Advances in Education 教育进展, 2017, 7(5), 283-288
Published Online September 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2017.75043

On Train University Students' Innovative Ability in Higher Mathematics Teaching from $1 = ?0.\dot{9}$

Yiju Wang[1], Shuquan Wang[1], Hongchun Sun[2]

[1]School of Management, Qufu Normal University, Rizhao Shandong
[2]School of Mathematics and Statistics, Linyi University, Linyi Shandong
Email: wang-yiju@163.com, sunhongchun@lyu.edu.cn

Received: Sep. 2nd, 2017; accepted: Sep. 8th, 2017; published: Sep. 26th, 2017

Abstract

The traditional teaching mode of higher mathematics, which is based on teaching-receiving teaching, is difficult to adapt to the cultivation of university students' innovative ability. In this paper, based on teaching experience of advanced mathematics in many years, the characteristics of mathematics were combined to improve students' creative ability. In the teaching of advanced mathematics, we have carried out the reform and practice in the following aspects, from the enlightenment of paying attention to mathematics thought and method, the application of mathematics knowledge, proficiency of mathematics knowledge and the main role of students etc. The self cultivation model of creative ability based on "self localization and initiative innovation" is constructed.

Keywords

Higher Mathematics Teaching, University Student, Innovation Ability, Culture

从$1 = ?0.\dot{9}$看高等数学教学中大学生创新能力的培养

王宜举[1]，王树泉[1]，孙洪春[2]

[1]曲阜师范大学管理学院，山东 日照
[2]临沂大学数学与统计学院，山东 临沂
Email: wang-yiju@163.com, sunhongchun@lyu.edu.cn

收稿日期：2017年9月2日；录用日期：2017年9月17日；发布日期：2017年9月26日

文章引用: 王宜举，王树泉，孙洪春．从$1 = ?0.\dot{9}$看高等数学教学中大学生创新能力的培养[J]．教育进展，2017，7(5): 283-288. DOI: 10.12677/ae.2017.75043

摘　要

以“讲授–接授”为主的高等数学传统教学模式难以适应大学生创新能力的培养。本文基于多年的高数教学经验，结合数学学科的特点，以提高学生的创新能力为目标，在高等数学课堂教学中，从注重数学思想和方法的启迪性，突出数学知识的应用性、熟练性以及发挥学生的主体作用等方面进行了改革与实践，构建了以“自主定位，主动创新”为内涵的创新能力自我培养模式。

关键词

高等数学教学，大学生，创新能力，培养

1. 引言

笔者在最近的高等数学课堂教学中，给某大二理科班的学生布置了如下一道数学题：1 和无穷循环小数 $0.\dot{9}$ 孰大孰小?学生异口同声地回答：“1 比 $0.\dot{9}$ 大!”。我听后微微一笑，然后给出了这道题的正确答案：在 $1/3 = 0.\dot{3}$ 两边同乘以 3 得到 $1 = 0.\dot{9}$。结论得证。

学生看到我给出的答案后，一阵惊讶。看到学生惊讶的神情，我也很惊讶：这是一道很简单的数学问题，具有小学文化程度的人就应该能证明它，为什么这些大学生们就不能呢?由此，我感到目前数学应试教育存在问题的严重性。

近年来，很多高校不断改革传统人才培养模式，在学生个性化培养、交叉复合型人才培养、实践教学改革、构建创新人才培养体系等方面进行了有效的探索，并取得了较好的成果。例如：山东大学通过实施增加学生“三种经历”、举办暑期学校、加强教育拓展等改革措施，实施教学内容与方法改革等，在开放环境中增强学生的创新意识和创新能力[1]。江龙华[2]指出必须采用开放式教学方法，多方位、多角度、多层面地培养学生的创新能力。王瑞芳等[3]指出要传授给学生丰富的创新知识基础，并注意培养学生各种创新素质，促进其创新能力的发展。郑宏等[4]提出培养具有创新精神和创新能力的人才要改革以传授–接受教学模式为主的大学传统教学模式，并指出传授–讨论教学模式能凸现学生的主体地位，转变学生学习的思维模式。

众所周知，高等数学是大学理工及经济、金融等很多专业的一门重要的基础课程，其内容包括微积分、线性代数和概率统计等。这门学科不仅在学生的后继课程和以后更深层次的学习与研究中具有重要作用，而且随着时代的发展和科技的进步，数学在其他学科中的作用越来越大。学生进入大学，也就从初等数学的学习转入高等数学的学习。而从有限过度到无限，从低维过度到高维，从确定过度到随机，从具体过度到抽象是初等数学和高等数学的分水岭。进入高等数学学习后，数学高度的逻辑性和强的抽象性日渐突出。如果在高等数学的课堂教学中不对学生学习的方式方法进行调整，就会使学生对高等数学产生畏难情绪。目前，国内一些专家学者从不同的角度，围绕高等数学教学中如何培养学生的创新能力开展了一系列卓有成效的工作，取得了可喜的成果，如张智广[5]，严可颂[6]，方晓峰等[7]，汪仲文[8]，游扬[9]等。毫无疑问，目前国内高校大多高等数学的教学仍为教师台上讲，学生台下听，并辅以例题讲解和习题训练等传统方式提高学生的学习成绩。这种教学方法单一、注重考试成绩的教学方式存在着“理论教学与实践应用相剥离，知识传授与能

力培养相脱节”的教学问题，无疑会降低学生对高等数学的学习热情和兴趣，不利于学生数学创新能力的培养。为提高教学效果，我们需要针对性地改进教学思路，挖掘学生的开拓思维能力、逻辑性思维能力和发散性思维能力，培养学生的创新意识、创新思维、创新技能、创新人格，提高学生发现问题、应用所学数学知识解决问题的能力，构建以“自主定位，主动创新”为内涵的创新能力自我培养模式。

2. 高等数学教学中学生创新能力的培养

根据数学学科逻辑性和抽象性强的特点，笔者想从以下角度对高等数学的教学进行改革与实践，以提高学生的创新能力。

2.1. 认识、挖掘并重视数学思想和方法

数学教育本质上是一种素质教育。因此，高等数学是培养大学生创新能力的重要环节，而要实现这一点，就要在课堂教学中注重学生学习能力和创新能力的培养，而不仅仅是数学知识的传授。

数学是不断创新和发展的，现在看来非常完美的数学理论和方法，在一开始却往往是混乱甚至是不可思议的。经过许多数学家去伪存真、去粗取精等方面的努力才使其成为教科书中的经典理论。在教学过程中，要让学生理解和体验数学知识产生、形成和发展的创造过程，与数学家们一起享受发现创造知识的快乐，提高他们的学习兴趣，同时也让学生了解数学家发现问题、解决问题的思路和方法，培养学生的创造能力。

很多数学概念和结论的形成通常蕴涵着丰富的数学思想和方法。基于此，在高数的课堂教学中，老师要改变那种从定义到定理再到推论的纯数学教学方式，而应该让学生在掌握高等数学基本概念、基本理论和基本方法的同时，对其中隐含的数学思想有深刻的认识。这就要求我们在课堂教学中，需要精心设计和组织教学内容，充分展示数学概念的形成过程和数学定理获得证明的探索过程，让学生从中受到启发，亲身体验创造知识的整个过程，这有助于培养学生勇于探索和自主创新的思维方式。

数学思想是数学的灵魂，是解决问题的关键。数学的思想方法多是隐性的，需要在课堂教学中提炼挖掘，并有意识地将这些思想渗透到课堂的题目训练中，从而让学生潜移默化地掌握这些思想方法，并运用它们解决问题，以提高他们数学的应用能力和创新能力。数学思想有很多，下面简单地介绍数学上的化繁为简、化整为零，攀亲思想，极限逼近思想。

1) 化繁为简。在线性代数中，矩阵的各类标准型是一个常用的概念。它在矩阵分析中的作用不言而喻。我们知道，任意一个方阵都相似于一个上三角矩阵，也就是说，上三角阵是任意方阵的一个标准型。那么这个标准型意义何在?实际上，几乎原矩阵的所有有用信息都被该标准型提炼出来。如由此标准型可以推知原矩阵的非奇异性，而且在矩阵对称的条件下可以推知矩阵的正定性。这就是数学上化繁为简的魅力。我们自然要问，为什么将一个矩阵进行相似变换后化为一个简单的标准型可以看到它有用的信息?实际上，这如同我们观看景色时的找角度。如果角度不对，那么看到的景色一定不美，甚至很乱。但如果能找到一个好的角度，美丽的景色将尽收眼底。

2) 化整为零。对线性方程组，高斯消元法是一个最基本的方法。但如果在课堂教学中，仅讲授求解过程，而不讲解该方法背后隐含的数学思想，那么这节课就不算成功。因为学生很难自己体会消元法的数学思想。实际上，消元法的数学思想很简单：那就是化整为零。

我们知道，对线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

如果没有矩阵逆的概念，我们无法给出上述方程组的解。而对单个方程，我们也无法求出变量的解。对这个问题，我们自然想到它的至亲：一元方程 $ax=b$。对该一元方程，它的解很容易求 $x=b/a$。由此，我们自然想到如果能将上面的方程组化成一元方程 $ax=b$ 的形式，不就可以求解了。要实现这一点，自然是消元。具体操作是将方程组的第一个方程两边都除以 a_{11} 后再分别乘以 $(-a_{i1})$ 后依次加到后边各个方程，得到如下方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \quad\quad\vdots \\ a'_{n2}x_2 + \cdots + a'_{nn}x_n = b'_n \end{cases}$$

其中 $a'_{ij} = a_{ij} - \dfrac{a_{1j}}{a_{11}}a_{i1}, j = 2,3,\cdots,n; b'_j = b_j - \dfrac{b_1}{a_{11}}a_{i1}, j = 2,3,\cdots,n$。

重复上述过程有限次后得到

$$\begin{aligned} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ & a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ & \quad\quad\vdots \\ & a_{nn}^{'\cdots'}x_n = b_n^{'\cdots'} \end{aligned}$$

这样，最后一个方程就是 $ax=b$ 的形式，由此求得 x_n 的解。将其代入倒数第二个方程得到 x_{n-1} 的解。最后得到 x_1 的解。

3) 攀亲思想。我们在求解某个数学问题，常发觉该问题与某个有现成解法的数学问题及其相似，那么我们能否套用这个现成的解法求解该问题呢?这中间就有一个攀亲的过程。

根据概率论的定义容易推出概率的有限可加性。也就是对于相互独立的事件 A,B，$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$。那么，如果事件 A,B 不相互独立，事件 $A\cup B$ 的概率怎么求呢?

事实上，由于独立事件和的概率等于事件概率的和，对于非独立事件，自然就想借助前面的结论求解。而要做到这一点，就需要我们向前面的问题攀亲，也就是将非独立事件的和化成独立事件的和：将事件 A 与 B 的和等价地表示称独立事件 A 与 $(B-AB)$ 的和。这样利用概率的有限可加性和概率的减法公式得，$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$。

4) 逼近和极限思想。数学上的逼近和极限思想最早用于圆周率的计算。为计算圆周长，人们将圆进行多等分，然后用等腰三角形底的长度和来逼近圆周长。将该等分无限制地增多后，这些等腰三角形底的长度和就是圆周长。这是初等数学上逼近和极限思想的应用案例。

进入高等数学的微积分教学，为求一个曲线围成的区域的面积，人们将该区域进行切割，通过多个梯形面积的和来逼近该区域，并将该切割无限制增大便得到积分这一概念。

实际上，高数上 Taylor 展式就是用一个微分性质最好的多项式函数去逼近一个高阶连续可微函数。基于这一点，如果用求一个多项式函数的 Taylor 展式时就很简单了。如多项式函数 x^2+5 在 0 点的 Taylor 展开式就是它本身。

2.2. 突出数学知识的应用性

如果从数学到数学，无疑数学是枯燥的。在数学教学过程中，我们要学会用数学知识解决我们遇到的实际问题。这样学习起来才有兴趣和意义。

众所周知，实数分为有理数和无理数。根据中小学数学课本上的定义，无穷循环小数称为有理数，而无穷不循环小数称为无理数。而且我们还被告知所有分数都是有理数。我们自然会问：有理数和分数

之间什么关系?实际上，它们是等价的。而要证明这一点，只需证明分数和无穷循环小数等价即可。

首先证明：任意分数 q/p 都是无穷循环小数。事实上，根据数学上除法的定义，若整数 q, p 可以整除，则余数为零，它是以零循环小数。若不能整除，则余数 d_1 满足 $1 < d_1 < p$。在余数 d_1 后面补零后继续用 p 去除，若可以除尽，则得到是以零循环小数，否则余数 d_2 满足 $1 < d_2 < p$。此时若 $d_1 = d_2$，则分数 q/p 为 d_1 循环小数；否则继续在 d_2 后补零并用 p 去除并验证余数 d_3 与 d_1 或 d_2 是否相等。重复上述过程，那么重复至多 p 次后的余数 d_k 和前面的某个余数相等。这就证明了该分数为 $d_1 d_2 \cdots d_k$ 循环小数。这说明分数一定是循环小数，自然是有理数。

下面以无穷循环小数 $0.\dot{3}\dot{3}\dot{0}\dot{8}$ 为例，证明任意无穷循环小数可以写成 q/p 的形式。

第一种证明：记 $x = 0.350835083508\cdots$。则两边同时乘以 10^4 得

$$10000x = 3508.350835083508\cdots$$

与式子 $x = 0.350835083508\cdots$ 两边分别相减得 $\left(10^4 - 1\right)x = 3508$。从而

$$x = \frac{3508}{10^4 - 1}$$

第二种证明。由于 $0.350835083508\cdots$ 可以写成

$$0.350835083508\cdots = 0.3508 + 0.3508 \times 10^{-4} + 0.3508 \times 10^{-8} + \cdots$$

利用等比数列和的求和公式

$$0.350835083508\cdots = \frac{0.3508}{1 - 10^{-4}} = \frac{3508}{9999}$$

这与前面的结果是一样的。

这些理论仅用了初等数学的知识。如果在课堂教学中，用诸如此类的实际问题训练学生课堂上所学知识，无疑会激发学生对高数的学习热情，启迪学生的创新意识、创新思维、创新技能、创新人格。

对概率论中的大数定律，我们可以结合男女孩出生比例为例进行说明。抛去人为因素，男女孩的出生概率大致相等。正因如此，一个家庭可能只有男孩，可能只有女孩，也可能既有男孩也有女孩。而对于有多个孩子的家庭，男女孩数量不等的居多。而现在国家男女孩人口比例大致相等，这就可以用大数定律来解释。

2.3. 突出数学知识的熟练性

我们都讨厌学习过程中的死记硬背。但我们要明白，任何知识的学习都离不开死记硬背，正所谓的温故知新。从这个层面讲，死记硬背是数学的一门必修课。试想一下，我们对数学上学了两年的加减乘除，不都是靠死记硬背吗?为什么，别人一提 $3+8$，我们马上反应和是 11；别人一提 3×7，我们马上反应是 21。而不会用掰手指头的方法或通过逻辑推导得到这些结果。所以，死记硬背不是一无是处，相反它对我们高数的学习很有帮助。

不但如此，对中学数学课本上一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的求根公式，我们之所以能张嘴就来

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

靠的也是死记硬背，而不是通过配方求解。

对高等数学的学习也是如此，对于高等数学上很多经典的理论和方法，我们需要背和记。如高数上有名的 Taylor 展式

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$$

这需要我们永远记住，而且不能出差错。这在我们的课堂教学中需要提示给学生的。

2.4. 坚持启发式教学，充分发挥学生主体作用

在教学中必须以学生为主体、教师为主导，营造创新学习氛围，通过启发式、基于问题的探究式教学等，指导学生“自主定位、主动求知”。能力的培养要以知识的学习为基础，但又不能简单地归结为“只要知识掌握了，能力也就自然而然地得到发展”，关键在于学生通过什么样的方式获取知识，教师的授课方式起着关键的作用。如果教师的授课是注入式的，学生只会死记硬背，能力就难以发展。反之，如果教师采用启发式的教学方法，充分调动起学生的积极性，让学生真正成为教学活动的主体，那么在教学活动中不仅使学生获取了知识，也为学生的能力发展创造了极为有利的条件。在启发式教学中，要特别注重创设“问题”，启发学生主动分析问题、独立解决问题。教师通过提出精心筛选与设计的问题，深入浅出、形式多样地引导学生温习旧的内容，学习新的知识；学生带着问题去学习、听讲，主动寻求自己解决问题的方法，或提出新的问题，彼此讨论，与老师交互作用，逐步养成自己思考问题的习惯。这样，既调动了学生的学习热情和兴趣，帮助学生加深了对抽象理论的理解，又在不断思考、大胆探索问题的求解过程中激发了他们敢于质疑、敢于探索的创新精神。这种以“学生为主体、教师为主导”的教学方法，对于培养学生的创新能力是非常有益的。

参考文献 (References)

[1] 樊丽明，王仁卿. 开放、综合、研究环境下的创新人才培养模式探索[J]. 中国大学教学, 2009(11): 25-27.

[2] 江龙华. 论基于创新型人才培养的高校教学模式改革[J]. 现代大学教育, 2007(5): 102-105.

[3] 王瑞芳，杨沁，等. 论工程训练与创新人才培养[J]. 合肥工业大学学报(社会科学版), 2002, 16(3): 76-78.

[4] 郑宏，吴沛. 创新人才培养与大学教学模式改革[J]. 大学教育科学, 2004(3): 34-37.

[5] 张智广. 在高等数学教学中培养学生的创新性应用能力[J]. 赤峰学院学报, 2012, 28(6): 245-246.

[6] 严可颂. 如何在高等数学教学中培养学生的创新能力[J]. 高等教育, 2017(2): 84.

[7] 方晓峰，李应岐，曾静. 从高等数学教学谈学生创新能力的培养[J]. 大学数学, 2010(10): 57-61.

[8] 汪仲文. 从高等数学的学科特点出发培养学生的创新能力[J]. 高等理科教育, 2007(4): 10-13.

[9] 游扬. 基于国际化视野背景下的高等数学创新性教学方法研究[J]. 亚太教育, 2016(2): 154-155.