Creative Education Studies 创新教育研究, 2023, 11(9), 2465-2473
Published Online September 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ces
https://doi.org/10.12677/ces.2023.119365

Hans汉斯

洛必达法则在高中数学中的应用探究

徐金润，刘梦露，肖阳芳，彭　阳，朱宇萌

黄冈师范学院，数学与统计学院，湖北 黄冈

收稿日期：2023年6月12日；录用日期：2023年8月22日；发布日期：2023年8月31日

摘　要

随着新课标在全国范围内的实施，具有高观点知识背景的题目在高考中所占比例越来越大了。已知不等式恒成立求参数的取值范围作为高考重点考查的题型之一，综合难度大，对学生的思维水平要求高。倘若学生能采用洛必达法则处理该类问题可以直击问题命脉，提高解题效率。鉴于目前许多学生对洛必达法则的理解存在偏差，以高考真题为例分析了法则应当如何合理应用，设计了法则融入高中数学的教学设计，希冀为一线教育教学提供参考。

关键词

洛必达法则，高考，教学设计，高中数学

Exploring the Application of Lopita's Law in High School Mathematics

Jinrun Xu, Menglu Liu, Yangfang Xiao, Yang Peng, Yumeng Zhu

School of Mathematics and Statistics, Huanggang Normal University, Huanggang Hubei

Received: Jun. 12th, 2023; accepted: Aug. 22nd, 2023; published: Aug. 31st, 2023

Abstract

With the implementation of the new standards across the country, questions with a high viewpoint knowledge background are taking up a larger and larger proportion of the GCE. As one of the key questions in the HKALE, the range of values of the parameter for which the inequality is known to be constant is difficult to synthesise and requires a high level of student thinking. If students can use Lopita's Law to deal with this type of problem, they can get straight to the heart of the matter and improve their efficiency. In view of the current bias of many students in understanding Lopita's Law, we have analysed how the Law should be applied rationally, using real questions from the HKALE as examples, and designed a teaching design for the integration of the Law into high

文章引用: 徐金润, 刘梦露, 肖阳芳, 彭阳, 朱宇萌. 洛必达法则在高中数学中的应用探究[J]. 创新教育研究, 2023, 11(9): 2465-2473. DOI: 10.12677/ces.2023.119365

school mathematics, with the hope of providing reference for front-line education and teaching.

Keywords

Lopita's Law, GCE, Instructional Design, High School Mathematics

1. 问题提出

随着高中数学课程改革的不断深入，无论是高考真题，全国各地高考模拟题，还是月考测试题都在悄无声息地发生改变，试题不落窠臼，具有高观点知识背景的试题层出不穷。高观点知识背景的试题与高考选拔人才的功能相契合，该类试题对解题技巧要求高，区分度较大，可以起到较好的考察作用。倘若学生能够基于高等数学的思想方法来解析它们，便能居高临下直击问题的命脉，达到事半功倍的效果[1]。洛必达法则作为大学高等数学中一种求解不定式极限的重要方法，许多教育工作者研究发现将其用于解决函数与导数的恒成立问题时，可以避开抽象复杂的运算和讨论，以简驭繁。回顾近些年来关于洛必达法则在中学数学中的应用研究，较多的偏重于渲染如何利用洛必达法则去秒杀高考压轴题，但未考虑其用法的依据是什么？是否会产生一些错误的用法？落实到实际一线教学中，对学生而言，许多学生将其当成一种解题技巧加深记忆，只会机械模仿，不曾认真推理过法则使用的条件，本想“洛必达”，实则“洛必错”；对教师而言，目前关于高观点融入中学课堂的教学设计匮乏，很多教师是茶壶里装饺子，有口倒不出。可见明晰洛必达法则的内涵与使用条件，将洛必达法则的研究植根于基础教育实际是非常有必要的。基于此，本研究将对使用洛必达法则解决高考题常犯错误进行案例分析，探讨洛必达法则在高考题中的合理应用，并对其如何适时、适当、适切地引入到高中数学课堂进行教学设计，希望更好地服务于基础教育。

2. 洛必达法则的内涵与要义

洛必达(L'Hospital)法则是求解不定式极限的有效工具，学生若想要合理使用洛必达法则，一方面必须理解什么是不定式，明确运算对象是否符合不定式的特征，另一方面必须掌握洛必达法则的应用条件，具体问题具体分析。

不定式是指如果当 $x \to a$ (或 $x \to \infty$)时，两个函数 $f(x)$与 $g(x)$都趋于 0，或者都趋于∞，那么极限 $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ (x \to \infty)}} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ 可能存在，也可能不存在。不定式极限有$\dfrac{0}{0}$、$\dfrac{\infty}{\infty}$、$0 \cdot \infty$、1^{∞}、0^0、∞^0、$\infty - \infty$等多种类型，但在高中阶段主要应用于$\dfrac{0}{0}$和$\dfrac{\infty}{\infty}$两种极限类型的题目之中，且其他类型经过简单变换可以转化为$\dfrac{0}{0}$型或$\dfrac{\infty}{\infty}$型的极限[2]。《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》(以下简称为“课标”)指出，如果学生计划通过参加高考进入高等学校学习，必须学习必修课程和选择性必修课程，参加高考。学生通过选择性必修课程中函数主题的学习，不仅要理解导数的内涵与思想，还要感悟极限思想，知道极限思想是人类深刻认识和表达现实世界必备的思维品质[3]。因此，导数的学习能为不定式的引入做铺垫，契合学

生的认知结构。学生在理解不定式的基础上，将所求式子与不定式的特征一一对比，通过简单运算验证极限是否符合不定式，便可知洛必达法则是否适用。此外，课标还强调学生根据个人志趣可以从 A、B、C、D、E 五类选修课程中自主选择一类进行学习，A 类和 B 类课程包含微积分部分内容，涉及函数极限与拉格朗日中值定理的证明。数学证明是数学学习的最好方式，能加深对概念和定理的理解，并能导致发现[4]。拉格朗日中值定理可以证明柯西中值定理，而柯西中值定理又恰是证明洛必达法则的媒介，三者相互关联。因此，A 类和 B 类课程的学习更有助于学生理解洛必达法则的本质和应用。

对于 $\frac{0}{0}$ 型极限，洛必达法则指出，设函数 $f(x)$、$g(x)$满足以下条件：(1) 在点 x_0 的某去心领域内可导，且 $g'(x)\neq 0$；(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$；(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$（或 ∞）；则有结论：$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$(或$\infty$)。对于 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限，洛必达法则指出，设函数 $f(x)$、$g(x)$满足以下条件：(1) 在点 x_0 的某去心领域内可导，且 $g'(x)\neq 0$；(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$；(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$(或$\infty$)；则有结论：$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$(或$\infty$)。因此，只有当题目所求符合上述三个条件时，才能运用洛必达法则解题。

3. 洛必达法则在高考题中的应用探究

3.1. 洛必达法则的错误应用举例

3.1.1. 不顾构造函数性质随手使用

题目(2020 年全国卷 I 理 第 21 题)已知函数 $f(x)=e^x+ax^2-x$

(1) 当 $a=1$ 时，讨论 $f(x)$的单调性；

(2) 当 $x\geq 0$ 时，$f(x)\geq\frac{1}{2}x^3+1$，求 a 的取值范围。

错解(2) 当 $x\geq 0$ 时，由 $f(x)\geq\frac{1}{2}x^3+1$，得 $e^x+ax^2-x\geq\frac{1}{2}x^3+1$

当 $x=0$ 时，$1\geq 1$ 恒成立，符合题意。

当 $x>0$ 时，整理可得 $a\geq\frac{\frac{1}{2}x^3+1+x-e^x}{x^2}$，令 $g(x)=\frac{\frac{1}{2}x^3+1+x-e^x}{x^2}$，因此本题只需要求出 $g(x)_{\max}$。函数 $\frac{1}{2}x^3+1+x-e^x$ 和函数 x^2 均为连续可导函数，且 $(x^2)'\neq 0$，又因为当 x 趋近于 0 时，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}x^3+1+x-e^x=0$，$\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$，由洛必达法则可知：

$$\lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3+1+x-e^x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{2}x^2+1-e^x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x-e^x}{2}=-\frac{1}{2}$$

另一方面，当 x 趋近于正无穷时，由洛必达法则可知：

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{2}x^3+1+x-e^x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3}{2}x^2+1-e^x}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-e^x}{2}=-\infty$$

综上所述，$g(x)_{\max}=-\frac{1}{2}$，则 a 的取值范围为$[-\frac{1}{2},+\infty)$。

分析 2020 年高考数学理科试卷综合难度较大，本题作为压轴题难度系数为 0.4，具有较大区分度。很多学生在处理完“拦路虎”圆锥曲线后没有足够的时间来解决这道题，便使用洛必达法则求解得到答案 $a\geq-\frac{1}{2}$。虽然函数 $g(x)$满足洛必达法则的使用条件，但该做法未曾考虑 $g(x)$是否是单调函数，也没有仔细推敲端点处是否是最值点。因此，在使用洛必达法则求参数取值范围的时候，一定要辨析参数分离后的具体函数的性质。同时，高中数学中洛必达法则是有替代品的，学生可以根据多次求导，再结合端点效应得到答案(见下面正解)。由于各省份改卷标准不一样，阅卷人对使用大学知识解决中学问题的看法也不尽相同，对于某些省份而言，改弦易辙才是良策，但洛必达法则却可作为猜测答案、检验结果的有效工具。

正解 当 $x\geq 0$ 时，由 $f(x)\geq\frac{1}{2}x^3+1$，得 $e^x+ax^2-x\geq\frac{1}{2}x^3+1$

当 $x=0$ 时，$1\geq 1$ 恒成立，符合题意。

当 $x>0$ 时，整理可得 $a\geq\dfrac{\frac{1}{2}x^3+1+x-e^x}{x^2}$，令 $g(x)=\dfrac{\frac{1}{2}x^3+1+x-e^x}{x^2}$，则 $g'(x)=\dfrac{(2-x)\left(e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1\right)}{x^3}$，设 $h(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1$，则 $h'(x)=e^x-x-1\geq 0$，$h(x)$在 $(0,+\infty)$ 单调递增，$h(x)>h(0)=0$。因此，$g(x)$在(0, 2)单调递增，在 $(2,+\infty)$ 单调递减，故 $g(x)_{\max}=g(2)=\frac{7-e^2}{4}$，即 $a\geq\frac{7-e^2}{4}$。

3.1.2. 不顾法则使用条件随便乱用

题目(2018 年全国卷 II 理 第 21 题)已知函数 $f(x)=e^x-ax^2$

(1) 若 $a=1$ 时，证明：当 $x\geq 0$ 时，$f(x)\geq 1$；

(2) 若 $f(x)$在 $(0,+\infty)$ 只有一个零点，求 a 的值。

错解(2) 若 $f(x)$在 $(0,+\infty)$ 只有一个零点，等价于方程 $e^x-ax^2=0$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 只有一个解，即函数 $g(x)=a$ 与函数 $h(x)=\frac{e^x}{x^2}$ 只有一个交点时，a 的取值。

由 $h'(x)=\frac{(x-2)e^x}{x^3}$，则函数 $h(x)$在区间(0, 2)单调递减，在区间 $(2,+\infty)$ 单调递增，所以函数 $h(x)_{\min}=h(2)=\frac{e^2}{4}$。函数 e^x 和函数 x^2 均为连续可导函数，且 $(x^2)'\neq 0$，又因为当 x 趋于 0 时，由洛必达法则可知：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}$，且当 x 趋于正无穷时，由洛必达法则可知：$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty$。所以，函数 $h(x)$在区间(0, 2)的取值范围为$\left[\frac{e^2}{4},\frac{1}{2}\right)$，在区间 $(2,+\infty)$ 的取值范围为$\left[\frac{e^2}{4},+\infty\right)$。若函数 $g(x)=a$ 与函数 $h(x)=\frac{e^x}{x^2}$ 只有一个交点，则 $a=\frac{e^2}{4}$ 或 $a\geq\frac{1}{2}$。

分析 本解法错误原因在于未充分考虑洛必达法则的使用条件，函数 $h(x)$的极限并不是不定式，当 x

趋于 0 时，e^x 趋于常数 1，x^2 趋于 0，不属于 $\frac{0}{0}$ 型极限，则不能使用洛必达法则。并且在多次使用洛必达法则求不定式极限时，必须对每一步的极限都做相应判断，检验使用前提是否成立。

正解 当x趋于 0 时，e^x 趋于常数 1，x^2 趋于 0，则 $h(x)$趋于正无穷。当 x 趋于正无穷时，$h(x)$趋于正无穷。又因为 $h(x)$在区间(0, 2)单调递减，在区间 $(2,+\infty)$ 单调递增，且最小值为 $\frac{e^2}{4}$ 。所以当 $a=\frac{\mathrm{e}^2}{4}$ 时，$f(x)$在 $(0,+\infty)$ 只有一个零点。

3.2. 洛必达法则的正确应用举例

题目(2017 年全国卷 II 文 第 21 题)设函数 $f(x)=(1-x^2)e^x$

(1) 讨论 $f(x)$的单调性；

(2) 当 $x\ge 0$ 时，$f(x)\le ax+1$，求 a 的取值范围。

解析(2) 当 $x=0$ 时，$1\le 1$ 恒成立，符合题意。

当 $x>0$ 时，整理可得 $a\ge\frac{(1-x^2)e^x-1}{x}$ ，令 $\mathrm{g}(x)=\frac{(1-x^2)e^x-1}{x}$ ，因此本题只需要求出 $\mathrm{g}(x)_{\max}$ 。函数 $(1-x^2)e^x-1$ 和函数 x 均为连续可导函数，且 $(x)'\ne 0$ 。由于函数 x^2 和函数 e^x 在区间 $(0,+\infty)$ 均为增函数，则 x^2e^x 也为增函数，$-x^2e^x$ 为减函数，因此 $g(x)$为减函数。又因为当 x 趋近于 0 时，$\lim\limits_{x\to 0}(1-x^2)e^x-1=0$，$\lim\limits_{x\to 0}x=0$，由洛必达法则可知：

$$\lim_{x\to 0}\mathrm{g}(x)=\lim_{x\to 0}\frac{(1-x^2)e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-2x-x^2)e^x}{1}=1$$

综上所述，$\mathrm{g}(x)_{\max}=1$，则a的取值范 s 围为$[1,+\infty)$。

标答(2) $f(x)=(1-x)(1+x)e^x$

当 $a\ge 1$ 时，设函数 $h(x)=(1-x)e^x$，$h'(x)=-xe^x<0(x>0)$，因此 $h(x)$在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，而 $h(0)=1$，故 $h(x)\le 1$，所以 $f(x)=(1+x)h(x)\le 1+x\le ax+1$。

当 $0<a<1$ 时，设函数 $\mathrm{g}(x)=e^x-x-1$，$\mathrm{g}'(x)=e^x-1>0(x>0)$，所以 $g(x)$在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，而 $\mathrm{g}(0)=0$，故 $e^x\ge x+1$。当 $0<x<1$时，$f(x)>(1-x)(1+x)^2$，$(1-x)(1+x)^2-ax-1=x(1-a-x-x^2)$，取 $x_0=\frac{\sqrt{5-4a}-1}{2}$，则 $x_0\in(0,1)$，$(1-x_0)(1+x_0)^2-ax_0-1=0$，故 $f(x_0)>ax_0+1$。

综上所述，a 的取值范围是 $[1,+\infty)$。

分析 已有大量研究表明洛必达法则在处理导数中的恒成立问题时的优越性，本文不再赘述[5]。就本题而言，该解法与标答解法对比计算量小，避免了纷繁复杂的分类讨论，可谓高屋建瓴，势如破竹。在洛必达法则的合理应用上，首先应当关注参数分离后的函数是否为不定式极限，其次看它是否满足洛必达法则的其他条件，最后通过判断函数的单调性和极值点，运用洛必达法则进行求解。

4. 洛必达法则融入高中数学的教学设计

鉴于目前丰富多彩的以解题为主的研究操作性不强，学生难以理解洛必达法则的本质与使用条件，特以此课例进行教学设计。洛必达法则的严格证明涉及到柯西中值定理和函数极限的证明，对选修 A 类和 B 类课程的学生而言，理解洛必达法则不在话下。但对只为参加高考的学生而言，$\varepsilon-\delta$ 语言晦涩难懂，因此本设计主要面向此类学生，基于学生对“极限与导数”有关知识的掌握，探究如何使学生理解洛必

达法则，而非严格证明，期以为一线教学提供参考。

4.1. 教学内容分析

在高考中，有一类常考问题：已知函数 $f(x)$的定义域为$(x_0,+\infty)$(或$(-\infty,x_0)$)，要使含有参数不等式在该区间上恒成立，求参数的取值范围。学生拿到题目后将参数分离，变换成$a \ge \frac{f(x)}{g(x)}$(或$a \le \frac{f(x)}{g(x)}$)的形式，其中 x_0 是 x 的临界值，且 $f(x_0)=0$(或∞)，$g(x_0)=0$(或∞)。对于该类问题常见的解题方式有三种：一是找到分类关键点，对参数进行分类讨论求解；二是分离参数法，通过多次求导确定$\frac{f(x)}{g(x)}$的单调性，求出$\frac{f(x)}{g(x)}$的最值；三是端点效应法，先通过必要性求解参数a的范围，再结合不等式放缩证明充分性[6]。虽然学生有三种解题思路可供选择，但在实际操作过程中又会因技巧性过强、式子复杂繁琐、分类讨论不全等原因得不到答案。事实上，该类试题是与洛必达法则密切相关的。洛必达法则是高等数学的重要内容，以此为背景的高考压轴题屡见不鲜，学生若以洛必达法则居高临下地分析和处理此类问题，往往简便易行。在学习本节课之前，学生已经具备极限与导数的相关知识，感受过逼近的极限思想，探究过导数的概念及其数学表达式，并学习过如何利用导数研究函数的性质。基于学生已有的认知结构很容易理解什么是不定式，教师并不需要对法则进行严格证明，只需要适时、适当、适切地引入洛必达法则，帮助学生理解法则及其使用条件即可。

4.2. 教学目标

(1) 知识与技能目标：理解洛必达法则及其使用条件，能够运用洛必达法则解决带参函数的恒成立问题；

(2) 过程与方法目标：根据导数的定义向学生解释洛必达法则，通过例题向学生解释其方法的应用；

(3) 情感态度与价值观目标：介绍法国数学家洛必达以及伯努利与洛必达法则的故事，渗透数学文化，激发学生的学习兴趣，培养学生的探究精神。

4.3. 教学重难点

(1) 教学重点：应用洛必达法则解决恒成立问题；

(2) 教学难点：对洛必达法则及其使用条件的理解。

4.4. 教学过程

(1) 问题引入 导出课题

教师带领学生复习选择性必修第二册第五章——一元函数的导数及其应用的有关知识点，抛出以下问题：若不等式 $a > \sin x$ 对于 $x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 恒成立，求 a 的取值范围。

学生在理解题目的基础上采用参数分离法进行求解：当 $x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，整理可得 $x > \frac{\sin x}{x}$，求出$\frac{\sin x}{x}$的最大值即可。构造函数 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$，则 $f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$。部分学生做到这里便没有头绪，若对 $x\cos x-\sin x$ 进行求导，求导结果仍然含有三角函数，求不出答案。数学思维能力强的同学会对 $x\cos x-\sin x$ 进行变换，得到 $\cos x(x-\tan x)$，即 $f'(x)=\frac{\cos x(x-\tan x)}{x^2}$。因为 $x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\frac{\cos x}{x^2}>0$，

$x-\tan x<0$，所以 $f'(x)<0$，$f(x)$在区间$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递减。但由于函数 $f(x)$在 $x=0$ 处无定义，无法取到最大值，仍然求不出答案。

教师看学生苦苦没有头绪甚至想放弃，引出课题——洛必达法则，带领学生用一种新的方法解决此问题。

【设计意图】温故而知新，首先带领学生复习导数的相关知识点，为后面通过导数的定义来理解洛必达法则做铺垫。然后提出问题让学生计算，发现利用分离参数法结合导数求解存在困难，适时引出新的解决方法——洛必达法则，激发学生的求知欲。

(2) 回归定义 理解法则

在学习新知识点之前，教师向学生生动讲解着法国数学家洛必达的故事，作为伟大的数学思想的传播者，编著出世界上第一本微积分教科书，而洛必达法则是其重大代表作中的一条著名定理。介绍完后教师板书洛必达法则(部分)：定理 1，对于$\frac{0}{0}$型极限，若函数 $f(x)$、$g(x)$满足以下条件：(1) 在点 x_0 的某去心领域内可导，且 $g'(x)\neq 0$；(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$；(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A(\text{或}\infty)$；则有结论：$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A(\text{或}\infty)$。定理 2，对于$\frac{\infty}{\infty}$型极限，若函数 $f(x)$、$g(x)$满足以下条件：(1) 在点 x_0 的某去心领域内可导，且 $g'(x)\neq 0$；(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$；(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A(\text{或}\infty)$；则有结论：$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A(\text{或}\infty)$。强调洛必达法则是确定未定式值的一种特殊方法，若条件符合，洛必达法则可连续多次使用，直到求出极限为止。

学生基于已有的知识基础能够理解未定式的特征和条件(2)，发现洛必达法则是与函数的导数密切相关的，但对条件(1)、条件(3)和结论的理解存在困难。

对于条件(1)，高中阶段所涉及到的基本初等函数都是连续光滑的，满足此要求。对于定理 1 的条件(3)，教师引导学生回归导数的定义，函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 的导数 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$，函数 $y=g(x)$ 在 $x=x_0$ 的导数 $g'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$，当 x趋于x_0时，分子分母均趋于 0，二者都是$\frac{0}{0}$型的不定式极限。一般而言，在临界值 x_0 处，$f(x_0)=g(x_0)=0$，则有 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$。因此，若有 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A(\text{或}\infty)$，即右侧极限存在，则回推原极限存在也为 A (或∞)。同理，对于定理 2 的$\frac{\infty}{\infty}$型而言，高中生能够理解若 $f(x)$趋于 0，$\frac{1}{f(x)}$趋于∞，因此将分子分母颠倒便可得到结论。

讲解完洛必达法则后，教师回归课堂引例。因为 $f(x)$在区间$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递减，且$\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$，

$\lim\limits_{x\to0}x=0$，$(x)'\neq0$，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x}{1}=1$，所以 $a\geq1$。

【设计意图】在讲授新课之前，向学生介绍洛必达的故事，激发学生的学习热情，使学生感受古人的智慧，丰富了课题。然后回归导数定义，从学生已有的认知水平出发，帮助他们理解洛必达法则的使用条件。最后，回归引例，利用洛必达法则解决，让学生感受洛必达法则在处理该类问题时的优越性。

(3) 例题讲解 巩固法则

例 1 (2010 年全国新课标 理 第 21 题)设函数 $f(x)=e^x-1-x-ax^2$

(1) 若 $a=0$，求 $f(x)$的单调区间；

(2) 当 $x\geq0$ 时，$f(x)\geq0$，求 a 的取值范围。

解 (2) 当 $x=0$ 时，$0\geq0$ 恒成立，符合题意；

当 $x>0$ 时，$f(x)\geq0$，整理可得 $a\leq\dfrac{e^x-1-x}{x^2}$，即要求 $\dfrac{e^x-1-x}{x^2}$ 的最小值。令 $g(x)=\dfrac{e^x-1-x}{x^2}$，则 $g'(x)=\dfrac{e^x(x-2)+x+2}{x^3}$。令 $h(x)=e^x(x-2)+x+2$，则 $h'(x)=xe^x-e^x+1$，$h''(x)=xe^x$，因为 $x>0$，所以 $h''(x)>0$，$h'(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 单调递增。因为 $h'(x)>h'(0)=0$，则 $h(x)$在区间 $(0,+\infty)$ 单调递增。因为 $h(x)>h(0)=0$，则 $g(x)$在区间 $(0,+\infty)$ 单调递增。$\lim\limits_{x\to0}e^x-1-x=0$，$\lim\limits_{x\to0}x^2=0$，且 $(x^2)'\neq0$，由洛必达法则可知 $\lim\limits_{x\to0}g(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x}{2}=\dfrac{1}{2}$，则 $a\leq\dfrac{1}{2}$。

综上所述，a 的取值范围为$\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right]$。

例 2 (2016 年全国卷 I 理 第 21 题)设函数 $f(x)=(x-2)e^x+a(x-1)^2$ 有两个零点

(1) 求 a 的取值范围；

(2) 设 x_1，x_2 是 $f(x)$的两个零点，证明：$x_1+x_2<2$。

解(1) 函数 $f(x)$有两个零点等价于方程 $-a=\dfrac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}$ 有两个不同的实数解，令 $g(x)=\dfrac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}(x\neq1)$，$g'(x)=\dfrac{(x-2)^2+1}{(x-1)^3}e^x$。当 $g'(x)>0$ 时，$x>1$，$g(x)$单调递增。当 $g'(x)<0$ 时，$x<1$，$g(x)$单调递减。$\lim\limits_{x\to1}g(x)=\lim\limits_{x\to1}\left[\dfrac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}\right]=-\infty$，由洛必达法则可知，$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x-1)e^x}{2(x-1)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{2}=+\infty$，同理可得，$\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x-1)e^x}{2(x-1)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{2}=0$。因此，当 $-a<0$ 时，方程有两个不同的实数解，即 $a>0$。

综上所述，a 的取值范围为 $(0,+\infty)$。

【设计意图】设置两道高考例题，帮助学生理解洛必达法则，感受法则在处理高考压轴题时的优越性。第一道例题涉及的是 $\dfrac{0}{0}$ 型极限，第二道例题涉及的是 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型极限，有助于学生区分定理 1 和定理 2 的使用条件，深化对法则的理解。

(4) 小结提升布置作业

教师带领学生复习本节课的知识点，解决学生的疑问，梳理总结洛必达法则的使用条件，得到使用

流程图(见图 1)。

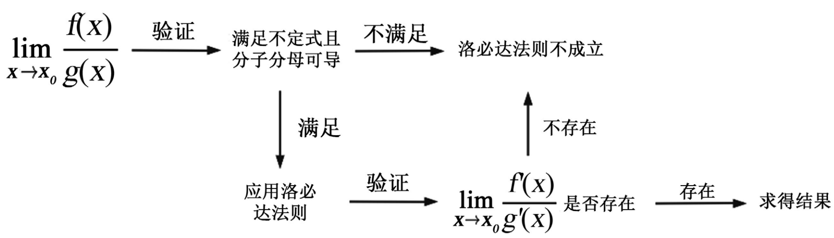

Figure 1. Flowchart of the use of Lopita's Law
图 1. 洛必达法则使用流程图

本节课的课后作业：

1. (2014 年北京卷理 第 18 题)已知函数 $f(x) = x\cos x - \sin x$， $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

(1) 求证： $f(x) \le 0$；

(2) 若 $a < \frac{\sin x}{x} < b$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上恒成立，求 a 的最大值与 b 的最小值。

2. (2014 年陕西卷理 第 23 题)设函数 $f(x) = \ln(1+x)$， $g(x) = xf'(x)$， $x \ge 0$，其中 $f'(x)$ 是 $f(x)$的导函数

(1) $g_1(x) = g(x)$， $g_{n+1}(x) = g(g_n(x))$， $n \in N_+$，求 $g_n(x)$ 的表达式;

(2) 若 $f(x) \ge ag(x)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围;

(3) 略。

【设计意图】以流程图的方式带领学生总结本节课所讲，培养学生的归纳总结能力。最后，以两道高考真题作为课后作业，保证本课时知识和方法的落实，为后续学习打下基础。

5. 结语

为了避免学生“洛必错”，以两道高考真题为例分析了学生在解题时的错误应用，还以一道高考真题为例展示了洛必达法则的正确应用。立足于高中数学教学的实际需要，针对高中生的认知特点，尝试设计洛必达法则融入高中数学课堂的教学设计。虽然洛必达法则在解题时有替代品，但学生基于高观点的角度审视中学数学问题，能够提升自身分析问题、解决问题以及探究性学习的能力，促进建构正确且全面的数学知识网络。以上是笔者对洛必达法则研究的一点拙见，恳请批评指正。

基金项目

黄冈师范学院 2023 年研究生工作站课题“SOLO 分类理论下高中生数学问题解决能力的测评体系研究——以黄州中学为例”(50sss32023021)的研究成果。

参考文献

[1] 张亚锦, 胡典顺. 高观点视角下 2021 年高考数学试题赏析[J]. 理科考试研究, 2022, 29(15): 12-14.
[2] 华东师范大学数学科学学院. 数学分析(第五版上册) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2019.
[3] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2020.
[4] 熊惠民, 虞莉娟. 从数学证明的二重性看其教育价值[J]. 数学教育学报, 2007, 16(1): 17-20.
[5] 李超. “高观点”下高中导数解题及教学研究[D]: [硕士学位论文]. 昆明: 云南师范大学, 2021.
[6] 敖羚峰. 高中数学导数试题分析、解题错误与教学对策研究[D]: [硕士学位论文]. 上海: 华东师范大学, 2021.