Advances in Education 教育进展, 2023, 13(1), 324-331
Published Online January 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2023.131053

科学思维方法视域下数学分析概念的教学设计

——以“定积分”和“对坐标的曲面积分”为例

贾瑞玲，孙铭娟，邢巧芳

信息工程大学，河南 郑州

收稿日期：2022年12月25日；录用日期：2023年1月23日；发布日期：2023年1月30日

摘 要

本文以“定积分”和“对坐标的曲面积分”为例探讨科学思维方法与数学概念教学的有机结合。通过实际问题引入，激发学生的学习兴趣。在问题探究中，从研究方法、技术路线、结构特征三个方面分析研究结果，然后引导学生抽象概括定积分和对坐标的曲面积分的概念。最后挖掘隐藏在知识背后的思政元素－科学思维方法，这亦是将思政教育渗透到教学实践中的具体表现。

关键词

科学思维方法，思政教育，技术路线，结构特征，积分思想

From the Point of Scientific Thinking the Teaching Design of Concepts in Mathematical Analysis

—Taking “Definite Integral” and “Curved Surface Integral of Coordinate” as an Example

Ruiling Jia, Mingjuan Sun, Qiaofang Xing

Information Engineering University, Zhengzhou Henan

Received: Dec. 25th, 2022; accepted: Jan. 23rd, 2023; published: Jan. 30th, 2023

Abstract

Taking the concepts of definite integral and curved surface integral of coordinate as an example,

文章引用：贾瑞玲，孙铭娟，邢巧芳．科学思维方法视域下数学分析概念的教学设计[J]．教育进展，2023，13(1): 324-331. DOI: 10.12677/ae.2023.131053

this paper discusses the organic combination of thinking method and mathematics concept teaching. Through the introduction of practical problems, it stimulates students' interest in learning. In the discussion of the problem, we analyze the research results from three aspects: research method, technical route and structural characteristics, and then guide students to abstract and generalize the concepts of definite integral and curved surface integral of coordinate. Finally, we explore the ideological and political elements hidden behind knowledge-scientific thinking method, which is a reflection of the ideological and political education into teaching practice.

Keywords

Scientific Thinking Method, Ideological and Political Education, Technical Route, Structural Characteristics, The Integral Idea

1. 引言

《数学分析》是各大高校数学专业的必修基础课，它不仅是数学各分支的基础，还是后续专业知识的奠基石，基础不牢，地动山摇。著名数学家华罗庚先生曾说：新的数学方法和概念，常常比解决数学问题本身更重要。而概念本身就蕴含着丰富的数学思想和方法，比如极限思想、积分思想等。并且概念的产生过程也蕴含着科学家从事科学研究的一般方法，这些对学生思维观、方法论的形成至关重要。

2020 年 5 月，教育部党组会议审议通过《高等学校课程思政建设指导纲要》[1]，《纲要》指出理学类课程要注重科学思维方法的训练和科学伦理的教育。但数学概念具有高度的抽象性、严密的逻辑性，那么如何将科学思维方法与抽象的概念[2] [3]，有机融合并春风化雨般渗透到教学实践中呢？本文以“定积分”和“对坐标的曲面积分”的教学设计为例阐述数学概念中蕴含的科学思维方法。

2. 定积分概念的教学设计

定积分[2] [3] [4] [5]是从实际问题中抽象出来的数学概念，是数学分析教学中的一个重要知识模块。它是学习微积分的基础知识，也是后续教学内容(定积分的应用、重积分、曲线积分、曲面积分)的必备知识，更是解决许多实际问题的工具。定积分理论的建立对于数学的发展产生了深远的影响。

2.1. 教学目标

1) 知识与技能：了解定积分的背景；理解定积分的概念、几何意义、物理意义；体会定积分的本质思想，会用定义计算简单的定积分。

2) 过程与方法：通过分析不同背景问题中蕴含的相同数学内涵，培养学生分析、探究、归纳得出数学概念和规律的学习能力，提高从数学角度分析和看待问题的能力。

3) 情感与价值观：第一：通过对不同背景下的问题用相同的数学方法进行揭示，认识数学与实际生活的联系。第二：探讨定义中所体现的数学思想，一是近似的思想，体现为以直线代替曲线，以规则代替不规则；二是极限的思想，体现为由近似值得到精确值时，需取极限；三是积分思想，主要解决不均匀型问题；进而折射出人生哲理，不积跬步，无以至千里；不积小流，无以成江海。

2.2. 教学内容、重点以及重难点的处理方法

1) 教学内容：定积分的概念和意义、可积性、定积分存在的充分条件、必要条件。

2) 教学重点：利用“分割、近似代替、求和、取极限”四个步骤，归纳出定积分的概念。

3) 教学难点：定积分概念、“无限逼近”思想的形成过程及理解。

4) 教学重难点的处理方法：通过问题引入，激发学生的学习兴趣。在问题探究中，结合 PPT 动画展示“小矩形面积和”无限接近“曲边梯形面积”的过程，化抽象理解为直观演示。然后从研究方法、技术路线、结构形式上对结果分析，抽象概括出定积分的概念(如图 1)。

2.3. 教学过程

2.3.1. 问题引入

介绍当今世界上面积前十国家(播放视频)，每个国家的陆地边界，形状迥异，有的迂回曲折，有的犬牙交错。随之将话题转到各个国家的陆地面积是如何计算出来的呢？将知识迁移到实际问题中，使学生感受到数学知识来源于生活服务于生活，激发学生学习的积极性。

2.3.2. 问题探究

各个国家的陆地面积的计算问题，就抽象为数学问题：如何求平面封闭曲线所围成的图形的面积。对于这样一个不规则的平面图形，它的面积是无法直接求解的，如何处理呢？

问题简化：对问题简化是研究问题的第一步，这亦是一般性的科学研究方法。

分析：对图形分割，那么要求这个不规则图形的面积就转化为求曲边梯形的面积(问题的本质)。

引例 1 已知曲边梯形是由连续曲线 $y=f(x)\left(f(x)\ge 0\right)$ 及 x 轴、直线 $x=a$， $x=b$ 所围成，求其面积 A。

分析 类比与求解问题关联最紧密的简单情形。

1) 若 $f(x)=c$ (常数)，则面积 $A=c(b-a)$。

2) 若闭区间 $[a,b]$ 的长度很小，则 $f(x)$ 可近似看作常数，转化为情形 1)。

3) 对一般的闭区间 $[a,b]$，如何求解呢？

根据 1)和 2)，可用矩形面积近似代替曲边梯形面积。直观上：小矩形的个数越多，其面积之和越接近曲边梯形的面积。

引导学生思考：如果无限细分下去，所得小矩形的面积之和的极限即为曲边梯形面积的精确值。

通过“分割、近似代替、求和、取极限”可求得曲边梯形的面积 $A=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$。

提问 通过取极限，当无限细分时，实现从近似过渡到精确。那如何刻画无限细分？能否用 $n\to\infty$ 刻画呢？

注 1 引导学生体会用有限来研究无限的哲学思想。

引例 2 已知某物体作直线运动，速度 $v=v(t)\in C[T_1,T_2]$，且 $v(t)\ge 0$，求在运动时间内物体经过的路程 s。

引例 1 与引例 2 完全类似，利用“分割、近似代替、求和、取极限”的思想，求得物体所经过的路程 $s=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i$。

2.3.3. 概念形成

详细的定积分概念不再陈述[6]。此时回看引例 1 和引例 2。可知曲边梯形的面积 $A=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，其

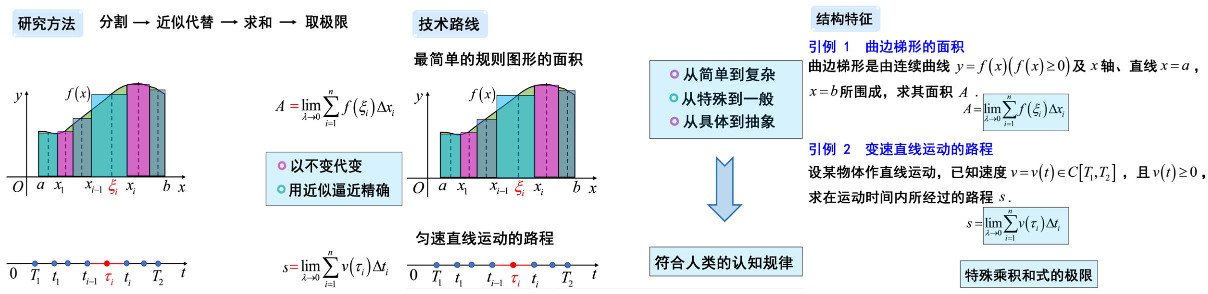

Figure 1. The process of exploring the concept of definite integral
图 1. 定积分概念的探究过程

中 $f(x)\ge 0$，变速直线运动的路程 $s=\int_a^b v(t)\mathrm{d}t$，其中 $v(t)\ge 0$。它们分别从几何角度和物理角度阐述了定积分的意义。引导学生思考如下问题：

1) 若 $f(x)<0$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 与曲边梯形的面积有何关系呢？

2) 对任意的 $f(x)$，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示什么意思？

在此教学环节中，还要启发学生思考定积分存在的充分条件和必要条件。类比函数在一点处极限的定义，引导学生给出定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 定义的“$\varepsilon-\delta$”表述。

2.3.4. 巩固新知

例 1 讨论下列函数在 $[0,1]$ 上的可积性。

1) $f(x)=\begin{cases}-1, & x\in Q\\ 1, & x\in R\setminus Q\end{cases}$；

2) $f(x)=\begin{cases}0, & x\in Q\\ x, & x\in R\setminus Q\end{cases}$。

例 2 求下列平面图形的面积。

1) 计算由 $y=x^2$，$x=1$ 及 x 轴所围成图形的面积 A。

2) 计算由 $y=x^3$，$x=1$，$x=-1$ 及 x 轴所围成图形的面积 A。

例 3 用定积分表示下列极限。

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1+\dfrac{i}{n}}\right)$；

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$。

注 2 例 3 考察学生逆向思维能力。定积分的本质是一类乘积的和式的极限，那么给定一个乘积的和式的极限，如何将其表示为定积分呢？

思考 例 3 的 1)中，若将 $\xi_i=1+\dfrac{i}{n}$，那么 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1+\dfrac{i}{n}}\right)$ 的定积分表达式又是什么形式呢？

2.3.5. 总结思考

如图 2 中的定积分概念的教学设计可做如下思考：

思考与练习

1、定积分主要解决实际中的哪类问题？

2、函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积的充分条件?

3、用定积分表示极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\left(\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{3\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}+\sin\frac{(n+1)\pi}{n}\right)\right)$。

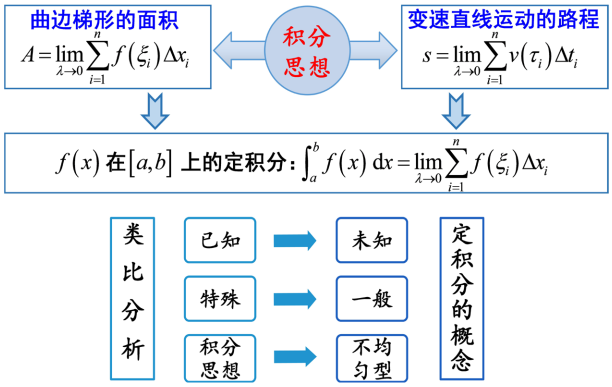

Figure 2. Teaching design of the concept of definite integral
图 2. 定积分概念的教学设计

3. 对坐标的曲面积分概念的教学设计

对坐标的曲面积分[7]是关于在坐标面投影的曲面积分，它是多元函数微积分学的重要组成部分之一，其与重积分、曲线积分、对面积的曲面积分都有联系。

3.1. 教学目标

1) 知识与技能：掌握对坐标的曲面积分概念、性质及其计算方法和步骤。了解利用数学知识解决实际问题的一般过程，提高应用数学知识的意识。

2) 过程与方法：能够将实际问题转化为一个数学问题，通过分析问题，建立不同变量对应的函数关系，求解对坐标的曲面积分，培养学生分析问题、转化问题和解决问题的数学思维和求解能力。

3) 情感与价值观：利用积分思想解决不均匀型问题，让学生体会黎曼积分的辩证统一，加强思政教育；积分思想折射出人生哲理，在奋斗的路上脚踏实地完成一个个小目标，不断追求，总有一天个人梦及中国梦都会实现。

3.2. 教学内容、重点以及重难点的处理方法

1) 教学内容：了解对坐标的曲面积分的物理背景；理解对坐标的曲面积分的概念、性质、计算方法及两类曲面积分之间的联系。

2) 教学重点：对坐标的曲面积分的计算。

3) 教学难点：对坐标的曲面积分的概念的理解、两类曲面积分之间的联系。

4) 教学重难点的处理方法：通过创设情境(三峡大坝泄洪)，引入问题，在问题探究中，从研究过程、技术路线、结构形式上分析流量问题，引导学生抽象概括对坐标的曲面积分的定义(如图 3)。然后借助典型例题展示对坐标的曲面积分的计算，让学生仿照类比，内化于心，掌握其计算方法。

3.3. 教学过程

3.3.1. 问题引入

介绍当今世界上最大的水利发电工程——我国的三峡大坝，随之将话题转到三峡大坝的泄洪作用上，如何计算单位时间内从坝的一侧流向另一侧的河水流量呢？(以视频形式播放)。

3.3.2. 问题探究

引导学生思考：计算流量需要考虑哪些因素？

按照科学研究的一般方法：从简单到复杂、从特殊到一般，从具体到抽象。为方便分析问题和建立数学模型，作以下假设。

假设 不可压缩的流体通过同一个流管作定常流动时，每一时刻流管的各截面流量相同。此时可将上述问题抽象为数学模型。

模型 设流体不可压缩，密度 $\rho = 1$，流体的速度

$$\boldsymbol{v} = \left(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\right) = (P,Q,R),$$

坝体所在的定向曲面为 Σ，函数 P，Q，R 在所讨论范围上连续，求单位时间内流体流过曲面 Σ 指定侧的流量 Φ。为简化符号，将速度 $\boldsymbol{v}$ 的三个分量分别记为 P，Q，R。

分析 对于这种不均匀型问题，引导学生利用“分割－近似代替－求和－取极限”的积分思想和方法解决问题。

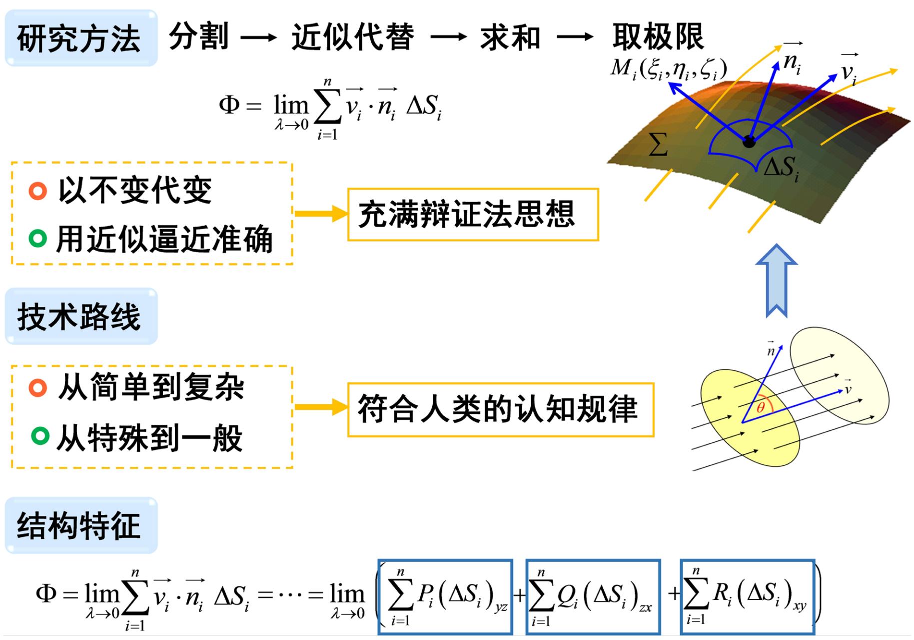

Figure 3. The process of exploring the concept of curved surface integral of coordinate
图 3. 对坐标的曲面积分概念的探究过程

3.3.3. 概念形成

详细的对坐标的曲面积分的概念[8]不再陈述。在这个教学环节中，还要启发学生思考对坐标的曲面积分的性质和计算方法(略)。

3.3.4. 巩固新知

例 4 计算 $I = \iint_{\Sigma} (x+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是平面 $x + y + z = 1$ 与三个坐标面所围成的几何体的表面，方向取外侧。

例 5 计算 $I = \iint_{\Sigma} yz\mathrm{d}y\mathrm{d}z + zx\mathrm{d}z\mathrm{d}x + xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是圆柱面 $x^2 + y^2 = a^2 \left(0 \le z \le h\right)$，方向取外侧。

思考 计算 $I = \iint_{\Sigma} yz\mathrm{d}y\mathrm{d}z + zx\mathrm{d}z\mathrm{d}x + xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是圆柱体 $x^2 + y^2 \le a^2 \left(0 \le z \le h\right)$ 的整个表面，方

向取外侧。

注 3 对比例 5，注意二者的区别与联系。

3.3.5. 总结思考

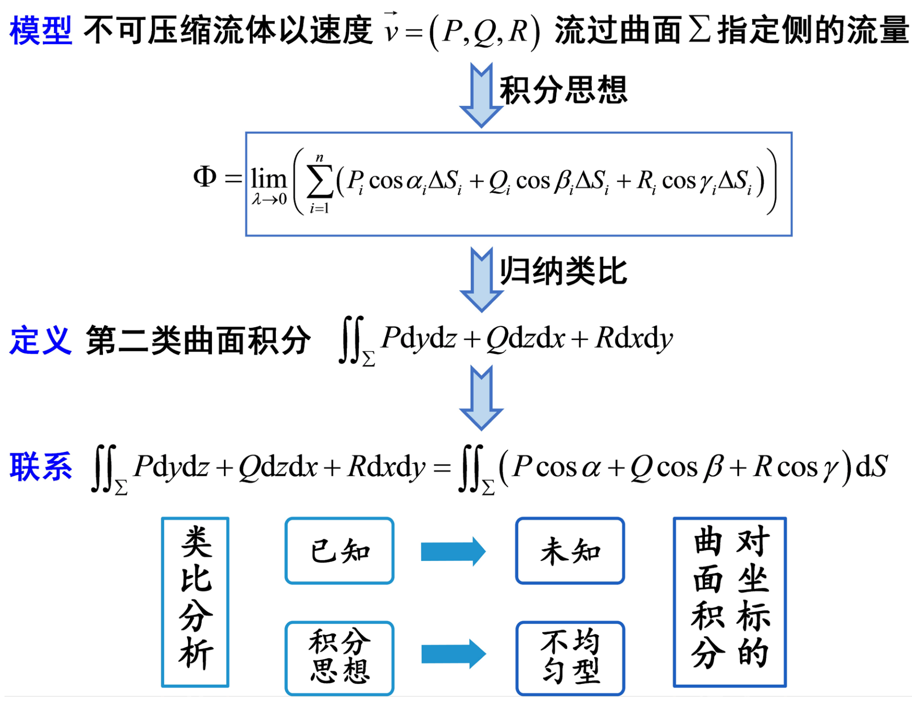

Figure 4. Teaching design of the concept of curved surface integral of coordinate

图 4. 对坐标的曲面积分概念的教学设计

如图 4 中的定积分概念的教学设计可做如下思考：

思考与练习

1、两类曲面积分之间的联系

$$\iint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

其中 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 是 Σ 指定侧的单位法向量。在两类曲面积分的定义中，一个与曲面的侧有关，一个与曲面的侧无关，上述关系式矛盾吗？

2、计算曲面积分 $I=\iint_{\Sigma}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\sqrt{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是抛物面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 介于 $z=0$ 与 $z=2$ 之间的部分，方向取下侧。

3、计算曲面积分 $I=\iint_{\Sigma}(y^2-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z^2-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}\ (0\le z\le h)$，方向取外侧。

4. 结束语

定积分和对坐标的曲面积分是两个不同的概念，它们都蕴含了积分思想(处理不均型问题)，从横向分析的角度看，这二者之间既有联系也有区别。在概念的形成过程中，二者的研究方法(“分割、近似代替、求和、取极限”)、技术路线设计(从简单到复杂，从特殊到一般)是完全类似的；从结构形式上看，二者都是一类有限不定和式的极限，但对坐标的曲面积分是与曲面的侧有关的有限不定和式的极限。

在上述两个概念的教学设计中——问题探究环节，利用已知研究未知，借助积分思想解决不均匀型问题，分析问题特征，化归已知方法，抽象概括出数学概念。这种认识问题、分析问题、解决问题的一个过程，有助于训练学生的科学思维方法，进而培养学生探索未知世界的责任感和使命感。

参考文献

[1] http://www.gov.cn/zhengce/zhengceku/2020-06/06/content_5517606.htm

[2] 徐慧敏, 孟军, 李放歌. 数学教学中思政元素的渗透——以定积分及其应用为例[J]. 理科考试研究. 2022, 29(1): 20-22.

[3] 汪健. 指向数学核心素养的任务设计——以“定积分”的教学为例[J]. 中国数学教育, 2020(24): 22-25.

[4] 王海燕. “微课翻转”与“传统”融合的数学分析教学设计——以“定积分的概念”为例[J]. 佳木斯职业学院学报, 2020, 36(5): 132-133.

[5] 夏正喜. 渗透思想政治教育的定积分概念教学设计[J]. 数学学习与研究, 2019(17): 5.

[6] 陈纪修, 於崇华, 金路. 数学分析(上册) [M]. 第二版. 北京: 高等教育出版社, 2004.

[7] 杜金姬, 王阳洋, 秦闯亮, 王玉磊. 思政元素在《数学分析》概念教学中的应用——以“第二型曲面积分”概念为例[J]. 高等数学研究, 2020, 23(1): 26-28+59.

[8] 崔国忠, 石金娥, 郭从洲. 数学分析(第二册) [M]. 北京: 科学出版社, 2018.