中研究了一种新的广义矩阵, 为邻接矩阵 $A(G)$  和距离矩阵 $D(G)$  的凸线性组合, 称为广义邻接距离矩阵, 用 $S_\alpha(G)$  表示, 且 $S_\alpha(G) = \alpha D(G) + (1 - \alpha)A(G)$ . 当 $\alpha = \frac{1}{2}$  时,  $S_{\frac{1}{2}}(G) = \frac{1}{2}S(G)$ , 其中 $S(G) = A(G) + D(G)$  为图 $G$  的邻接距离矩阵. 关于邻接距离矩阵的更多细节可见文献 [3].

此外, 谱极值问题也是图谱理论中的一个重要课题. 一些特殊图类经常被作为极值图类来研究, 如: 块无差异图, 图 $\mathcal{H}_n^l$ , 菠萝图 $K_p^q$  和图 $KK_n^l$  (相关研究可见文献 [4–7]).

因此, 本文对上述几类特殊图的广义邻接距离谱进行了刻画. 由此不仅推广了邻接谱和距离谱的结果, 还推广了邻接距离谱的结果.

## 2. 预备知识

本节主要介绍本文需要用到的一些基本概念和定义, 以便后续使用.

本文研究的图均为简单无向连通图. 给定一个图 $G$ , 其阶数为 $n$ , 令 $A(G)$  和 $D_e(G)$  分别代表图 $G$  的邻接矩阵和度对角矩阵. 图 $G$  中两点 $v$  和 $w$  的距离定义为连接 $v$  和 $w$  两点的最短路径的长度, 用 $d_{vw}$  来表示.

**定义2.1.** [8] 令 $A$  为一个 $n$  阶对称矩阵, 其行和列指标用集合 $V = \{1, 2, \dots, n\}$  表示. 如果 $\{V_1, V_2, \dots, V_k\}$  是集合 $V$  的一个划分且 $|V_i| = n_i, i = 1, 2, \dots, k$ , 那么可将 $A$  写为如下的分块矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,k} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{k,1} & A_{k,2} & \cdots & A_{k,k} \end{bmatrix},$$

其中 $A_{i,j}$  代表 $A$  的 $n_i \times n_j$  阶子矩阵,  $1 \leq i, j \leq k$ .

令 $b_{i,j}$  代表子矩阵 $A_{i,j}$  的平均行和, 那么矩阵 $B = (b_{i,j})$  为矩阵 $A$  的商矩阵. 此外, 如果每个子矩阵 $A_{i,j}$  的行和都是一个固定的数, 那么称上述划分为等划分, 对应的矩阵 $B$  被称为矩阵 $A$  的商矩阵.

**定义2.2.** [9] 令 $G_0(n_1, n_2, \dots, n_k)$  为包含 $k$  个团的图, 且这 $k$  个团的阶数分别为:  $n_1, n_2, \dots, n_k$ , 其中 $n_i \geq 2, 1 \leq i \leq k$ . 此外,  $G_0(n_1, n_2, \dots, n_k)$  中 $k$  个团的连接方式如下:

(1)  $G_0(n_1) = K_{n_1}$ ;

(2)  $G_0(n_1, n_2)$  由团 $K_{n_1}$  和 $K_{n_2}$  粘合一个点得到;

(3)  $G_0(n_1, n_2, \dots, n_t)$  是由图 $G_0(n_1, n_2, \dots, n_{t-1})$  中的团 $K_{n_{t-1}}$  与团 $K_{n_t}$  粘合一个点得到,  $t < k$ .

那么 $G_0(n_1, n_2, \dots, n_k)$  被称为块无差异图.

给定一个阶数为 $n$  的块无差异图 $G_0(n_1, n_2, \dots, n_k)$ , 用 $\mathbb{Q} = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_k\}$  表示它的最大团的集合, 其中 $|\mathbb{Q}| = k, n_i = |Q_i| \geq 2$  且 $i = 1, \dots, k$ . 那么可用 $R(G) = [n_1, n_2, \dots, n_k]$  来表示图 $G_0(n_1, n_2, \dots, n_k)$ , 其中 $n = \sum_{i=1}^k n_i - k + 1$ , 如图1 为块无差异图 $R(G) = [3, 4, 5]$ .

**定义2.3.** [2] 令 $n \geq 3$  且 $1 \leq l \leq n$ , 那么图 $\mathcal{H}_n^l$  是通过在两个完全图 $K_n$  相对应的 $l$  个顶点之间增加 $l$  条边所得到的图, 如图2 为 $\mathcal{H}_6^3$ .

**定义2.4.** [2] 令 $q \geq 1, p \geq 3$ , 那么菠萝图 $K_p^q$  是通过在完全图 $K_p$  的一个顶点上悬挂 $q$  条边得到的图, 如图3 (a)为 $K_5^3$ .

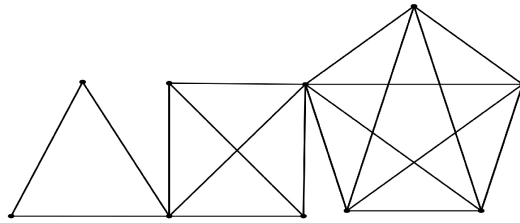


Figure 1.  $R(G) = [3, 4, 5]$

图 1.  $R(G) = [3, 4, 5]$

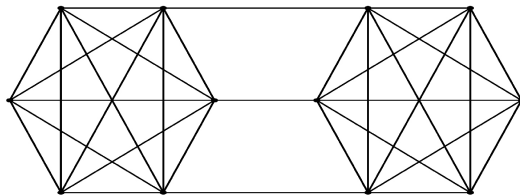
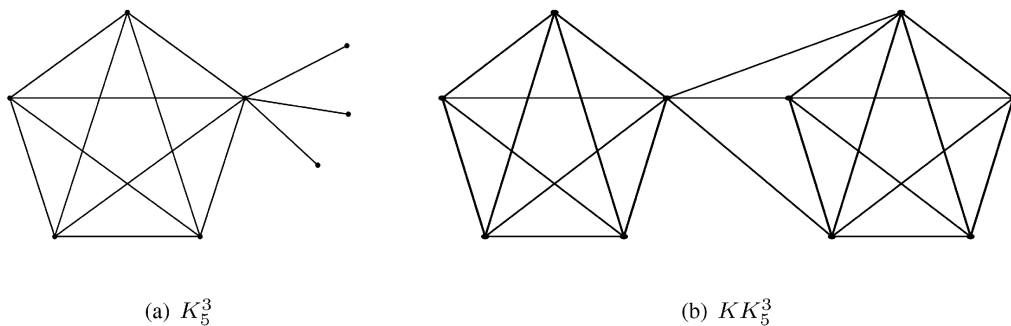


Figure 2.  $\mathcal{H}_6^3$

图 2.  $\mathcal{H}_6^3$

定义2.5. [2] 令  $n \geq 3, 1 \leq l \leq n$ , 那么图  $KK_n^l$  是通过在一个完全图  $K_n$  的一个顶点和另外一个阶数相同的完全图  $K_n$  的  $l$  个顶点之间增加  $l$  条边得到的图, 如图3(b)为  $KK_5^3$ .



(a)  $K_5^3$

(b)  $KK_5^3$

Figure 3.  $K_5^3$  and  $KK_5^3$

图 3.  $K_5^3$  和  $KK_5^3$

引理2.6. [8] 如果矩阵  $B$  是矩阵  $A$  的等划分商矩阵, 那么矩阵  $B$  的所有特征值一定也为矩阵  $A$  的特征值.

引理2.7. [10] 如果矩阵  $P = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ C_2 & C_1 \end{bmatrix}$  为一个分块矩阵, 那么  $\lambda$  是矩阵  $P$  的特征值当且仅当  $\lambda$  是矩阵  $C_1 + C_2$  或矩阵  $C_1 - C_2$  的特征值.

### 3. 几类特殊图的广义邻接距离谱

本节主要研究块无差异图,  $\mathcal{H}_n^l$  图, 菠萝图  $K_n^q$  和  $KK_n^l$  图的广义邻接距离谱. 借助等划分, 商矩阵及相关知识得到了这几类特殊图的广义邻接距离谱, 不仅对邻接谱和距离谱进行了推广, 也对其

邻接距离谱进行了推广. 除此之外, 也为后续研究邻接距离谱极值问题奠定了一定的基础.

### 3.1. 块无差异图的广义邻接距离谱

本节主要利用等划分和商矩阵知识刻画了块无差异图的广义邻接距离谱. 该结果推广了文献 [11] 中对毛毛虫图的线图(即块无差异图)的邻接谱的结果, 而且也推广了块无差异图的距离谱和邻接距离谱的结果.

**定理3.1.** 令  $G = G_0(n_1, n_2)$  为块无差异图, 且  $\alpha \in [0, 1)$ ,  $n_1 \leq n_2$ , 那么块无差异图  $G$  的  $S_\alpha$  特征值为  $-1$  及多项式  $f_{s_1}(x)$  的三个根, 其中特征值  $-1$  的重数为  $n_1 + n_2 - 4$ ,  $f_{s_1}(x) = -x^3 + (n_1 + n_2 - 4)x^2 + [4\alpha^2(n_1 - 1)(n_2 - 1) + 3n_1 + 3n_2 - n_1n_2 - 6]x + 4\alpha(n_1 - 1)(n_2 - 1) + 3n_1 + 3n_2 - 2n_1n_2 - 4$ .

**证明.** 通过对图  $G$  的顶点适当标号, 可得其广义邻接距离矩阵  $S_\alpha(G)$  如下:

$$\begin{bmatrix} J_{n_1-1} - I_{n_1-1} & J_{(n_1-1) \times 1} & 2\alpha J_{(n_1-1) \times (n_2-1)} \\ [0.3cm] J_{1 \times (n_1-1)} & 0 & J_{1 \times (n_2-1)} \\ 2\alpha J_{(n_2-1) \times (n_1-1)} & J_{(n_2-1) \times 1} & J_{n_2-1} - I_{n_2-1} \end{bmatrix}.$$

因为  $S_\alpha(G) + I_{n_1+n_2-1}$  的前  $n_1 - 1$  行相同, 后  $n_2 - 1$  行也相同, 所以  $0$  一定为  $S_\alpha(G) + I_{n_1+n_2-1}$  的特征值且重数至少为  $n_1 + n_2 - 4$ . 这意味着  $-1$  为  $S_\alpha(G)$  的特征值且重数至少为  $n_1 + n_2 - 4$ .

至于  $S_\alpha(G)$  的剩余特征值, 可由其商矩阵  $B_{s_1}$  获得. 现在, 易得

$$B_{s_1} = \begin{bmatrix} n_1 - 2 & 1 & 2\alpha(n_2 - 1) \\ n_1 - 1 & 0 & n_2 - 1 \\ 2\alpha(n_1 - 1) & 1 & n_2 - 2 \end{bmatrix}.$$

由引理2.6 可得,  $B_{s_1}$  的特征值一定也是  $S_\alpha(G)$  的特征值. 通过计算,  $B_{s_1}$  的特征多项式为  $f_{s_1}(x)$ .

故定理得证. □

**推论3.2.** 当  $\alpha$  取不同的值时, 有如下结果:

(1) 当  $\alpha = 0$  时,  $S_\alpha(G) = A(G)$ . 此时, 块无差异图的广义邻接距离特征值即为邻接特征值, 与文献 [11] 中的定理1 结果一致.

(2) 当  $\alpha = \frac{1}{2}$  时,  $S_\alpha(G) = S(G)$ . 此时, 块无差异图的广义邻接距离特征值即为邻接距离特征值.

(3) 当  $\alpha = 1$  时,  $S_\alpha(G) = D(G)$ . 此时, 块无差异图的广义邻接距离特征值即为距离特征值.

由于广义邻接距离矩阵为邻接矩阵和距离矩阵的凸线性组合, 所以可以通过计算图  $G$  的邻接谱和距离谱来验证图  $G$  的广义邻接距离谱的正确性.

**例3.3.** 给定块无差异图  $R(G) = [3, 4]$ , 如图4 所示.

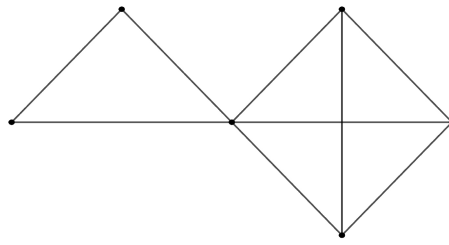


Figure 4.  $R(G) = [3, 4]$

图 4.  $R(G) = [3, 4]$

则其邻接矩阵和距离矩阵分别为:

$$A(R(G)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D(R(G)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

则  $R(G)$  的邻接距离矩阵为:

$$S(R(G)) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

通过计算, 可得邻接矩阵  $A(R(G))$  的特征多项式为:  $f_{s_A}(x) = (x+1)^3(x^3 - 3x^2 - 3x + 7)$ , 距

离矩阵  $D(R(G))$  的特征多项式为:  $f_{s_D}(x) = (x + 1)^3(x^3 - 3x^2 - 27x - 17)$ .

又因为当  $\alpha = 0, n_1 = 3, n_2 = 4$  时,  $f_{s_1}(x) = -x^3 + 3x^2 + 3x - 7$ . 因此, 由定理3.1 可知, 块无差异图  $R(G) = [3, 4]$  的广义邻接距离特征值为  $-1$  以及  $f_{s_1}(x) = -x^3 + 3x^2 + 3x - 7$  的三个根, 其中特征值  $-1$  的重数为3.

同样地, 当  $\alpha = 1, n_1 = 3, n_2 = 4$  时,  $f_{s_1}(x) = -x^3 + 3x^2 + 27x + 17$ . 因此, 由定理3.1 可知, 块无差异图  $R(G) = [3, 4]$  的广义邻接距离特征值为  $-1$  以及  $f_{s_1}(x) = -x^3 + 3x^2 + 27x + 17$  的三个根, 其中特征值  $-1$  的重数为3.

通过观察, 易知  $\frac{1}{2}S(R(G))$  的谱为:  $\{5^{(1)}, -1^{(5)}\}$ . 又因为当  $\alpha = \frac{1}{2}, n_1 = 3, n_2 = 4$  时,  $f_{s_1}(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x + 5 = (x + 1)^2(5 - x)$ . 因此, 由定理3.1 可知, 块无差异图  $R(G) = [3, 4]$  的广义邻接距离谱为:  $\{5^{(1)}, -1^{(5)}\}$ .

综上, 当  $\alpha = 0, n_1 = 3, n_2 = 4$  时, 块无差异图  $R(G) = [3, 4]$  的广义邻接距离谱与其邻接谱保持一致; 当  $\alpha = 1, n_1 = 3, n_2 = 4$  时, 块无差异图  $R(G) = [3, 4]$  的广义邻接距离谱与其距离谱保持一致, 当  $\alpha = \frac{1}{2}$  时, 块无差异图  $R(G) = [3, 4]$  的广义邻接距离谱与其邻接距离谱的  $\frac{1}{2}$  倍保持一致.

### 3.2. 图 $\mathcal{H}_n^l$ 的广义邻接距离谱

**定理3.4.** 令  $\alpha \in [0, 1)$  且  $G \simeq \mathcal{H}_n^l$ . 那么图  $G$  的  $S_\alpha$  特征值为  $-2\alpha, 2\alpha - 2, -1$  以及  $\beta_{s_1}, \beta_{s_2}, \gamma_{s_1}, \gamma_{s_2}$ , 重数分别为  $l-1, l-1, 2(n-l-1), 1, 1, 1, 1$ . 其中  $\beta_{s_1}$  和  $\beta_{s_2}$  是多项式  $m_{s_1}(x)$  的两个根,  $\gamma_{s_1}$  和  $\gamma_{s_2}$  是多项式  $m_{s_2}(x)$  的两个根,  $m_{s_1}(x) = x^2 + [1 - n + \alpha(l - 3n + 2)]x + \alpha^2(6l - 2l^2 - 6n + 2ln) + \alpha(2 - l^2 - 2n + ln) - l$ ,  $m_{s_2}(x) = x^2 + [3 - n + \alpha(3n - l - 2)]x + \alpha^2(6l - 2l^2 - 6n + 2ln) + \alpha(-2 - 6l + l^2 + 8n - ln) + l + 2 - 2n$ .

**证明.** 令  $G \simeq \mathcal{H}_n^l$ . 通过对图  $G$  的顶点适当标号, 可得图  $G$  的广义邻接距离矩阵为  $S_\alpha(G) = \begin{bmatrix} E_s & F_s \\ F_s & E_s \end{bmatrix}$ , 其中

$$E_s = \begin{bmatrix} J_l - I_l & J_{l \times (n-l)} \\ J_{(n-l) \times l} & J_{n-l} - I_{n-l} \end{bmatrix},$$

$$F_s = \begin{bmatrix} 2\alpha J_l + (1 - 2\alpha)I_l & 2\alpha J_{l \times (n-l)} \\ 2\alpha J_{(n-l) \times l} & 3\alpha J_{n-l} \end{bmatrix}.$$

由引理2.7 可得,  $S_\alpha(G)$  的特征值是  $E_s + F_s$  和  $E_s - F_s$  特征值的并. 易得

$$E_s + F_s = \begin{bmatrix} (2\alpha + 1)J_l - 2\alpha I_l & (2\alpha + 1)J_{l \times (n-l)} \\ (2\alpha + 1)J_{(n-l) \times l} & (3\alpha + 1)J_{n-l} - I_{n-l} \end{bmatrix},$$

$$E_s - F_s = \begin{bmatrix} (1 - 2\alpha)J_l + (2\alpha - 2)I_l & (1 - 2\alpha)J_{l \times (n-l)} \\ (1 - 2\alpha)J_{(n-l) \times l} & (1 - 3\alpha)J_{n-l} - I_{n-l} \end{bmatrix}.$$

类似定理3.1 的证明, 易知 $-2\alpha$  和 $-1$  是 $E_s + F_s$  的特征值且重数至少为 $l - 1$  和 $n - l - 1$ .

至于 $E_s + F_s$  的剩余特征值可由其商矩阵 $M_{s_1}$  获得. 容易得到

$$M_{s_1} = \begin{bmatrix} (2\alpha + 1)(l - 1) + 1 & (2\alpha + 1)(n - l) \\ (2\alpha + 1)l & (3\alpha + 1)(n - l) - 1 \end{bmatrix}.$$

由引理2.6 可知,  $M_{s_1}$  的特征值一定也为 $E_s + F_s$  的特征值.

通过计算, 可得 $M_{s_1}$  的特征多项式为 $m_{s_1}(x) = x^2 + [1 - n + \alpha(l - 3n + 2)]x + \alpha^2(6l - 2l^2 - 6n + 2ln) + \alpha(2 - l^2 - 2n + ln) - l$ . 令 $\beta_{s_1}$  和 $\beta_{s_2}$  是 $m_{s_1}(x)$  的两个根, 则 $E_s + F_s$  的谱为 $\{-2\alpha^{(l-1)}, -1^{(n-l-1)}, \beta_{s_1}, \beta_{s_2}\}$ .

同样地, 易知 $2\alpha - 2$  和 $-1$  为 $E_s - F_s$  的特征值且重数至少为 $l - 1$  和 $n - l - 1$ .

至于 $E_s - F_s$  剩余特征值可由其商矩阵 $M_{s_2}$  获得. 容易得到

$$M_{s_2} = \begin{bmatrix} (1 - 2\alpha)(l - 1) - 1 & (1 - 2\alpha)(n - l) \\ (1 - 2\alpha)l & (1 - 3\alpha)(n - l) - 1 \end{bmatrix},$$

则由引理2.6 可知,  $M_{s_2}$  的特征值一定也是 $E_s - F_s$  的特征值.

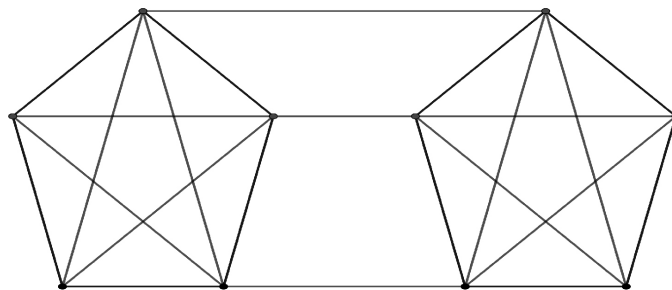
通过计算, 可得 $M_{s_2}$  的特征多项式为 $m_{s_2}(x) = x^2 + [3 - n + \alpha(3n - l - 2)]x + \alpha^2(6l - 2l^2 - 6n + 2ln) + \alpha(-2 - 6l + l^2 + 8n - ln) + l + 2 - 2n$ . 令 $\gamma_{s_1}$  和 $\gamma_{s_2}$  是 $m_{s_2}(x)$  的两个根, 那么 $E_s - F_s$  的谱为 $\{(2\alpha - 2)^{(l-1)}, -1^{(n-l-1)}, \gamma_{s_1}, \gamma_{s_2}\}$ .

最后, 由引理2.7, 可得定理的结果. □

**推论3.5.** 当 $\alpha$  取不同的值时, 有如下结果:

- (1) 当 $\alpha = 0$  时,  $S_\alpha(G) = A(G)$ . 此时, 图 $\mathcal{H}_n^l$  的广义邻接距离特征值即为邻接特征值.
- (2) 当 $\alpha = \frac{1}{2}$  时,  $S_\alpha(G) = S(G)$ . 此时, 图 $\mathcal{H}_n^l$  的广义邻接距离特征值即为邻接距离特征值.
- (3) 当 $\alpha = 1$  时,  $S_\alpha(G) = D(G)$ . 此时, 图 $\mathcal{H}_n^l$  的广义邻接距离特征值即为距离特征值.

**例3.6.** 给定图 $\mathcal{H}_5^3$ , 如图5 所示.



**Figure 5.**  $\mathcal{H}_5^3$

**图 5.**  $\mathcal{H}_5^3$



则其邻接矩阵和距离矩阵分别为:

$$A(\mathcal{H}_5^3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D(\mathcal{H}_5^3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

那么 $\mathcal{H}_5^3$ 的邻接距离矩阵为

$$S(\mathcal{H}_5^3) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

通过计算, 可得邻接矩阵 $A(\mathcal{H}_5^3)$ 的特征多项式为:  $f_{s_A}(x) = x^2(x+1)^2(x+2)^2(x^2-4x-3)(x^2-$

$2x - 5$ ), 距离矩阵  $D(\mathcal{H}_5^3)$  的特征多项式为:  $f_{s_D}(x) = x^2(x+1)^2(x+2)^2(x^2 - 14x - 5)(x^2 + 8x + 9)$ , 邻接距离矩阵  $S(\mathcal{H}_5^3)$  的特征多项式为:  $f_{s_{AD}}(x) = (x+2)^7(x+4)(x^2 - 18x - 16)$ , 故  $\frac{1}{2}S(\mathcal{H}_5^3)$  的谱为:  $\{(-1)^{(7)}, -2, \frac{9+\sqrt{97}}{2}, \frac{9-\sqrt{97}}{2}\}$ .

又因为当  $\alpha = 0, n = 5, l = 3$  时,  $m_{s_1}(x) = x^2 - 4x - 3, m_{s_2}(x) = x^2 - 2x - 5$ . 因此, 由定理3.4 可知, 图  $\mathcal{H}_5^3$  的广义邻接距离特征值为  $0, -2, -1$  以及  $m_{s_1}(x) = x^2 - 4x - 3$  的两个根和  $m_{s_2}(x) = x^2 - 2x - 5$  的两个根, 其中特征值  $0, -2, -1$  的重数均为 2.

同样地, 当  $\alpha = 1, n = 5, l = 3$  时,  $m_{s_1}(x) = x^2 - 14x - 5, m_{s_2}(x) = x^2 + 8x + 9$ . 因此, 由定理3.4 可知, 图  $\mathcal{H}_5^3$  的广义邻接距离特征值为  $-2, 0, -1$  以及  $m_{s_1}(x) = x^2 - 14x - 5$  的两个根和  $m_{s_2}(x) = x^2 + 8x + 9$  的两个根, 其中特征值  $0, -2, -1$  的重数均为 2.

当  $\alpha = \frac{1}{2}, n = 5, l = 3$  时,  $m_{s_1}(x) = x^2 - 9x - 4, m_{s_2}(x) = x^2 + 3x + 2$ . 因此, 由定理3.4 可知, 图  $\mathcal{H}_5^3$  的广义邻接距离特征值为  $-1, -2$  以及  $\frac{9+\sqrt{97}}{2}, \frac{9-\sqrt{97}}{2}$ , 重数分别为:  $7, 1, 1, 1$ .

综上, 当  $\alpha = 0, n = 5, l = 3$  时, 图  $\mathcal{H}_5^3$  的广义邻接距离谱与图  $\mathcal{H}_5^3$  的邻接谱保持一致; 当  $\alpha = 1, n = 5, l = 3$  时, 图  $\mathcal{H}_5^3$  的广义邻接距离谱与图  $\mathcal{H}_5^3$  的距离谱保持一致, 当  $\alpha = \frac{1}{2}, n = 5, l = 3$  时, 图  $\mathcal{H}_5^3$  的广义邻接距离谱与图  $\mathcal{H}_5^3$  的邻接距离谱的  $\frac{1}{2}$  倍保持一致.

### 3.3. 菠萝图 $K_p^q$ 的广义邻接距离谱

本节主要利用等划分和商矩阵知识刻画了菠萝图  $K_p^q$  的广义邻接距离谱. 该结果推广了文献 [12] 中菠萝图  $K_p^q$  邻接谱和文献 [13] 中菠萝图  $K_p^q$  距离谱的结果, 而且也推广了菠萝图  $K_p^q$  邻接距离谱的结果.

**定理3.7.** 令  $\alpha \in [0, 1), G \simeq K_p^q$  且  $n = p + q$ , 则图  $G$  的  $S_\alpha$  特征值为  $-1, -2\alpha$  以及多项式  $f_{s_2}(x)$  的三个根. 其中特征值  $-1, -2\alpha$  的重数分别为  $p - 2, q - 1, f_{s_2}(x) = -x^3 + [p - 2 + 2\alpha(q - 1)]x^2 + [p - 1 - 2\alpha(p - 2)(q - 1) + q + 4\alpha^2(p - 1)q]x + 2\alpha(p - 1)(q + 1) - (p - 2)q$ .

**证明.** 通过对图  $G$  的顶点适当标号, 图  $G$  的广义邻接距离矩阵  $S_\alpha(G)$  可以表示如下:

$$\begin{bmatrix} 0 & J_{1 \times (p-1)} & J_{1 \times q} \\ J_{(p-1) \times 1} & J_{p-1} - I_{p-1} & 2\alpha J_{(p-1) \times q} \\ J_{q \times 1} & 2\alpha J_{q \times (p-1)} & 2\alpha J_q - 2\alpha I_q \end{bmatrix}.$$

因为  $S_\alpha(G) + I_n$  有  $q + 2$  个不同的行, 所以  $0$  一定是  $S_\alpha(G) + I_n$  的特征值且重数至少为  $p - 2$ . 这意味着  $-1$  为  $S_\alpha(G)$  的特征值且重数至少为  $p - 2$ .

类似地,  $S_\alpha(G) + 2\alpha I_n$  有  $p + 1$  个不同的行, 这意味着  $-2\alpha$  一定为  $S_\alpha(G)$  的特征值且重数至少为  $q - 1$ .

至于  $S_\alpha(G)$  的剩余特征值, 可由其商矩阵  $B_{s_2}$  获得. 易得,

$$B_{s_2} = \begin{bmatrix} 0 & p - 1 & q \\ 1 & p - 2 & 2\alpha q \\ 1 & 2\alpha(p - 1) & 2\alpha(q - 1) \end{bmatrix}.$$

由引理2.6 可知,  $B_{s_2}$  的特征值一定也是  $S_\alpha(G)$  的特征值. 通过计算,  $B_{s_2}$  的特征多项式为  $f_{s_2}(x)$ .

故定理得证. □

**推论3.8.** 当  $\alpha$  取不同的值时, 有如下结果:

(1) 当  $\alpha = 0$  时,  $S_\alpha(G) = A(G)$ . 此时, 菠萝图  $K_p^q$  的广义邻接距离特征值即为邻接特征值, 与文献 [12] 中的命题1.1 结果一致.

(2) 当  $\alpha = \frac{1}{2}$  时,  $S_\alpha(G) = S(G)$ . 此时, 菠萝图  $K_p^q$  的广义邻接距离特征值即为邻接距离特征值.

(3) 当  $\alpha = 1$  时,  $S_\alpha(G) = D(G)$ . 此时, 菠萝图  $K_p^q$  的广义邻接距离特征值即为距离特征值, 与文献 [13] 中的定理2.3 结果一致.

**例3.9.** 给定菠萝图  $K_6^4$ , 如图6 所示.

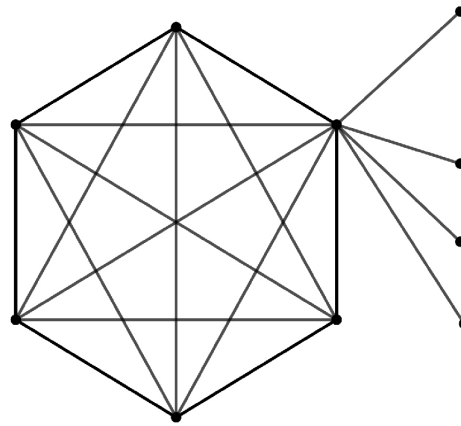


Figure 6.  $K_6^4$

图 6.  $K_6^4$

则其邻接矩阵和距离矩阵分别为:

$$A(K_6^4) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D(K_6^4) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

那么  $K_6^4$  的邻接距离矩阵为:

$$S(K_6^4) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

通过计算, 可得邻接矩阵  $A(K_6^4)$  的特征多项式为:  $f_{s_A}(x) = x^3(x+1)^4(x^3 - 4x^2 - 9x + 16)$ , 距离矩阵  $D(K_6^4)$  的特征多项式为:  $f_{s_D}(x) = (x+1)^4(x+2)^3(x^3 - 10x^2 - 65x - 34)$ .

又因为当  $\alpha = 0, p = 6, q = 4$  时,  $f_{s_2}(x) = -x^3 + 4x^2 + 9x - 16$ . 因此, 由定理3.7 可知, 菠萝图  $K_6^4$  的广义邻接距离特征值为  $-1, 0$  以及  $f_{s_2}(x) = -x^3 + 4x^2 + 9x - 16$  的三个根, 其中特征值  $-1$  和  $0$  的重数分别为  $4$  和  $3$ .

同样地, 当  $\alpha = 1, p = 6, q = 4$  时,  $f_{s_2}(x) = -x^3 + 10x^2 + 65x + 34$ . 因此, 由定理3.7 可知, 菠萝图  $K_6^4$  的广义邻接距离特征值为  $-1, -2$  以及  $f_{s_2}(x) = -x^3 + 10x^2 + 65x + 34$  的三个根, 其中特征值  $-1$  和  $-2$  的重数分别为  $4$  和  $3$ .

通过观察, 易知  $\frac{1}{2}S(K_6^4)$  的谱为:  $\{9^{(1)}, -1^{(9)}\}$ . 又因为当  $\alpha = \frac{1}{2}, p = 6, q = 4$  时,  $f_{s_2}(x) = (x+1)^2(9-x)$ . 因此, 由定理3.7 可知, 菠萝图  $K_6^4$  的广义邻接距离谱为:  $\{9^{(1)}, -1^{(9)}\}$ .

综上, 当  $\alpha = 0, p = 6, q = 4$  时, 菠萝图  $K_6^4$  的广义邻接距离谱与其邻接谱保持一致; 当  $\alpha = 1,$

$p = 6, q = 4$  时, 菠萝图  $K_6^4$  的广义邻接距离谱与其距离谱保持一致, 当  $\alpha = \frac{1}{2}, p = 6, q = 4$  时, 菠萝图  $K_6^4$  的广义邻接距离谱与其邻接距离谱的  $\frac{1}{2}$  倍保持一致.

### 3.4. 图 $KK_n^l$ 的广义邻接距离谱

本节主要利用等划分和商矩阵知识刻画了图  $KK_n^l$  的广义邻接距离谱. 该结果推广了文献 [4] 中图  $KK_n^l$  的邻接谱的结果, 而且也推广了图  $KK_n^l$  的距离谱和邻接距离谱的结果.

**定理3.10.** 令  $\alpha \in [0, 1)$  且  $G \simeq KK_n^l$ . 那么图  $G$  的  $S_\alpha$  特征值为  $-1$  以及多项式  $f_{s_3}(x)$  的四个根. 其中, 特征值  $-1$  的重数为  $2n - 4$ ,  $f_3(x) = x^4 + [4 - 2n]x^3 + [\alpha^2(-l + 5n + 5ln - 9n^2) + 6 - l - 6n + n^2]x^2 + [\alpha^2(-5l - 3l^2 + 9n + 16ln - l^2n - 17n^2 + ln^2) + \alpha(4l + 4l^2 - 8ln) + 4 - 3l - l^2 - 6n + 2ln + 2n^2]x + 16\alpha^4(l^2 - ln - l^2n + ln^2) + \alpha^3(-24l^2 + 24ln + 24l^2n - 24ln^2) + \alpha^2(-4l + 5l^2 + 4n + 3ln - 9l^2n - 8n^2 + 9ln^2) + \alpha(4l + 6l^2 - 10ln - 2l^2n + 2ln^2) + 1 - 2l - 2l^2 - 2n + 3ln + l^2n + n^2 - ln^2$ .

**证明.** 通过对图  $G$  的顶点标号, 可得其广义邻接距离矩阵  $S_\alpha(G)$  如下:

$$\begin{bmatrix} J_{n-1} - I_{n-1} & J_{(n-1) \times 1} & 2\alpha J_{(n-1) \times l} & 3\alpha J_{(n-1) \times (n-l)} \\ J_{1 \times (n-1)} & 0 & J_{1 \times l} & 2\alpha J_{1 \times (n-l)} \\ 2\alpha J_{l \times (n-1)} & J_{l \times 1} & J_l - I_l & J_{l \times (n-l)} \\ 3\alpha J_{(n-l) \times (n-1)} & 2\alpha J_{(n-l) \times 1} & J_{(n-l) \times l} & J_{n-l} - I_{n-l} \end{bmatrix}.$$

因为  $S_\alpha(G) + I_{2n}$  有 4 行不同, 所以  $0$  一定是  $S_\alpha(G) + I_{2n}$  的特征值且重数至少为  $n - 4$ . 这意味着  $-1$  是  $S_\alpha(G)$  的特征值且重数至少为  $n - 4$ .

至于  $S_\alpha(G)$  的剩余特征值, 可由其商矩阵  $B_{s_3}$  获得. 易得,

$$B_{s_3} = \begin{bmatrix} n - 2 & 1 & 2\alpha l & 3\alpha(n - l) \\ n - 1 & 0 & l & 2\alpha(n - l) \\ 2\alpha(n - 1) & 1 & l - 1 & n - l \\ 3\alpha(n - 1) & 2\alpha & l & n - l - 1 \end{bmatrix}.$$

由引理 2.6 可知,  $B_{s_3}$  的特征值一定也是  $S_\alpha(G)$  的特征值. 通过计算,  $B_{s_3}$  的特征多项式为  $f_{s_3}(x)$ .

故定理得证. □

**推论3.11.** 当  $\alpha$  取不同的值时, 有如下结果:

(1) 当  $\alpha = 0$  时,  $S_\alpha(G) = A(G)$ . 此时, 图  $KK_n^l$  的广义邻接距离特征值即为邻接特征值, 与文献 [4] 中的定理 2.2 结果一致.

(2) 当  $\alpha = \frac{1}{2}$  时,  $S_\alpha(G) = S(G)$ . 此时, 图  $KK_n^l$  的广义邻接距离特征值即为邻接距离特征值.

(3) 当  $\alpha = 1$  时,  $S_\alpha(G) = D(G)$ . 此时, 图  $KK_n^l$  的广义邻接距离特征值即为距离特征值.

**例3.12.** 给定图  $KK_6^4$ , 如图 7 所示.

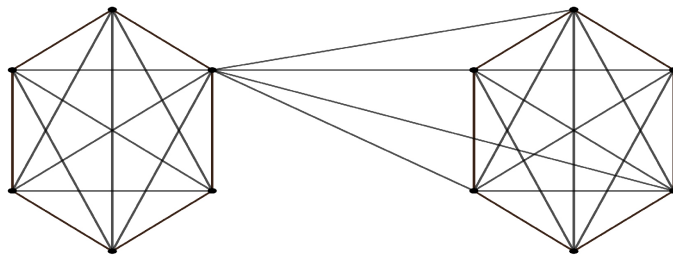


Figure 7.  $KK_6^4$

图 7.  $KK_6^4$

则其邻接矩阵和距离矩阵分别为:

$$A(KK_6^4) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D(KK_6^4) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

那么  $KK_6^4$  的邻接距离矩阵为:

$$S(KK_6^4) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

通过计算, 可得邻接矩阵  $A(KK_6^4)$  的特征多项式为:  $f_{s_A}(x) = (x+1)^8(x^4 - 8x^3 + 2x^2 + 60x + 9)$ , 距离矩阵  $D(KK_6^4)$  的特征多项式为:  $f_{s_D}(x) = (x+1)^8(x^4 - 8x^3 - 176x^2 - 246x - 39)$ , 邻接距离矩阵  $S(KK_6^4)$  的特征多项式为:  $f_{s_{AD}}(x) = (x+2)^9(x^3 - 18x^2 - 134x - 88)$ .

又因为当  $\alpha = 0, n = 6, l = 4$  时,  $f_{s_3}(x) = x^4 - 8x^3 + 2x^2 + 60x + 9$ . 因此, 由定理3.10 可知, 图  $KK_6^4$  的广义邻接距离特征值为  $-1$  以及  $f_{s_3}(x) = x^4 - 8x^3 + 2x^2 + 60x + 9$  的四个根, 其中特征值  $-1$  的重数为8.

同样地, 当  $\alpha = 1, n = 6, l = 4$  时,  $f_{s_3}(x) = x^4 - 8x^3 - 176x^2 - 246x - 39$ . 因此, 由定理3.10 可知, 图  $KK_6^4$  的广义邻接距离特征值为  $-1$  以及  $f_{s_3}(x) = x^4 - 8x^3 - 176x^2 - 246x - 39$  的四个根, 其中特征值  $-1$  的重数为8.

当  $\alpha = \frac{1}{2}, n = 6, l = 4$  时,  $f_{s_3}(x) = \frac{1}{2}(x+1)(2x^3 - 18x^2 - 67x - 22)$ . 因此, 由定理3.10 可知, 图  $KK_6^4$  的广义邻接距离特征值为  $-1$  以及  $g_s(x) = 2x^3 - 18x^2 - 67x - 22$  的三个根, 其中特征值  $-1$  的重数为9. 令  $g_{s_3}(x) = x^3 - 18x^2 - 134x - 88$ , 则  $g_{s_3}(2x) = 4(2x^3 - 18x^2 - 67x - 22)$ . 因此, 结合  $S(KK_6^4)$  的特征多项式  $f_{s_{AD}}(x)$  可知,  $\frac{1}{2}S(KK_6^4)$  的特征值为  $-1$  以及  $g_s(x) = 2x^3 - 18x^2 - 67x - 22$  的三个根, 其中特征值  $-1$  的重数为9.

综上, 当  $\alpha = 0, n = 6, l = 4$  时, 图  $KK_6^4$  的广义邻接距离谱与其邻接谱保持一致; 当  $\alpha = 1, n = 6, l = 4$  时, 图  $KK_6^4$  的广义邻接距离谱与其距离谱保持一致, 当  $\alpha = \frac{1}{2}, n = 6, l = 4$  时, 图  $KK_6^4$  的广义邻接距离谱与其邻接距离谱的  $\frac{1}{2}$  倍保持一致.

### 4. 结语

本文主要对块无差异图, 图  $\mathcal{H}_n^l$ , 菠萝图  $K_p^q$  和图  $KK_n^l$  的广义邻接距离谱进行了刻画. 借助等划分, 商矩阵及相关知识得到了这几类特殊图的广义邻接距离谱, 不仅对邻接谱, 距离谱, 邻接距离谱进行了推广, 也为后续研究邻接距离谱极值问题奠定了基础. 接下来可依据这些特殊结构图的谱, 考

虑在给定图类中的广义邻接距离谱极值问题, 从而将邻接谱极值和距离谱极值进行推广.

## 参考文献

- [1] Nikiforov, V. (2017) Merging the  $A$ - and  $Q$ -Spectral Theories. *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, **11**, 81-107. <https://doi.org/10.2298/AADM1701081N>
- [2] Brondani, A.E. and França, F.A.M. and Oliveira, C.S. (2022) Positive Semidefiniteness of  $A_\alpha(G)$  on Some Families of Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **323**, 113-123. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2020.12.007>
- [3] Schultz, H.P. (1989) Topological Organic Chemistry. 1. Graph Theory and Topological Indices of Alkanes. *Journal of Chemical Information and Computer Sciences*, **29**, 227-228. <https://doi.org/10.1021/ci00063a012>
- [4] Freitas, M., Del-Vecchio, R. and Abreu, N. (2010) Spectral Properties of  $KK_n^j$  Graphs. *Matemática Contemporânea*, **39**, 129-134. <https://doi.org/10.21711/231766362010/rmc3915>
- [5] Tait, M. and Tobin, J. (2017) Three Conjectures in Extremal Spectral Graph Theory. *Journal of Combinatorial Theory. Series B*, **126**, 137-161. <https://doi.org/10.1016/j.jctb.2017.04.006>
- [6] Zhai, M., Lin, H. and Wang, B. (2012) Sharp Upper Bounds on the Second Largest Eigenvalues of Connected Graphs. *Linear Algebra and Its Applications*, **437**, 236-241. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2012.02.004>
- [7] Belardo, F. and Li Marzi, E.M. and Simić, S.K. and Wang, J. (2010) On the Index of Necklaces. *Graphs and Combinatorics*, **26**, 163-172. <https://doi.org/10.1007/s00373-010-0910-4>
- [8] Brouwer, A.E. and Haemers, W.H. (2012) Spectra of Graphs. Springer, New York. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-1939-6>
- [9] de Abreu, N.M.M., Justel, C.M., Markenzon, L., Oliveira, C.S. and Waga, C.F.E.M. (2019) Block-Indifference Graphs: Characterization, Structural and Spectral Properties. *Discrete Applied Mathematics*, **269**, 60-67. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2018.11.034>
- [10] Nath, M. and Paul, S. (2014) On the Distance Laplacian Spectra of Graphs. *Linear Algebra and Its Applications*, **460**, 97-110. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2014.07.025>
- [11] Rojo, O. (2011) Line Graph Eigenvalues and Line Energy of Caterpillars. *Linear Algebra and Its Applications*, **435**, 2077-2086. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2011.03.064>
- [12] Topcu, H., Sorgun, S. and Haemers, W.H. (2016) On the Spectral Characterization of Pineapple Graphs. *Linear Algebra and Its Applications*, **507**, 267-273. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2016.06.018>
- [13] Pirzada, S. and Mushtaq U. (2023) On the Eigenvalues of the Distance Matrix of Families of Graphs with Given Number of Pendent Vertices. Preprint.