Creative Education Studies 创新教育研究, 2021, 9(4), 1142-1149
Published Online August 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/ces
https://doi.org/10.12677/ces.2021.94188

以“数”铸“形”，以“形”表“数”

——以三角函数的教学为例

楚 伶

湖南科技大学数学与计算科学学院，湖南 湘潭
Email: 1025569684@qq.com

收稿日期：2021年7月22日；录用日期：2021年8月23日；发布日期：2021年8月31日

摘 要

数形结合思想方法是数学素养的核心成分，在高中阶段应引起高度重视。本文将根据新课标对数形结合思想方法提出的要求，以三角函数的教学为例，进行数形结合思想方法的应用研究。基于双重编码与数学多元表征理论，探究“数”与“形”的转化问题。以“数”铸“形”，渐进渗透非言语信息的价值；以“形”表“数”，关注多元理解的学习过程。以达到逐步搭建支架，强化思维训练，提升创新能力的目的。开拓学生的思维，当学生遇到生活中的数学情景时，能灵活地选择数学思想方法，用数学的眼光有逻辑有条理地解决问题。

关键词

数形结合，三角函数，多元表征

Casting Shape with Number, Expressing Number with Shape

—Based on Teaching of Trigonometric Functions

Ling Chu

School of Mathematics and Computational Science, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan Hunan
Email: 1025569684@qq.com

Received: Jul. 22nd, 2021; accepted: Aug. 23rd, 2021; published: Aug. 31st, 2021

Abstract

The thinking method in combination of number and shape is a core component of mathematical

文章引用: 楚伶. 以“数”铸“形”, 以“形”表“数” [J]. 创新教育研究, 2021, 9(4): 1142-1149.
DOI: 10.12677/ces.2021.94188

literacy, which should be paid more attention in high school education. According to the requirements of the new curriculum standard, this paper takes the teaching of Trigonometric Function as an example to study the application of the thinking method of combining numbers and shapes. Based on the theory of dual coding and mathematical multiple representation, explore the problem in the combination and transformation between number and shape. Cast shape with number, which can permeate the value of nonverbal information gradually; Express number with shape, which should pay more attention to the process of pluralistic understanding, to achieve the aim that can simplify the difficulty of problems, building the support in a gradually way, intensifying the training of mind and promoting the ability of innovation. Broaden student's mind, when they face to the new problems situation, they can also use the thinking method in combination of number and shape flexibly and solve problem with the vision of mathematical logically and systematically.

Keywords

Combination of Number and Shape, Trigonometric Function, Multiple Representation

1. 引言

数学是研究数量关系与空间形式的一门科学[1]。由此可见，“数”与“形”是数学重点探究的两部分内容，但两者并不是相互独立，各成一体的，而是存在着密切的联系。著名的数学大师华罗庚曾说过：数缺形时少直观，形少数时难入微；数形结合百般好，隔家分离万事休。事实上，“数”与“形”本质上是一个事物的两个不同侧面，给予一定的条件，两者可以相互转化。有助于我们多角度、全方位地了解事物的全貌，能发现生活中蕴含的数学问题并用所学知识解决。《普通高中数学课程标准(2017 年版)》提出：通过高中数学课程的学习，学生能提升数形结合的能力，发展几何直观与空间想象能力；增强几何直观与空间想象思考问题的意识形成数学直观，在具体的情境中感悟事物的本质[2]。直观想象这一高中数学学科核心素养的主要表现形式是数形结合。它不同于普通的数学知识有具体的显现，而是作为一种重要的数学思想方法渗透在数学教学的各过程环节中，是数学知识的“精华”所在。在此之前，有很多学者进行过此方面的研究。比如，黄朝斌在《高中数学“数形结合”在解题中的应用》中分别对“数形结合”思想在集合、三角函数、方程与不等式等方面的渗透进行了探讨[3]。黄继荣在《多媒体技术与“数形结合”教学》中提出了利用启发–探究式教学表现数学教学中的数形结合[4]。三角函数是函数的一个下位概念，与指数函数、对数函数、幂函数属于同一抽象层次，它是对函数知识的延伸与扩展，也为后面学习同名三角函数与诱导公式的学习奠定了基础。因此，笔者以三角函数为例对数形结合这一数学思想方法在教学中的应用进行分析研究。在三角函数教学中要利用“周而复始”的现实背景，通过数形结合的方式来帮助学生加深对三角函数图像性质的理解并综合运用。

2. 数形结合的概述

解题中的数形结合，是指对问题既进行几何直观的呈现，又进行代数抽象的揭示，两个方面相辅相成，而不是简单地代数问题用几何方法或几何问题用代数方法，两方面有机结合才是完整的数形结合[5]。由此可见，我们并不能将“数”与“形”割裂进行研究，两者是紧密联系在一起的，数学本质更容易被探究出来，并且可以寻找合适的解题方法。与此同时，数形结合思想方法对教师提出了更高的要求，关

键在于如何在教学过程中巧妙地将“数”与“形”结合起来，既能发挥代数方法在解题过程中程序规范化的优势，又能借助几何方法呈现出形象直观的特点，这是教学的重点也是难点所在。需要教师从学生的已有生活经验与数学认知基础出发，依据“最近发展区”的原则，创设出有价值的数学情境，以基础的数学知识为载体，在命题、概念的学习过程中渗透数形结合的思想方法，在问题解决的过程中通过教师有效地指导帮助学生找到问题中“数”与“形”的联系，从不同的角度认清问题的全貌，从而找到解决问题的最优途径。数学问题解决的过程，就是数学思想方法的选择与运用的过程[6]。因此，要检验数形结合的思想方法是否得到了真正的落实，就在于学生能否独立地探索出数学问题中“数”与“形”之间的联系，并巧妙地将两者结合解决问题。

3. 数形结合思想方法的理论基础

3.1. 双重编码理论

20 世纪 60 年代著名的加拿大心理学家定理佩维(A. Paivio)及其合作团队提出了双重编码理论(Dual Coding Theory, DCT)。该理论指出，人类有两个专门负责信息的编码、组织、转换、存储和提取的表征系统：言语系统和心象系统。[7] [8]数形结合数学思想方法反映了数学在人脑中的双重编码形式，心象系统又称非语言系统。在数形结合中是对“形”的表示，也就是图像、模型等的表示；言语系统是对数形结合中“数”的表示，也就是数学符号、公式、概念、定理等言语信息。这两种表征系统并不是同时出现，而是遵循一定的时间与空间的邻近原则。要理解“数”与“形”这两种表征编码各自的特点，才能将两者结合，简化思考的难度，去除无关干扰信息，展现数学的本质。

3.2. 数学的多元表征

美国 NCTM 在 2000 年《学校数学课程标准与原则》中指出：“不同表征(情景表征、图表表征、言语表征和符号表征等)将导致不同的思维方式(NCTM, 2000)”[9]。数形结合思想方法是直观表征与表象表征等的融合，有助于学生多元化地探究数学的本质。同样，不同的表征有着不同的地位与先后顺序，直观表征是基础，表象表征是此基础上的提升。比如：学生做题时需要借助画图来进行分析辅助解题，减低认知难度。在画图的过程中，是先在头脑中构想出图像，也就是形成表象表征，再根据此表征画出图像，这就是直观表征的体现。在数形结合思想方法中，图形语言是文字语言与符号语言的桥梁，教师仔细选择图形语言对于联系和统一各种数学表征形式非常重要。[10]认清图形、数学文字、符号语言的紧密联系，搭建桥梁，从而减轻“注意分散效应”，使学生多元化理解问题，并形成自己的独特认识。

4. 数形结合思想在高中数学中的作用

高中阶段强调加强直观想象数学学科核心素养的渗透，这不是初中阶段几何直观与空间想象的简单组合，而是两者在相互融合的基础上进一步拓展提升。因此，对教学中数形结合思想方法运用提出了更高的要求。高中阶段是思维发展的“黄金时期”，辩证逻辑思维日趋发展，并且可以实现形象思维向抽象思维的过渡。教师在教学中逐步搭建支架。并且，教师应创造合适的教育时机，使学生的思维得到有效地启发，引发思维风暴，提升创新意识。

4.1. 简化问题难度，逐步搭建支架

代数方法与几何方法有其各自的优势，当然也有相应的局限性。解决问题时，如果单从一方面进行考虑往往很难找到解题的突破口。需要教师进行适当的数形结合思想方法的指导，引导学生从不同的方面探究问题的本质，找到“数”的符号化语言与“形”的直观表示，结合生活实际使问题变得清晰明了，

简化问题难度。但切忌“一步到位”，应根据学生已有认知基础，加强将对学生元认知的指导，通过教师指导性的提问方式，逐步搭建支架，循序渐进地培养学生数形结合的数学思想方法。

例如，三角函数概念的教学是一个值得探究的问题，是在学生初中所接触到的锐角三角函数的基础上进行的教学。此认知基础有利也有弊，利在于三角函数对学生来说并不陌生，便于知识的迁移。弊在于容易形成思维定势，如何让学生理解从锐角三角函数到任意角的三角函数的推广，是高中三角函数概念教学的关键点。教师可以尝试通过学生熟悉的生活情境，让学生感受“周而复始”的运动现象，抽象出单位圆与点运动的轨迹。通过指导性地提问，引导学生建立适当的直角坐标系，并给出图中对应点的坐标。以函数的对应关系为指向，从特殊到一般，使学生确认相应的对应关系满足函数的定义，角的终边与单位圆的交点的横、纵坐标都是圆心角 α (弧度)的函数，从而给出三角函数的概念。

4.2. 强化思维训练，提升创新能力

“数学是思维的体操”，这句话一直被人们奉为经典[11]。具体来说，数学思维就是以数和形及其结构关系为思维对象，以数学语言和符号为思维的载体，并以认识数学规律为目的的一种思维[12]。忽视思维训练的题海战术，提升的只是解题的速度，这并不是数学培养人的目的所在。学生学习数学获得的不仅是解题的技能技巧，更重要的是探索与解决问题的能力。在实际教学过程中，加强创新能力的培养的一个重要途径就是把逻辑思维能力的培养与非逻辑思维能力的培养结合起来[13]。数形结合思想在此方面都能起到非常重要的作用，学生的形象思维得到了推动与培养。表象思维得到了提升，通过联想，可以把握问题的本质，通过变式训练，找到类似问题的通性通法。完善认知结构，进行心智活动，提升创新能力。

例如：求函数 $y=2\sin\left(\frac{\pi}{6}x-\frac{\pi}{3}\right)$ $(0\le x\le 9)$的最大值与最小值的和。这类问题，需要教师引导学生先用整体的观念算出括号内的取值范围，再结合正弦函数的图像在相应的区间内判断其单调性，找到最大值与最小值进行求和计算。在正弦函数图像单调性判断的部分，数形结合的思想方法得到了巧妙的运用，将函数的增减趋势直观地呈现给了学生，学生通过观察思考强化了思维的训练，有助于创新能力与意识的培养。并且教师还可以设置一系列发散性问题供学生思考提升。比如：若将本题中的函数化为 $y=3-\sin x-2\cos^2 x$， $x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$，该如何解决？引导学生类比观察正弦函数图像单调性的方法，通过换元法转化为观察二次函数图像的单调性的情况，让学生通过发散思维训练，运用数形结合的数学思想方法提炼出最值问题往往是与单调性紧密联系这个思考方式。并且，在思维的不断拓展强化与运用的过程中，提升创新能力。

5. 数形结合思想的具体应用策略

数形结合的思想方法是属于数学知识范畴，但它的传授方法不同普通的数学知识，它是数学的“核心”所在。既不可脱离数学知识单独讲授，也不可“一步到位”快速灌输。而是应该循序渐进地将数形结合的思想方法渗透在数学知识的教学过程中，使学生领悟到数形结合思想方法的本质。

5.1. 以“数”铸“形”，渐进渗透非言语信息的价值

在教学中，教师往往偏向于言语信息教学，甚至忽略板书与画图的过程，表面看似“高效”，但其实忽略了非言语信息的价值。教师要基于学生的生活现实与数学现实，有意识地创设数形结合思想方法的数学情境，通过引导性问题，帮助学生理解领悟，体会数形结合思想方法运用的必要性与优势所在，以“数”铸“形”，提升对图像、模型等非言语信息的重视。

例如：已知函数 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$ 的部分图像见图 1，$A>0$，$\omega>0$，$\varphi\in(-\pi,\pi)$，则 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$ 的解析式为？

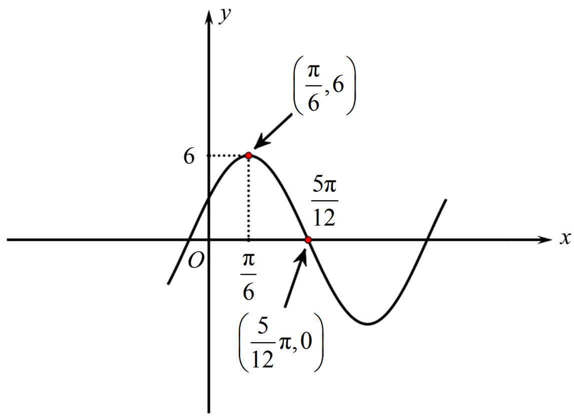

Figure 1. A part of functional image of $y=A\cos(\omega x+\varphi)$
图 1. 函数 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$ 的部分图像

这是一道求正余弦型函数解析式的题，目的在于巩固之前讲授通过观察图像得到求 A,ω,φ 的方法，并且通过数形结合数学思想方法的渗透让学生明白一个常见的解题“陷阱”。根据题目给出的 A，ω 的范围结合图像信息不难算出 $A=6$，$\omega=2$，取一个点的坐标代入解析式就可以求得 φ 的值。关键在于这里所说的取一个点是任取，还是有目的地取最高(低)点或者零点，这是一个值得思考的问题。教师可以引导学生自行代入不同的点探究求出的结果是否有差异，学生通过计算会发现，当代入的点为最高点 $\left(\frac{\pi}{6},6\right)$ 时，求得的 φ 为 $-\frac{\pi}{3}$；当代入的点为零点 $\left(\frac{5\pi}{12},0\right)$ 时，求得的 φ 为 $\frac{2\pi}{3}$ 或者 $-\frac{\pi}{3}$。学生会对求得的两种不同情况(见图 2)发出疑问，此时教师便可以有意识地渗透数形结合的思想方法，引导学生通过观察函数图像进行思考，从函数的周期性、对称性等性质探究。通过思考，学生会发现代入最高(低)点时，函数图像是可以唯一确定的，但如果代入的是零点，还可能出现下图所示的情况，有两种情况不能唯一确定。因此，所求的函数求解析式为 $y=6\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$。

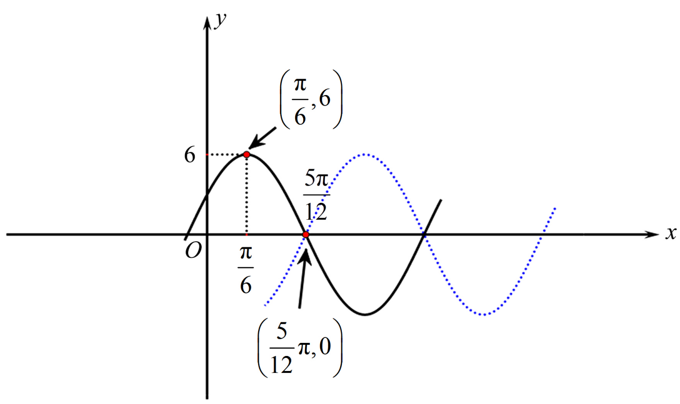

Figure 2. Different situations when make zero vector into the function
图 2. 代入零点不同情况

通过这个常见“陷阱”的设置，达到了以“数”铸“形”，渐进渗透的目的。让学生意识到选点要谨慎，代入零点可能出现两种情况，代入最高(低)点可以唯一确定函数解析式。在引导学生通过函数图像解决这个问题的过程中有意识地渗透了数形结合的思想，通过图像直观地呈现使问题更加清晰明了，逐步让学生意识到数形结合的必要性与解题过程中的优越性，“形”的目的在于降低学生的认知负担，学生的理解能力将得到提升，因此，需要重视非言语信息的价值。

5.2. 以“形”表“数”，关注多元理解的学习过程

数学思想方法重在“悟”，悟，就需要过程，有一个循序渐进、逐步逼近思想本质的过程[14]。在含绝对值的三角函数的教学过程中，以“形”表“数”，借助图像探究出函数的性质，通过观察对比图像的单调性对称性、周期性等过程，逐步推导出含绝对值函数的性质。以“形”表“数”，根据不同的表征，多角度地理解问题，为深度学习打好基础。

例如：在对含绝对值的正弦函数的性质教学的过程中，首先要让学生画出 $y = \sin x$ 的图像，再分别考虑两种加绝对值的形式，一种是 $y = \sin|x|$，另一种是 $y = |\sin x|$。对于 $y = \sin|x|$ 的函数图像见图 3，通过解析式可以知道它为偶函数。

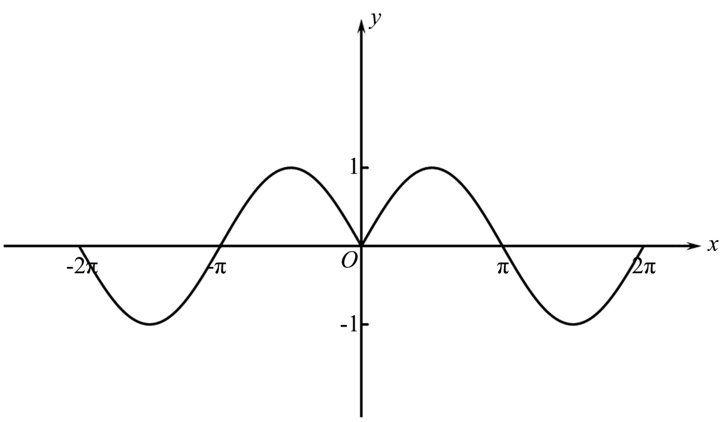

Figure 3. Function image of $y = \sin|x|$
图 3. 函数 $y = \sin|x|$ 的图像

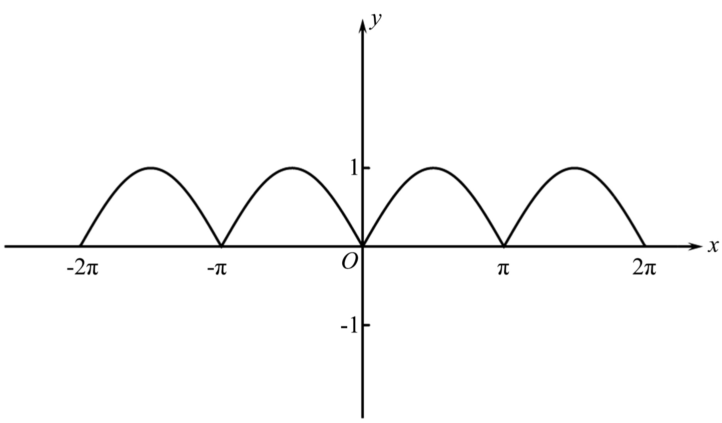

Figure 4. Function image of $y = |\sin x|$
图 4. 函数 $y = |\sin x|$ 的图像

教师可以让学生尝试以“形”表“数”，得出 $y=\sin|x|$ 的性质。通过观察图像可知，在 $[-\pi,\pi]$ 区间的图像有两部分在 x 轴上方，而在其他区间都是一上一下的形式，因此图像不具有周期性。通过观察对称性可以发现，函数图像没有对称中心，仅有 y 轴一条对称轴。对于 $y=\cos|x|$， $y=\tan|x|$ 也可以用同样的方法，以“数”表“形”，得到规律，当 x 变为 $|x|$ 后，原本为偶函数的函数图像没有任何影响，原本为奇函数的变化后，要先画图，再根据图像判断性质。对于第二类加绝对值的形式 $y=|\sin x|$，函数图像(见图 4)是将 $y=\sin x$ 原有图像在 x 轴下方的部分翻折上来。

此图看上去非常“舒服”，因为它具有很好的周期性与对称性，通过对图像的观察可以发现，周期减半变为了 π，无对称中心，但是对称轴增多了，变为了 $x=\frac{k\pi}{2}(k\in z)$。对于 $y=|\cos x|$， $y=|\tan x|$ 也可用以“形”表“数”的方法进行探究，通过观察翻折前后的图像可以发现，原本的对称轴，翻折后仍为对称轴，原本的对称中心，翻折后变为了对称轴。翻折后正余弦周期减半，正切周期不变，对称中心全部消失，对称轴均为 $x=\frac{k\pi}{2}(k\in z)$。在以“形”表“数”的这个过程中，突显出了数形结合这个数学思想方法的重要性，通过对三角函数加绝对值后的情况进行探索观察强化了对数形结合思想方法的理解，在加绝对值后的变化过程中，找到与原本函数的异同点，根据变化规律逐步探索出函数的性质，领悟数形结合思想方法的真谛。以“形”表“数”，对问题进行多元的理解分析。

6. 小结

数形结合的思想方法对于高中数学的知识教学起到了很好的促进作用，解决了“数”与“形”转化的问题，将代数抽象与几何直观很好地结合。符合新课标对人才培养的要求，将探究方法上升到数学思想方法层面，将有助于学生形成解题思维的框架，容易理解和领悟，完善认知结构。教师应基于双重编码与数学多元表征理论有意识地在教学过程中渗透数形结合的数学思想方法，以“数”铸“形”，渐进渗透非言语信息的价值；以“形”表“数”，关注多元理解的学习过程。以达到简化问题难度，逐步搭建支架；强化思维训练，提升创新能力的理想结果。数学核心素养才能落实，学生的数学思维将得到大幅度的提升。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2018: 1.

[2] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2018: 6.

[3] 黄朝斌. 高中数学“数形结合”在解题中的应用[J]. 科学咨询(教育科研), 2018(5): 84.

[4] 黄继蓉, 陈光喜, 黄文韬. 多媒体技术与数学“数形结合”教学[J]. 数学教育学报, 2009, 18(2): 76-78.

[5] 曹一鸣. 数学教学论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2008: 271.

[6] 李求来. 中学数学教学论[M]. 长沙: 湖南师范大学出版社, 2006: 295.

[7] Clark, J.M. and Paivio, A. (1991) Dual Coding Theory and Education. *Educational Psychology Review*, **3**, 149-210. https://doi.org/10.1007/BF01320076

[8] 唐剑岚. 数学多元表征学习及教学[M]. 南京: 南京师范大学出版社, 2009.

[9] National Council Teachers of Mathematics (2000) Principles and Standards for School Mathematics. Reston, Virginia: NCTM.

[10] 左浩德, 沈梦怡, 濮安山, 黄强联. 数学教育的核心目标: 拓宽学生获取数学能力的途径——第 43 届国际数学教育心理学大会会议综述[J]. 数学教育学报, 2020, 29(6): 92-97.

[11] 史宁中, 王尚志. 普通高中数学课程标准(2017 年版)解读[M]. 北京: 高等教育出版社, 2018: 45.

[12] 张维忠. 数学课程与教学研究[M]. 杭州: 浙江大学出版社, 2008: 233.

[13] 张维忠. 数学课程与教学研究[M]. 杭州: 浙江大学出版社, 2008: 235.
[14] 曹一鸣. 数学教学论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2008: 274.