**Advances in Education** 教育进展, 2023, 13(11), 9074-9080
Published Online November 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2023.13111402

# 基于应用实例的线性代数教学方法的探究

**黄　达，樊小琳**

新疆工程学院数理学院，新疆 乌鲁木齐

收稿日期：2023年10月20日；录用日期：2023年11月17日；发布日期：2023年11月24日

## 摘　要

线性代数课程是本科院校工科专业的一门重要的基础理论课，该门课程不仅有很重要的实际应用，而且也是其他一些数学课程的基础课。线性代数的很多概念虽然较为抽象，但只要在线性代数教学过程中，将概念的理解融于线代相关的应用实例，就能让学生们不仅能够掌握知识点，还能够深刻理解其本质，进而能提高他们分析解决应用问题的能力，同时能加强学生对该课程重点知识的记忆。授课老师应该把重点放在如何教学生更好地理解线代的理论，以及如何有效地运用线性代数的理论解决应用问题，而不是仅仅关注学生的解题能力。另一方面，结合实例讲解有利于提升学生对数学类课程的兴趣，培养学生自学能力，进而有助于达成高校培养应用型人才的教育目标。

## 关键词

线性代数，应用实例，教学方法

# Exploration of Linear Algebra Teaching Methods Based on Application Examples

**Da Huang, Xiaolin Fan**

School of Mathematics and Physics, Xinjiang Institute of Engineering, Urumqi Xinjiang

Received: Oct. 20th, 2023; accepted: Nov. 17th, 2023; published: Nov. 24th, 2023

## Abstract

**Linear algebra is an important fundamental theoretical course for engineering majors in undergraduate colleges. This course not only has practical applications with significance, but also serves as a foundation for other mathematics courses. Although many of the concepts of linear algebra**

文章引用: 黄达, 樊小琳. 基于应用实例的线性代数教学方法的探究[J]. 教育进展, 2023, 13(11): 9074-9080.
DOI: 10.12677/ae.2023.13111402

**are relatively abstract, as long as the understanding of concepts is combined with practical examples related to linear algebra in the teaching process, students can not only grasp the knowledge points, but also deeply understand the essence, thereby improving their ability to analyze and solve practical problems, and strengthening their memory of the key knowledge of the course. Teachers should focus on teaching students how to better understand the theory of linear algebra and how to effectively apply the theory to solve practical problems, rather than just focusing on students' problem-solving abilities. On the other hand, combining examples to explain is beneficial for enhancing students' interest in learning mathematics, cultivating students' self-learning ability, and thus helping to achieve the educational goal of cultivating applied talents in universities.**

## Keywords

**Linear Algebra, Application Examples, Teaching Methods**



## 1. 引言

线性代数是一门重要的大学数学课程，它在很多学科领域如计算机、物理学、控制论、统计学有重要应用，还能够帮助构建复杂的数学模型，并且能够简化计算。线性代数的课程对于提升个人的专业知识和自学能力，以及为未来的专业发展打下坚实的数学基础有重要意义，它是理工类专业学生必不可少的基础课程。然而，线性代数课程在教学过程中容易侧重讲述解题方法而缺乏对相关应用的讲解，尤其缺乏应用和相关线代理论的融合讲解，导致学生很难将所学的知识与实际问题相结合。本文提出在线代教学中应注重应用问题的举例和相关建模的讲解，从而提升学生学习该门课程的兴趣和应用能力。为此，本文分四个部分具体分析改进线代教学的方法。本文列举了一些线性代数应用相关的例题，说明了融合线代相关实际问题在该门课程教学中的重要意义，提出了在线代教学的过程中，既要直观理解部分抽象问题，又要融合应用问题进行讲解的教学方法。

## 2. 线代应用实例与教学的结合

### 2.1. 引入线代相关应用问题建立数学模型

在线性代数课程中，我们可以引入一些实际应用问题，如电路分析、网络流量优化、图像处理等。目前为止不少文献已经对线代的相关理论教学在应用问题中的体现做了不错的研究[1]-[8]。通过这类问题中一些相对简单的例题，我们可以让学生将抽象的线性代数知识与实际问题相联系，提高学习的兴趣，激发学生的潜力。针对每个应用问题，引导学生建立数学模型，使用线性代数的工具和概念进行建模分析。例如，在电路分析中，可以使用矩阵方程表示电路中的回路电流模型；在网络流量优化中，可以使用图论和线性方程组来表示网络流量分配。以下举几个实例作为线代相关内容的引例或应用。

例 1. [9]用向量这一线代中常用的概念来寻找相似的句子。

句子 A：我喜欢打篮球，也喜欢打羽毛球；

句子 B：我喜欢打篮球，有点喜欢打羽毛球。

通过比较词语的重复次数，我们可以评估它们之间的相似性。第一步是进行词语分类：

A：我/喜欢/打/篮球，也/喜欢/打/羽毛球；

B：我/喜欢/打/蓝球，有点/喜欢/打/羽毛球。

第二步，计算词频。

句子 A：我 1，喜欢 2，打 2，篮球 1，也 1，羽毛球 1，有点 0；

句子 B：我 1，喜欢 2，打 2，篮球 1，也 0，羽毛球 1，有点 1。

第三步，写出词频向量。

A 句：$(1,2,2,1,1,1,0)=\boldsymbol{a}$，B 句：$(1,2,2,1,0,1,1)=\boldsymbol{b}$。

通过计算 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 间的夹角 $\theta$，可以评估它们在词频结构上的相似性，夹角越小，表明它们之间相似程度越高。对此示例的句子 A 和 B 有，$\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}\approx 0.917$。余弦值越接近于 1，两个向量越相似，即两个句子也越相似。

例 2. 复杂网络同步能力问题。

同步是自然科学和工程技术中广泛存在的现象，研究同步过程的研究有助于理解复杂网络的演化机制，它与矩阵的特征值存在着紧密的联系。刻画复杂网络同步化能力的两个重要指标是网络结构的 Laplacian 矩阵的最大特征值 $\lambda_N$ 和最小非零特征值 $\lambda_2$ [1]。当同步化区域有界，同步能力取决于 $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_N}$ 的比值。当同步化区域无界时，最小非零特征值 $\lambda_2$ 越大，网络的同步能力越强。如图，给定一个 4 个点的网络化系统，不妨假设该系统结构为无向图，且每条边的权重为 1，系统结构如下所示：

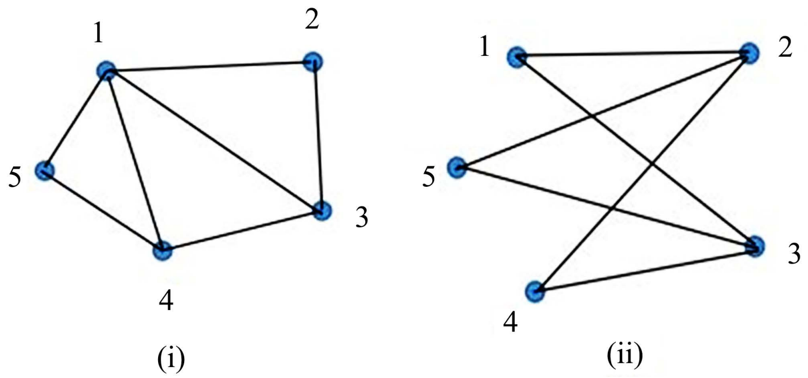


**Figure 1.** Non-isomorphic structures which contain 5 nodes
**图 1.** 非同构且包含 5 个点的网络结构示意图

图 1 中(i)，(ii)两图的 Laplacian 矩阵分别为：

$$\boldsymbol{L}_{(\mathrm{i})}=\begin{pmatrix}4&-1&-1&-1&-1\\-1&2&-1&0&0\\-1&-1&3&-1&0\\-1&0&-1&3&-1\\-1&0&0&-1&2\end{pmatrix};\quad \boldsymbol{L}_{(\mathrm{ii})}=\begin{pmatrix}2&-1&-1&0&0\\-1&3&0&-1&-1\\-1&0&3&-1&-1\\0&-1&-1&2&0\\0&-1&-1&0&2\end{pmatrix},$$

计算可得：$\lambda_2^{(\mathrm{i})}=1.5858$，$\lambda_5^{(\mathrm{i})}=5$；$\lambda_2^{(\mathrm{ii})}=2$，$\lambda_5^{(\mathrm{ii})}=5$，所以网络(ii)的同步能力更强。

在经济学、生态学和工程技术领域，为了更好地理解随时间变化的动力系统，经常会对其进行离散时刻测量。例如在研究种群模型时，我们可以使用形式为 $\boldsymbol{x}_{k+1}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k$，($k=0,1,2,\cdots$)的线性差分方程[10]，其中向量序列：$\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots$。向量 $\boldsymbol{x}_k$ 的各分量表示该系统在第 $k$ 次测量的状态信息。该方程也被称为离散线性动力系统。

例 3. 离散动力系统变化趋势。

假设矩阵 $\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}0.88 & 0.04\\ 0.12 & 0.96\end{pmatrix}$，分析由 $\boldsymbol{\alpha}_{k+1}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{\alpha}_k$，$\boldsymbol{\alpha}_0=\begin{pmatrix}0.7\\ 0.3\end{pmatrix}$ 所确定的离散动力系统的变化趋势。

先解得 $\boldsymbol{F}$ 的特征值为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=0.84$，其对应的特征向量可取为：$\boldsymbol{u}_1=\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}$；$\boldsymbol{u}_2=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$。又 $\boldsymbol{\alpha}_0$ 可表示为 $\boldsymbol{\alpha}_0=a_1\boldsymbol{u}_1+a_2\boldsymbol{u}_2$，所以 $\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0.7\\ 0.3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.25\\ -0.45\end{pmatrix}$。由 $\boldsymbol{F}\boldsymbol{u}_1=\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{F}\boldsymbol{u}_2=0.84\boldsymbol{u}_2$，

$\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{F}\boldsymbol{\alpha}_0=a_1\boldsymbol{u}_1+0.84a_2\boldsymbol{u}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2=a_1\boldsymbol{u}_1+0.84^2a_2\boldsymbol{u}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_k=a_1\boldsymbol{u}_1+0.84^k a_2\boldsymbol{u}_2=0.25\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}-0.45\cdot 0.84^k\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$，($k=0,1,2,\cdots$)，可得当 $k\to\infty$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_k\to 0.25\boldsymbol{u}_1$。

许多实际系统随时间连续变化，相应的微分方程组可以写成矩阵微分方程的形式(比如包含电容器的电路中求解电压随时间变化的关系和粒子在力场中的运动求解位置向量的初值问题等)。特征值不止可以应用在离散动力系统(比如斑点猫头鹰[10]问题)，也可应用在连续动力系统，为工程设计提供知识依据。

例 4. 线性系统的解。

已知线性系统 $x'=\boldsymbol{A}x$，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & 1 & 4\\ 1 & 7 & 1\\ 4 & 1 & 4\end{pmatrix}$，可解得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为：$\lambda_1=0$，$\lambda_2=6$，$\lambda_3=9$，其对应的特征向量分别为：$\boldsymbol{u}_1=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{u}_2=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{u}_3=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$。所以该系统的一般解为：

$x(t)=c_1\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{9t}+c_2\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{6t}+c_3\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$。

化学方程式描述了化学反应的物质消耗与产出的平衡，配平化学方程式的一种方法是建立描述化学反应中每种类型原子数目的向量方程。

例 5. 解线性方程组在配平化学方程式中的应用。

当葡萄糖燃烧时，产生水和二氧化碳，化学方程式如下：

$$a_1\mathrm{C_6H_{12}O_6}+a_2\mathrm{O_2}\to a_3\mathrm{CO_2}+a_4\mathrm{H_2O}$$

要配平该方程式，需找到系数 $a_1,a_2,a_3,a_4$ 的值，使得方程式左右两边各种原子数相等。

列出表示每个分子的组成原子向量如下：

$$\mathrm{C_6H_{12}O_6}:\begin{pmatrix}6\\ 12\\ 6\end{pmatrix},\ \mathrm{O_2}:\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 2\end{pmatrix},\ \mathrm{CO_2}:\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 2\end{pmatrix},\ \mathrm{H_2O}:\begin{pmatrix}0\\ 2\\ 1\end{pmatrix}.$$

可得向量方程为：$a_1\begin{pmatrix}6\\ 12\\ 6\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 2\end{pmatrix}=a_3\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 2\end{pmatrix}+a_4\begin{pmatrix}0\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$，移向然后化简方程组对应的增广矩阵，得通解为：

$a_1=\frac{1}{6}a_4$，$a_2=a_4$，$a_3=a_4$，$a_4$ 为自由未知量，又化学方程式系数为整数，所以取 $a_4=6$，则配平的方程式为：$\mathrm{C_6H_{12}O_6}+6\mathrm{O_2}\to 6\mathrm{CO_2}+6\mathrm{H_2O}$。

计算机被广泛的应用在各个领域，工程和科学领域经常用离散的数据来处理问题。差分方程经常被用来做相关的数据分析。离散时间信号的向量空间 S 中的元素是一个定义在整数上的函数，其元素表示的信号可以是机械的、电的、光的。

例 6. 证明 $0.7^k$，$1^k$，$2^k$ 是线性无关的信号。

对应的 Casorati 矩阵为：$\begin{pmatrix} 0.7^k & 1 & 2^k \\ 0.7^{k+1} & 1 & 2^{k+1} \\ 0.7^{k+2} & 1 & 2^{k+2} \end{pmatrix}$，

取 $k=0$，则矩阵可变换为 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0.3 & 1.3 \\ 0 & 0 & 1.3 \end{pmatrix}$，其对应原矩阵可逆，所以 $0.7^k$，$1^k$，$2^k$ 线性无关。

例 7. 证明信号 $2^k$ 和 $(-4)^k$ 构成差分方程 $x_{k+2}+2x_{k+1}-8x_k=0$ 解集的一个基。

该齐次方程的辅助方程为：$r^2+2r-8=0$，解得根为 2 和−4，所以该差分方程的两个解为 $2^k$ 和 $(-4)^k$，显然它们线性无关，所以 $2^k$ 和 $(-4)^k$ 构成此差分方程二维解空间的一个基。

当学者、工程师研究网络流时会用到线性方程组，例如，城市交通相关的道路交通流量模式；分析销售网络从制造商到顾客的产品销售。网络流的图一般包含节点和有向边，流量有显示或用变量标记。网络流的基本假设是网络的总流入量等于总流出量。

例 8. 求下图中网络流量的通解。

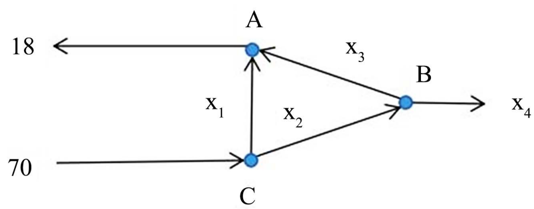


**Figure 2.** A network flow which contains 4 nodes.
**图 2.** 一个包含 4 个节点的网络流

建立如图 2 所示网络流对应的线性方程组模型，矩阵形式为：$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 18 \\ 0 \\ 70 \\ 52 \end{pmatrix}$，

可得通解为：$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 18 \\ 52 \\ 0 \\ 52 \end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$。

## 2.2. 线代相关问题的直观理解

在线代教学过程中可以换个角度更直观的理解一些抽象概念，比如线性方程组是线性代数的重点内容，将解简单线性方程组的过程与矩阵行变化联系起来理解。再比如用线性变换来理解矩阵乘法，从动态的几何的角度去理解矩阵乘法。为了便于解释，不妨以二维空间的变换为例：用矩阵 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ 将 9 个点：(0, 0), (1, 0), (2, 0), (0, 1), (1, 1), (2, 1), (0, 2), (1, 2), (2, 2)进行线性变换，即用此矩阵左乘这 9 个点表示

的向量，相当于将这些向量在二维空间中进行了移动且拉伸的操作，也可理解为该矩阵将原二位空间的单位向量$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$移动到了$\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$，且将$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$移动到$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$，从而得到新的二维空间。在讲述有关矩阵向量乘积的概念时，将矩阵向量乘积 $\boldsymbol{Ax}$ 理解为 $\boldsymbol{A}$ 的列的线性组合，这种理解和表示方法既能简化表述，又能将向量空间和线性方程组联系在一起。再比如理解特征值和特征向量概念，观察定义式 $\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}$，可知特征向量在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 下线性变换作用的结果为该向量的 $\lambda$ 倍，即特征向量在 $\boldsymbol{A}$ 的作用下只能是呈现被拉伸压缩或者反向的效果。再比如行列式(以二阶或三阶行列式为例)表示的几何直观含义为相应矩阵在空间变换后，原来图形体积缩放的大小比例。二阶行列式表示对应的矩阵在对二维平面进行变换后，具体图形面积变化的比例。有时也可引入应用问题背景来理解线性代数的概念，比如当传感器记录图像时，每幅图像都被数字化且储存为矩阵，每一个数可以表示图像上对应点(或像素)的信号强度。线性代数还有数据点拟合的重要应用，比如求最小二乘直线拟合数据点；在一些应用中，需要考虑把数据点拟合成非直线的情况，比如在经济学中的产量和生产成本关系曲线，以及在生态学领域，抛物线被用于描述植物中营养成分的初始量和树叶表面积的关系。线代的应用问题还常与其他数学课程融合，比如随机矩阵的概念以及马尔科夫链的微分方程刻画形式。

## 3. 探索解决方法

通过以上案例分析可知，当建立了数学模型，学生就可以开始探索问题的解决方法，建立数学模型的过程往往和探索解决方法是同时进行的。要解决好线代相关应用问题，需要引起学生对线代这门课的兴趣，提升学生自学的动力，进而促使学生学习线性代数的更多难度较大的或更为抽象的概念或理论，如特征向量与线性变换、内积空间、对称矩阵和二次型等，掌握了更多线代理论，能让学生更好地求解应用问题。在很多线代相关应用问题中，经常是几个知识点融合在一起的，或者是跨数学类学科的综合问题，解决相关问题可以加深学生对不同章节之间知识点联系的理解。所以更全面地掌握线代理论知识和分析解决相关应用问题是互相融合，相辅相成的。通过老师布置的课后作业，学生可以加强理解和记忆线性代数的概念，并学会将其应用于更多实际问题中。在探索问题的解决过程中，通过对线性代数理论的直观理解，能更深刻地理解相关理论的本质。

在分析求解线代应用问题的过程中，我们可以引导学生使用计算工具和编程语言进行实际计算和程序实现。例如，可以使用 MATLAB 或 Python 进行矩阵运算和数值计算，以及编写程序来求解线性方程组等。通过实际操作，学生可以加深对线性代数相关理论的理解，并培养实际应用能力，为培养应用型人才打好基础。

## 4. 线代应用问题的实践拓展

为了进一步巩固学生的应用能力，在平时布置课后作业时，我们可以安排一些难度较大的有意义的应用问题让学生分组研究和讨论。选取一些经典的线性代数应用问题，比如离散或连续动力系统建模问题、求协方差矩阵和多变量数据降维问题等，让学生带着问题研究和讨论，查阅书籍资料，提出解决方案，并以类似小论文的方式展示成果。通过尝试解决线性代数相关应用问题，学生不仅可以巩固所学的知识，加深所学线代理论的理解，还可以提高解决实际问题的能力。培养学生思考能力和自学能力以及总结的能力也是融合应用问题于教学的重要组成部分。在通过应用实例揭示问题的数学本质过程中，可以引导学生联想平时生活中遇到的其他可能跟这门课程有关的问题，可能会发现有些实例本质上可转化为同一类数学模型，可以用相同或相似的方法来解决；也有可能对相关问题进一步拓展的话，从数学本质上看就是这种问题的另一种情况，那我们就可以指导学生进一步掌握相关理论知识，从而更全面地想

出解题方案。通过经典应用实例的启发，可以逐渐培养学生的数学思维能力。

为了让学生更全面系统地了解线代这门课程的重要性，可以组织学生参与项目，包括应用线代知识的科研项目和相关教学项目，承担力所能及的项目相关工作，查阅资料，参与并撰写相关报告。学生可以选择一个自己感兴趣的应用领域，如机器学习、数据分析等，将所学的线性代数知识应用于实际问题中，并通过报告来展示研究成果。这样可以激发学生的学习动力，并培养他们的创新能力和实践能力，同时还可以提升学生的自学能力和信心。

## 5. 总结

线性代数是工科专业基础必修课之一，在实际生产生活中有重要应用，该门课程主要考查学生的抽象思维和逻辑思维能力，与其他数学类课程有紧密联系，比如微分方程，概率统计，通过融合线性代数应用问题的教学方法，可以帮助学生将抽象的线性代数知识与实际问题相结合，提高学习的兴趣和动机。通过引入实际应用问题、建立数学模型、探索解决方法、实际计算与程序实现、案例研究与讨论以及实践项目与报告等环节，可以加深学生对线性代数的理解，并培养学生对课程的兴趣，提升他们的应用能力和创新能力。这种教学方法有利于学生的综合素质提高，也有助于他们将所学的知识应用于未来的科研和实践中。

## 参考文献

[1] 赵雪漪，邓乐斌. 复杂网络在高等代数教学中的应用[J]. 汉江师范学院学报, 2020, 40(3): 138-140.
[2] 王蓉，廖小莲. 特征值与特征向量及其应用案例[J]. 教育现代化, 2018, 5(27): 258-261.
[3] 朱玲. 线性代数中的特征值和特征向量的教学应用案例[J]. 兰州教育学院学报, 2016, 32(12): 86-87+90.
[4] 狄勇婧. 面向实际工程应用的线性代数教学研究[J]. 教育教学论坛, 2017(26): 163-164.
[5] 王海侠，孙和军. 几何直观在特征值问题中的应用[J]. 高等数学研究, 2014, 17(1): 105-108.
[6] 贤锋. 最大特征值及其特征向量的应用[J]. 闽江学院学报, 2006(5): 35-41.
[7] 周薛雪，蔚涛. 线性代数中特征值与特征向量的应用案例教学研究[J]. 教育教学论坛, 2020(2): 237-238.
[8] 江蓉，王守中. 矩阵的秩在线性代数中的应用及其教学方法的探讨[J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2012, 37(8): 175-180.
[9] 同济大学应用数学系. 线性代数[M]. 第 6 版. 北京：高等教育出版社, 2014.
[10] David C. Lay, Steven R. Lay. 线性代数及其应用[M]. 第 5 版. 北京：机械工业出版社, 2018.