

圆锥曲线的单元教学设计

朱 敏, 陈余喜

湖南科技大学数学与计算科学学院, 湖南 湘潭

收稿日期: 2023年8月2日; 录用日期: 2023年9月7日; 发布日期: 2023年9月14日

摘 要

使用单元教学模式安排知识点传授的课堂, 有利于学生理解数学知识点之间的关系, 更准确地把握知识, 提高学生的应用能力, 有利于教师的新授课更有层次性, 更明显地体现数学思想, 有利于进行素质教育, 提高学生的数学素养。本文以“圆锥曲线”教学为例, 从钻研教材、关注学生、注重学法指导和利用信息技术等角度, 提出了针对设计单元教学内容、设计圆锥曲线单元教学目标、设计单元教学过程和辅助单元教学任务的教学策略。

关键词

单元教学, 圆锥曲线, 核心素养

Unit Teaching Design of Conic Curve

Min Zhu, Shexi Chen

School of Mathematics and Computing, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan Hunan

Received: Aug. 2nd, 2023; accepted: Sep. 7th, 2023; published: Sep. 14th, 2023

Abstract

The use of unit teaching mode to arrange the teaching of knowledge points in the classroom is conducive to students' understanding of the relationship between mathematical knowledge points, more accurate grasp of knowledge, improve students' application ability, help teachers' new teaching classroom more hierarchical, more obvious reflection of mathematical ideas, conducive to quality teaching, improve students' mathematical literacy. Taking "conical curve" teaching as an example, this article takes the teaching of "cone curve" as an example, from studying textbooks, paying attention to students, and paying attention to learning guidance and benefits. From the perspective of information technology, it puts forward the teaching content of the design unit, the teaching objectives of the design conical curve unit, the teaching process of the design unit and teaching strate-

gies for auxiliary unit teaching tasks.

Keywords

Unit Teaching, Conic Curve, Core Literacy

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

单元教学模式是教师基于对教学内容的整体设计和结构化思考,从提升学生数学学科核心素养的角度出发,以重要的数学概念或核心知识、数学思想方法、数学学科核心素养或数学核心能力等为主线组织教学的模式[1]。使用单元教学模式安排知识点传授的课堂,有利于学生理解数学知识点之间的关系,更准确地把握知识,提高学生的应用能力,有利于教师的新授课堂更有层次性,更明显地体现数学思想,有利于进行素质教学,提高学生的数学素养。本文以“圆锥曲线”教学为例,探讨如何更好地进行单元教学设计。

2. 钻研教材,设计单元教学内容

单元教学内容分析要以“四基”为基础,以学科核心素养为指导,达到揭示单元知识内容的本质、挖掘内容蕴含的数学思想方法、明确知识的上下位关系的目标,从此说明单元内容在数学体系中的地位和作用,提炼单元学习在提升能力和培育学科核心素养的具体作用[1]。

“圆锥曲线”的教学内容包括三种圆锥曲线:椭圆、双曲线、抛物线。从单元知识结构的角度分析,这三种曲线包含的知识内容是同构的,主要是曲线定义、几何图形、标准方程、基本几何性质等。在几何知识结构上,椭圆、双曲线和抛物线在圆锥曲线的第一定义是相似的;在代数知识结构上,椭圆、双曲线和抛物线在圆锥曲线的第二定义是相似的。从知识联系的角度分析,这三种圆锥曲线的学习基础都是直线与圆的方程等其他几何和代数知识,在知识衔接和解题方法运用等方面有很多相似性。这三种曲线本单元可分13个课时学习。因为三种圆锥曲线的知识结构是相似的,所以在实际教学中,可以实行类比教学。将“椭圆”章节作为示范课堂,多花课时细细讲解,体现其引领作用,为后续其他曲线的章节学习奠定基础。“椭圆”的新授课堂流程是:椭圆的几何特征和定义——椭圆的标准方程——椭圆的几何性质——椭圆的实际应用,其他两种曲线的课堂流程与之相似。

2.1. 三种圆锥曲线的“共性”和“个性”

由于圆锥的轴线和平面所成的角度不同,可将截线分为亏曲线(椭圆)、超曲线(双曲线其中一支)、齐曲线(抛物线),所以三种圆锥曲线的“共性”其由来都是圆锥被不同的截线截到的[2]。借助于三种曲线的“共性”,有利于教师安排教学设计,从始至终体现整体性。

与此同时,三种圆锥曲线的定义方式、几何特征和代数表达式并不相同,“个性”突出鲜明。从定义上看,椭圆是指平面上到两个定点 F_1 和 F_2 的距离之和等于常数 $2a$ 的所有点 P 的轨迹。双曲线是指平面上到两个定点 F_1 和 F_2 的距离之差等于常数 $2a$ 的所有点 P 的轨迹。抛物线是指平面上到定点 F 的距离等于点 P 到直线 l 的距离的所有点 P 的轨迹[3]。从几何特征来看,椭圆是一个闭合的曲线,具有对称性和周期性。而双曲线和抛物线是一个开放的曲线,也具有对称性。从代数表达式来看,椭圆的标准方程

为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 其中, $(0,0)$ 是椭圆中心的坐标, a 和 b 分别是椭圆在 x 轴和 y 轴上的半轴长。双曲线的标准方程是 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, 其中心坐标和两坐标轴上的半轴长与椭圆相似。抛物线的标准方程是 $y = 2px^2$ 。借助于三种曲线的“个性”, 课堂安排环节着重研究三种曲线的不同之处, 帮助学生区分和掌握。

2.2. 单元教学的数学思想和方法

类比是一种将不同数学概念、定理和方法进行比较的一种数学思想方法。它通过寻找不同数学领域之间的相似性和类比性, 发现并解决数学问题。类比主要包括概念类比、定理类比和方法类比等, 它可以帮助学生更深入的理解数学概念和定理, 发展学生应用数学方法的能力。

数形结合是一种将数学概念、方法与图形、几何形状相结合, 深入理解和探索数学问题的一种数学思想方法。它可以帮助学生更加直观地理解和掌握数学概念和方法, 同时也可以帮助学生发现和解决数学问题。

在圆锥曲线单元中, 以椭圆的标准方程为示范, 学生在教师引导下类比得出双曲线、抛物线的标准方程; 以椭圆的几何性质、几何特征和定义为示范, 学生在教师引导下类比得出双曲线、抛物线的几何性质、几何特征和定义; 因此, 数学学习的类比思想蕴含在整个单元教学中。除了类比, 数形结合思想也很明显。例如: 双曲线是用平面内到两定点的距离之差等于定长的点的轨迹。双曲线用坐标法表示几何问题, 新课课堂上, 建议需要先在几何特征基础上建立合理的直角坐标系, 再通过设点的坐标, 推导化简方程, 最后得出标准方程, 再借助双曲线的标准方程观察出顶点和对称性, 通过焦距和长轴的比值推导出表示双曲线扁曲程度的离心率。因此, 课堂借助解析几何, 利用数形结合可以直观体现曲线的几何性质, 有利于学生更快的掌握教学内容本质。

2.3. 单元知识的连接关系

在数学教材中, 单元知识之间的联系方式主要有概念联系、方法联系、应用联系等。比如离心率可以作为连接椭圆和圆的桥梁, 这就是概念联系。方法联系是指不同圆锥曲线存在相同或相似的解题方法或思路。比如: 坐标法、求离心率关系式时代值法等。应用联系是指椭圆、双曲线和抛物线在物理学、工程学和经济学等领域中有广泛的应用。

在高中数学课程中, 圆锥曲线单元知识对学生建构数学知识框架有承上启下的连接作用。一方面, 它与平面解析几何知识想连接, 平面解析几何既是高中数学的必修内容, 也是学习高等数学和微分几何的基础知识, 因此, 具有奠定基础的作用。此外, 相比较其他单元知识, 圆锥曲线单元的知识点有容量大、涉及面广、综合性强的特点, 当学生求解圆锥曲线的问题时, 可能会涉及直线与方程、数与代数、函数运算等知识, 需要学生运用数形结合、类比、分类等数学思想灵活求解。所以, 圆锥曲线单元知识对学生要求较高, 有利于提高学生数学运算和逻辑推理等数学核心素养。

2.4. 单元教学突出培养的数学核心素养

在人教版高中数学教材中, 圆锥曲线单元中包含的数学核心素养是多方面的, 包括直观想象、逻辑推理、数学运算等。直观想象是指学生学习圆锥曲线时需要对几何图形有一定的想象能力, 能够通过几何图形来理解和推导圆锥曲线的特征。逻辑推理是指学生能够通过探究、实验、发现等方式深入理解圆锥曲线复杂的性质和应用。数学运算是指学生在学习圆锥曲线时需要具备一定的代数运算能力, 能够进行代数式的化简、因式分解、配方法等操作。

在圆锥曲线单元教学中, 学生的直观想象、数形结合、逻辑推理、数学运算等核心素养会有显著提

高。一方面,圆锥曲线应用问题难度大,学生求解时需要借助于几何图形,找到解题思路,这有利于培养学生直观想象、数形结合逻辑推理的数学能力;另一方面,圆锥曲线大题往往涉及知识面广,解题时计算量大,这有助于提高高中学生的数学运算素养能力。

3. 关注学生,设计圆锥曲线单元课时教学目标

教学目标是整个单元教学设计的起始点和指挥棒,每节课时的划分和具体课堂的教学过程都根据教学目标而呈现,此外,教学评价和教学反思也是根据具体课堂是否实现教学目标为首要依据。单元教学目标的设计是在单元内容和教法分析的基础上,综合考虑单元内知识和技能的学习要求、知识之间的逻辑顺序和关系结构,结合学生的学习基础、认知规律和心理发展特点,指向培育学生数学学科核心素养的目标设计[1]。

3.1. 学习现状分析

学习现状分析的主要目标是寻找学生学习的“最近发展区”,即学生已有的认知水平和知识基础与完成学习目标的所需能力之间的差距。此外,还要在教学设计之前,预料到学生在学习时可能会遇到的困难,并且在教学具体流程设计中通过问题引导、直观动画、表格总结知识点等多种教学手段为学生搭建破除学习困难的学习支架。

1) 学生的认知水平和知识基础

在高中数学人教版教材安排中,圆锥曲线的单元教学是在直线与圆之后进行学习,学生已经学习了圆的定义和标准方程,掌握使用坐标法求解几何问题的解题方法,初步了解研究点的轨迹问题的步骤,因此,学生已经具有一定的学习基础和能力,比如:具有数形结合和类比的数学思想和学习定势、不需借助实物的抽象思维能力和一定的数学运算能力。

2) 学生学习的困难之处

相比较高中数学其他单元内容,本单元圆锥曲线内容难度比较大,刚开始学习时,学生可能会对三种圆锥曲线的定义及图形存在困惑;学生易混淆三种圆锥曲线的相关定义、标准方程及其变形,计算求解时容易忘记考虑曲线参数的取值范围;在不同类型的曲线习题中,学生难以灵活运用曲线的第一定义或几何性质;求解计算题时,学生在计算圆锥曲线标准方程中计算出现错误,面对题目条件中纷杂的关系无法推理出等式关系,或者只能找到计算量大且复杂的解题方法,从而解题受阻。

3.2. 根据学情分析设计单元教学目标及课时目标

圆锥曲线教学的学情分析需要考虑学生基础知识的掌握情况、数学思维能力的发展情况、学生学习兴趣和动机和自主学习能力等方面,根据学生的实际情况进行差异化教学,提高学生的数学学习兴趣和能力[4]。在学习椭圆之前,学生需要掌握一定的代数、几何、函数等基础知识;在数学思维能力方面,教师进行椭圆教学之前,学生要具备一定的逻辑推理思维和数学抽象思维等;在学生学习兴趣和动机方面,由于椭圆概念和性质较为抽象,学生容易感到枯燥无聊,缺乏学习兴趣和动机;在学生自主学习能力方面,学生在椭圆教学中需要在教师引导下自主探究和分析,因此需要具备一定的自主学习能力。

根据学情分析,本单元建议分解为13个课时,分别是:椭圆知识用四个课时讲解、双曲线用三个课时讲解、抛物线用三个课时讲解、单元小结总练习使用2个课时,了解解析几何的由来和发展用一个课时。其中,椭圆知识四个课时的总教学目标是:

了解圆锥曲线在现实中的应用,初步感受圆锥曲线在解决现实问题中的作用。比如:行星的运行轨迹、篮球投篮的抛物轨迹等现实应用实例。

在教师引导下,通过从现实具体情景中,学生自主探究和分析抽象出椭圆的过程,提高学生的数学

抽象和逻辑推理思维, 发展学生的自主学习能力。掌握椭圆的第一定义和标准方程, 了解椭圆的简单几何性质。

通过椭圆的简单应用练习, 深刻体会数形结合思想, 提高数学运算和逻辑推理的数学核心素养。

其中, 双曲线和抛物线知识的总教学目标是:

经历从具体情境中抽象出双曲线和抛物线的过程, 掌握抛物线与双曲线的定义和标准方程, 了解双曲线和抛物线的简单几何性质。

在椭圆的学习基础上, 进一步体会类比的数学思想, 提高逻辑推理和数学抽象能力。

其次, 教师要注重教学目标, 设计单元课时教学过程

从单元教学划分到具体的课时教学, 规范每节课时教学目标, 有层次的有逻辑的完成教学过程。下面双曲线的定义和标准方程课时教学设计为例:

双曲线的课时教学目标分别是:

- 1) 掌握双曲线的定义, 能从有关双曲线的应用情境中找出双曲线的几何特征, 培养直观想象素养;
- 2) 通过类比椭圆的定义和标准方程的学习过程, 推出双曲线的标准方程, 培养逻辑推理能力;
- 3) 通过求解圆锥曲线习题, 发展数形结合思想, 培养学以致用能力。

3.3. 教学重难点

教学重点: 了解标准方程的推导过程, 掌握双曲线的定义和标准方程, 并会用其解决实际数学问题;

教学难点: 推导双曲线的标准方程, 在推导过程中学生发现双曲线的几何特征。

3.4. 教学过程设计

3.4.1. 复习回顾, 回答问题

问题 1: 动圆 M 和 $\odot C_1: (x+2)^2 + y^2 = 4$ 相切, 动圆 M 和 $\odot C_2: (x-2)^2 + y^2 = 49$ 内切, 请写出动圆圆心 M 的轨迹方程。

学生: $\odot C_1$ 的圆心是 $C_1(-2, 0)$, 半径为 2, $\odot C_2$ 的圆心是 $C_2(2, 0)$, 半径为 7, 设动圆 M 的半径为 r , 根据相切和内切的关系, 圆心 M 与点 C_1 的距离是 $|MC_1| = r + r_1$, 圆心 M 与点 C_2 的距离是 $|MC_2| = r_2 - r$, $|MC_1| + |MC_2| = r_1 + r_2 = 9$, 所以点 M 到两个定点 C_1, C_2 的距离的和是定值, 并且定值大于两个定点之间的距离, 所以点 M 的轨迹是椭圆, 轨迹方程为 $\frac{4x^2}{81} + \frac{4y^2}{65} = 1$ 。

给出问题后, 学生先自行思考求解 3 分钟, 在这期间, 教师可以给予适当提示引导解题方向, 学生上台板演后, 教师简单总结并用几何画板动画演示动点 M 的轨迹过程, 用动画加强学生理解, 培养学生的直观想象能力和数形结合思想。

问题 2: 对于双曲线的学习, 通过预习, 你还有哪些疑问?

设计意图: 使用问题 1 作为具体情境, 复习学生之前学过的相关知识点, 从曲线动点轨迹的角度唤醒对椭圆定义及其标准方程, 为接下来双曲线的学习作好学习基础准备。同时, 通过问题 2, 培养学生自学能力和语言表达能力。

3.4.2. 类比情境, 导入新课

问题 3: 已知 $\odot C_1: (x+3)^2 + y^2 = 4$, $\odot C_2: (x-3)^2 + y^2 = 1$, 动圆 M 与 $\odot C_1$ 内切, 动圆 M 与 $\odot C_2$ 外切, 请分析动圆圆心 M 的轨迹是一个椭圆吗?

学生: $\odot C_1, \odot C_2$ 的圆心是 $C_1(-3, 0)$ 和 $C_2(3, 0)$, 半径是 2 和 1, 设动圆 M 的半径为 r , 动圆圆心 M 到点 C_1, C_2 的距离是 $|MC_1| = r - r_1$, $|MC_2| = r_2 + r$, $|MC_1| + |MC_2| = 2r + r_2 - r_1$, 这不是一个定值, 所以动

点 M 的轨迹不是一个椭圆。

问题 4: 当线段等于定值时, 才能判定轨迹方程。那上述式子什么情况下才可能出现定值呢?

学生: $|MC_2| - |MC_1| = r_1 + r_2 = 3$, 也就是动点 M 到两个定点 C_2 和 C_1 的距离之差是定值。

教师使用几何画板画出 $|MC_2| - |MC_1| = r_1 + r_2 = 3$ 的轨迹, 再用动画展示讲解, 这时的曲线将不再是椭圆, 而是一条关于 x 轴对称且逐渐接近 C_1 的曲线。

问题 5: 把问题 3 中的条件改成“动圆 M 与 $\odot C_1$ 外切, 动圆 M 与 $\odot C_2$ 内切”, 其他条件保持不变, 请分析动圆圆心 M 的轨迹是一个椭圆吗?

学生: 这题和问题 4 类似, $|MC_1| = r + r_1$, $|MC_2| = r - r_2$, $|MC_1| - |MC_2| = r_2 + r_1 = 3$ 。

这时, 教师可以不用着急使用几何画板, 可适当停顿, 先让学生通过小组讨论, 在方格纸上画出猜测的曲线, 然后, 教师再使用几何画板画出 $|MC_1| - |MC_2| = r_2 + r_1 = 3$ 的轨迹, 再用动画展示精确的轨迹曲线, 并且引导学生两使用条轨迹曲线($|MC_2| - |MC_1| = r_1 + r_2 = 3$, $|MC_1| - |MC_2| = r_2 + r_1 = 3$)总结出双曲线的轨迹方程。

设计意图: 通过问题 3 引出学生对双曲线定义的探索, 引导学生学习解析几何求解的基本思路, 强化学生对双曲线形成过程和几何图形的认识。通过类比学习, 在解决问题 3 的基础上, 学生能在独立思考 and 小组讨论后, 求解出问题 4 的轨迹方程。学生观看几何画板绘制 $|MC_2| - |MC_1| = r_1 + r_2 = 3$, 为后续学生猜测 $|MC_1| - |MC_2| = r_2 + r_1 = 3$ 的轨迹曲线奠定了基础。一方面, 发展了学生的直观想象能力, 另一方面, 在循序渐进的教学中, 学生掌握了双曲线的概念及几何图形, 并且为接下来学习双曲线图像的几何特点做好准备。

3.4.3. 类比总结, 建立方程

问题 6: 在问题 4 和问题 5 的分析之后, 结合两者的情况, 小组讨论 2 分钟, 你能否总结出一个包含两者情形的结论?

学生: 如果动点 M 到两个定点 C_1, C_2 的距离之差的绝对值等于定值, 动点 M 的轨迹就是双曲线。

问题 7: 类比已学知识椭圆的定义, 你能总结出双曲线的定义吗?

学生: 平面内与两个定点 F_1, F_2 的距离之差的绝对值为常数(不等于 0)的点的轨迹是双曲线, 定点 F_1, F_2 是双曲线的焦点, 两个焦点之间的距离是双曲线的焦距。

设计意图: 学生通过小组讨论回答问题 6 中加深对双曲线概念的认识, 在教师的合理引导下, 学生用数学语言表达双曲线的定义, 发展了学生的类比思想, 培养了用数学语言描述现实世界的能力。

3.4.4. 巩固练习, 学以致用

例 1 求下列双曲线的焦点坐标和渐近线方程

$$(1) \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \quad (2) x^2 - \frac{y^2}{4} = 1 \quad (3) \frac{y^2}{4} - x^2 = 1 \quad (4) x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$$

例 2 根据下列条件求双曲线标准方程

已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一条渐近线过点 $(2, \sqrt{3})$, 且双曲线上的一个焦点在 $x = -\sqrt{7}$ 的直线上, 求双曲线的方程?

已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一条渐近线方程为 $y = \frac{\sqrt{5}}{2}x$, 且与椭圆 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1$ 有公共焦点, 求 C 的方程?

设计意图: 加强理解和熟练双曲线的标准方程中的几何特征, 如焦点、渐近线。例 1 考察双曲线的基本量: 焦点坐标和渐近线方程的求法, 并通过做题总结出快速解决此类问题的二级公式。例 2 综合考

察学生的双曲线相关知识, 提高学生的逻辑推理能力和数学运算能力。

3.4.5. 课堂小结, 总结升华

问题: 在这节课的学习中, 你的收获是什么?

预设: 知识方面(双曲线的定义、几何特征、标准方程及其推导步骤); 思想方面(类比、数形结合、逻辑推理); 方法(坐标法)。

3.4.6. 布置作业, 巩固复习

课本人教版选择必修一 148 页习题练习 A 的 1、2 题, 练习 B 的 1、2 题及同步的习题册。

4. 利用信息技术, 辅助单元 - 课时教学任务

在圆锥曲线学习的过程中, 学生除了掌握三种圆锥曲线的定义和标准方程外, 还需要掌握几何特征。在解析几何中, 曲线的几何特征通过图形直观体现, 但精确画出圆锥曲线需要借助一定的信息技术软件。所以, 根据本单元的知识特点, 教师要充分利用信息技术, 比如: 利用几何画板等软件。一方面, 数学软件画出的图形十分准确的展示动点的运动规律; 另一方面, 教师能在课堂上借助技术, 直观地引导学生观察方程中参数变化对曲线性状、大小的影响, 还能借助软件引导学生探究不同曲线之间的关系[5]。比如: 研究三种圆锥曲线的定义、离心率、渐近线等都可以利用信息技术, 学生在课堂上获得直观认识。

5. 结语

在这个单元的教学设计中, 单元知识 - 课时教学设计需要在“四个方面”(钻研教材、关注学生、注重教学目标、利用信息技术)的基础上, 把圆锥曲线的几何特征、标准方程、几何性质和应用作为主要教学方向, 把教学活动中的问题当做完成教学目标的教学支架, 在活动和提问中渗透解析几何的坐标法和数形结合思想, 逐步引导学生完成一系列不同难度的教学活动, 减少学生学习的难度, 帮助学生感受学习数学的快乐。这种设计有助于教师掌握课堂节奏, 有效组织教学, 提高教学效率, 更有助于发展学生的核心素养, 完成高中数学课标的要求。综上所述, 单元课时教学既能帮助学生领略单元知识的高楼大厦, 又能带领学生考究每处地基的课时知识。一方面, 教师需要用整体的思路对教学内容进行全局的设计, 另一方面, 教师在组织课堂教学时要带有全局观引导学生, 学生的核心素养才能真正有效发展。

致 谢

本论文是在陈余喜老师的全力指导下完成的。他认真细致的科学研究态度、精益求精的治学精神、一丝不苟的工作作风深深地感染和激励着我。从课题的选取到论文的最终完成, 陈老师始终给予我细心认真的指导和帮助。在此向陈老师致以诚挚的谢意和崇高的敬意。最后感谢父母的默默支持和关心!

参考文献

- [1] 方长林. 聚焦数学核心素养 设计单元——课时教学——以高中“一元二次函数、方程和不等式”单元为例[J]. 数学通报, 2021,60(6): 30-35.
- [2] 孙瑞. 基于数学抽象素养的“圆锥曲线”单元学习路径研究[D]: [硕士学位论文]. 杭州: 杭州师范大学, 2022. <https://doi.org/10.27076/d.cnki.ghzsc.2022.000773>
- [3] 裴昌根, 宋乃庆. 基于核心素养的优质高效课堂教学探析[J]. 课程·教材·教法, 2016, 36(11): 45-49. <https://doi.org/10.19877/j.cnki.kcjcf.2016.11.008>
- [4] 沈良. 单元教学中数学任务的设计研究——以“圆锥曲线的方程”任务教学设计为例[J]. 中小学数学(高中版), 2022(3): 1-6.
- [5] 普通高中教科书教师教学用书. 数学: 选择性必修(第一册): A 版[M]. 北京: 人民教育出版社, 2020.