

复杂网络视角下多电荷体系静电能

朱 澍*, 朱留华#

玉林师范学院物理与电信工程学院, 广西 玉林

收稿日期: 2024年1月1日; 录用日期: 2024年2月23日; 发布日期: 2024年2月29日

摘要

多电荷体系静电能是系统在形成过程中, 通过外力克服电场力做功而获得的。本文基于复杂网络基础理论, 从连边与节点两种不同角度给出了多电荷体系静电能的表述。进一步验证了这两种表述是一致的。

关键词

复杂网络, 静电能, 稳定平衡, 不稳定平衡

Electrostatic Energy of Multiple Point Charge Systems from the Perspective of Complex Networks

Shu Zhu*, Liuhua Zhu#

School of Physics and Telecommunications Engineering, Yulin Normal University, Yulin Guangxi

Received: Jan. 1st, 2024; accepted: Feb. 23rd, 2024; published: Feb. 29th, 2024

Abstract

The electrostatic energy of multiple point charge systems is obtained by external forces overcoming electric field forces during the formation process of the system. In this article, based on the theory of complex networks, the electrostatic energy of multiple point charge systems is expressed from two different perspectives: edges and nodes. This article further confirms that these two statements are consistent.

Keywords

Complex Networks, Electrostatic Energy, Stable Equilibrium,

*第一作者。

#通讯作者。

文章引用: 朱澍, 朱留华. 复杂网络视角下多电荷体系静电能[J]. 应用物理, 2024, 14(2): 52-57.

DOI: 10.12677/app.2024.142008

Unstable Equilibrium

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

点电荷在其周围空间激发电场, 此电场对于处于其中的其它外来电荷产生力的作用。任何物体的带电过程都是电荷的积累过程, 所以在形成带电体的过程中, 后期进入带电体的电荷, 必然受到前期进入带电体的电荷的阻碍, 外力需要克服电场力做功, 从而消耗外界能量, 根据能的转化和守恒定律, 外界对系统所作的功转化为系统能量的增量, 因此任何带电体系都具有能量, 在静电场体系中, 这种能量叫做静电能。

目前, 对带电体系静电能的研究引起了许多学者的广泛关注。骆超艺研究了移动导体和电介质情况下的静电能, 研究表明: 对于线性电介质, 静电能只与带电系统的最终分布状态有关[1]; 郑世燕以电容、电场强度及电势为主要物理量给出了一般电容器所储存静电能的三种常见计算公式[2]; 李宇翔等人针对导体静电感应情形进行了具体分析, 研究表明: 带电体系的静电能增量只是点电荷与导体间互能的一半[3]; 郑金归纳了点电荷规则排列系统的静电能计算方法[4]。上述研究普遍关注于带电体系的种类及形状, 本文侧重于对离散分布的点电荷系统储存的静电能进行深入细致的分析。

2. 点电荷系的静电能

设真空中某一区域, 有 N 个点电荷分布, 任意两个点电荷之间存在相互作用, 这样的电荷系统可看作是由 N 个彼此相距无限远的点电荷汇聚到一起形成的全局耦合网络。静电能即为电场的能量, 对于点电荷构成的网络, 其相互作用能即为网络储存的静电能。下面我们通过两种不同的网络构建方式, 来计算网络储存的静电能。

方式 1, 这种全局耦合网络是这样形成的: 从编号为 1 的点电荷开始, 依次从无穷远处运输点电荷进入网络, 直至编号为 N 的点电荷进入网络为止, 即按照编号从小到大的次序, 依次运输电荷构建网络。当第 i 个点电荷进入网络时, 外力需克服前 $(i-1)$ 个点电荷的电场力所作的功为:

$$W_i = q_i \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{r_{ji}} \quad (1)$$

式中 r_{ji} 是第 j 个点电荷与第 i 个点电荷之间的距离。当最后一个点电荷, 即编号为 N 的点电荷进入网络时, 整个网络构建完成, 外力所作的总功为:

$$W = \sum_{i=1}^N q_i \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{r_{ji}} \quad (2)$$

已知全局耦合网络的总连边数为 $C_N^2 = N(N-1)/2$, 式 2 改写为:

$$W = \sum_{i=1}^{N(N-1)/2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i q_i}{r_i} \quad (3)$$

式中, Q_i 和 q_i 分别为第 i 条连边两端节点所带的电荷, r_i 是第 i 连边的长度, 式 3 从“连边”的角度给出了整个网络储存的静电能。

方式 2, 这种全局耦合网络也可以通过以下方式形成: 从编号为 N 的点电荷开始, 依次从无穷远处运输点电荷进入网络, 直至编号为 1 的点电荷进入网络为止, 即按照编号从大到小的次序, 依次运输电荷构建网络。当第 i 个点电荷进入网络时, 外力需克服前 $(N-i)$ 个点电荷, 即编号为 $i+1, i+2, \dots, N$ 的点电荷, 附加的电场力所作的功为:

$$W_i = q_i \sum_{j=i+1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{r_{ji}} \quad (4)$$

当最后一个点电荷, 即编号为 1 的点电荷进入网络时, 整个网络构建完成, 外力所作的总功为:

$$W = \sum_{i=1}^N q_i \sum_{j=i+1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{r_{ji}} \quad (5)$$

因为能量是网络状态的单值函数, 所以整个网络储存的静电能与网络的构建方式无关, 式 2 与式 5 求和得:

$$2W = \sum_{i=1}^N q_i \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{r_{ji}} + \sum_{i=1}^N q_i \sum_{j=i+1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{r_{ji}}$$

化简得:

$$W = \sum_{i=1}^N q_i \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{r_{ji}} \quad (6)$$

式 6 从“节点”的角度给出了整个网络储存的静电能。

3. 应用举例

例 1: 如图 1 所示, 在一边长为 d 的立方体的每个顶点上放置一个点电荷 $-e$, 立方体中心放置一个点电荷 $+2e$, 求此带电系统的静电能。

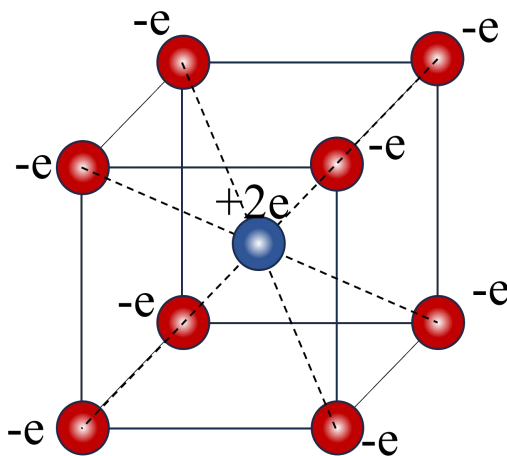
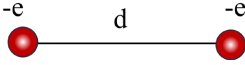
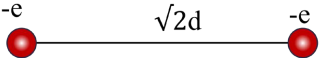
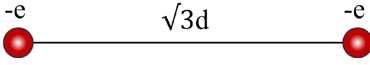
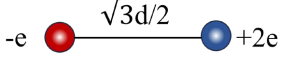


Figure 1. Schematic diagram of multiple point charge system

图 1. 多电荷体系示意图

图 1 可视为由多个点电荷构成的全局耦合网络, 其中网络节点数为 9, 任意两个节点之间都存在一条连边, 因此连边数为 36。为了简约, 图 1 中只画出了 20 条连边。

Table 1. The types and corresponding numbers of edges in the network**表 1.** 网络中的连边类型及相应的数目

| 序号 | 连边类型 | 连边数目 |
|----|--|------|
| 1 |  | 12 |
| 2 |  | 12 |
| 3 |  | 4 |
| 4 |  | 8 |

我们对图 1 所示网络的连边进行分类, 可分为 4 种类型, 如表 1 所示。根据公式 3, 从“连边”的角度, 可获得整个网络储存的静电能:



$$W = \sum_{i=1}^{36} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i q_i}{r_i}$$

$$W = 12 \times \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{d} + 12 \times \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\sqrt{2}d} + 4 \times \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\sqrt{3}d} + 8 \times \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-2e^2}{\sqrt{3}d/2}$$

化简得:

$$W = 0.344 \frac{e^2}{\epsilon_0 d} \quad (7)$$

Table 2. The types and corresponding numbers of nodes in the network**表 2.** 网络中的节点类型及相应的数目

| 序号 | 节点类型 | 节点数目 |
|----|---|------|
| 1 |  | 8 |
| 2 |  | 1 |

接着, 我们对图 1 所示网络的节点进行分类, 可分为 2 种类型, 如表 2 所示。根据公式 6, 从“节点”的角度, 可获得整个网络储存的静电能:

$$W = \sum_{i=1}^9 q_i \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{r_{ji}}$$

$$W = 8(-e) \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \left[\frac{-3e}{d} + \frac{-3e}{\sqrt{2}d} + \frac{-e}{\sqrt{3}d} + \frac{2e}{\sqrt{3}d/2} \right] + 2e \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{-8e}{\sqrt{3}d/2}$$

化简得:

$$W = 0.344 \frac{e^2}{\epsilon_0 d} \quad (8)$$

两种方式统计得到的结果一样。由此可见, 从“连边”的角度统计与从“节点”的角度统计是等效的。在解题中, 教师可根据具体已知条件, 适当点拨, 运用不同的计算公式求解, 这对于提高学生解题能力是有益的, 一题多解培养了学生的发散思维。

例 2: 如图 2 所示, 在一条直线上固定着两个带有同种电荷的点电荷, 带电量分别为 Q 和 q , 两者相距 L 。若在两者之间引入第三个点电荷 q' , 试问放置在距离 Q 多远处, 第三个电荷处于平衡状态, 并根据第三个电荷的电性, 确定平衡类型。



Figure 2. A linear network composed of three point charges
图 2. 三个点电荷组成的线型网络

我们从三个点电荷组成的线型网络储存的静电能角度出发, 网络存在 3 条连边, 如图 2 所示。根据公式 3, 整个网络储存的静电能为:

$$W = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i q_i}{r_i}$$

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Qq'}{r} + \frac{Qq}{L} + \frac{q'q}{L-r} \right) \quad (9)$$

式 9 对 r 求一阶导数得:

$$\frac{dW}{dr} = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{Q}{r^2} + \frac{q}{(L-r)^2} \right] \quad (10)$$

令:

$$\frac{dW}{dr} = 0 \quad (11)$$

解式 11, 得:

$$r = \frac{\sqrt{Q}}{\sqrt{Q} + \sqrt{q}} L \quad (12)$$

此位置即为第三个点电荷处于平衡状态的位置, 与第三个点电荷电性无关。

接下来, 我们根据第三个点电荷电性来确定平衡类型, 式 9 对 r 求二阶导数得:

$$\frac{d^2W}{dr^2} = \frac{q'}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{r^3} + \frac{q}{(L-r)^3} \right] \quad (13)$$

若 q' 与 $Q(q)$ 电性相同, 则 $d^2W/dr^2 > 0$, 此时网络静电能为极小值点, 根据能量越低越稳定原则, 此平衡状态为稳定平衡。 q' 在受到外力的微小扰动而偏离平衡位置时, 它能自动恢复到原先的状态。

反之, 若 q' 与 $Q(q)$ 电性相反, 则 $d^2W/dr^2 < 0$, 此时网络静电能为极大值点, 此平衡状态为不稳定平衡。 q' 在受到外力的微小扰动而偏离平衡位置时, 它无法自动恢复到原先的状态。

4. 总结

点电荷网络的相互作用能, 实际上是整个网络中所有点电荷具有的电势能之和。当多个点电荷组成带电网络时, 假如各点电荷所带电荷电性相同, 外力需做正功, 静电能为正; 当各点电荷所带电荷电性不同时, 运输各点电荷时, 外力做功可能为正, 亦可能为负, 导致整个网络静电能可正可负。

本文对离散分布的点电荷体系储存的静电能进行了深入系统的研究, 分别从“连边”与“节点”的角度给出静电能计算公式, 开阔了学生的视野, 提高了他们一题多解的能力。此外, 我们从能量处于极值的角度, 给出了判断平衡类型的依据, 相比于微扰后的受力分析, 理论性和系统性更强一些。

基金项目

本论文感谢国家自然科学基金项目(61563054)和 2023 年度广西高等教育本科教学改革工程项目(2023JGA285)的资助。

参考文献

- [1] 骆超艺. 移动导体和电介质情况下的静电能公式推导[J]. 大学物理, 2014(5): 13-14, 45.
- [2] 郑世燕. 电容器能量的 3 种求法[J]. 物理通报, 2017(1): 29-30, 33.
- [3] 李宇翔, 黄亦斌. 静电感应时的静电能和电势能[J]. 物理与工程, 2020(5): 92-96.
- [4] 郑金. 探析点电荷排列系统的能量问题[J]. 湖南中学物理, 2021(11): 78-80, 72.