

Stability and Bifurcation Analysis for the Dynamical Model of Special Permanent Magnet Synchronous Motor

Shanshan Liu, Liangqiang Zhou, Fangqi Chen

College of Science, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing Jiangsu
Email: zlgrex@sina.com

Received: Sep. 20th, 2015; accepted: Oct. 12th, 2015; published: Oct. 15th, 2015

Copyright © 2015 by authors and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).
<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

Abstract

Nonlinear dynamic characteristics of the permanent magnet synchronous motor system are investigated in this paper. All the equilibriums of the system and their stabilities are studied. Using the Hopf bifurcation theorem and the first Lyapunov coefficient, the conditions and the type of Hopf bifurcations for the system are investigated. With the Runge-Kutta method, the phase portraits of the system are given, which verify the analytical results.

Keywords

Permanent Magnet Synchronous Motor, Stability, Hopf Bifurcations

一类永磁同步电机动力学模型的稳定性和分岔分析

刘珊珊, 周良强, 陈芳启

南京航空航天大学理学院, 江苏 南京
Email: zlgrex@sina.com

收稿日期: 2015年9月20日; 录用日期: 2015年10月12日; 发布日期: 2015年10月15日

摘要

这篇文章研究了一类永磁同步电机系统的非线性动力学特性。给出了该系统的所有平衡点及其稳定性，并利用Hopf分岔定理和第一李雅普诺夫系数研究了系统产生Hopf分岔的参数条件和类型。最后利用Runge-Kutta方法对系统进行数值模拟，给出了系统的相图，验证了理论分析的结果。得出当 $c > c_0$ 时，系统出现次临界分岔。

关键词

永磁同步电机，稳定性，Hopf分岔

1. 引言

永磁电机是现代材料科学、电子电力科学及电动机控制理论相结合的产物。永磁电机是利用永磁材料产生磁场，替代传统电机由电流励磁产生的磁场，使得永磁电机具有结构简单、运行可靠、体积小、重量轻、损耗低、效率高，电机的外形和尺寸可以灵活多变等显著特点[1]。随着国际社会对低碳经济和节能减排要求的日益提高，永磁同步电机传动系统凭借其性能优势在伺服系统[2] [3]、电动汽车[4]、轨道交通[5]、采暖通风、石油、钻井、电梯[6]、流程工业、船舶推进[7]、风力发电[8]、航空航天和国防等诸多领域获得了越来越广泛的应用。永磁同步电机是众多高新技术和高新技术产业的基础，它与电力电子技术和微电子控制技术相结合，可以制造出许多新型的、性能优异的机电一体化产品和装备，代表了21世纪电机发展的方向[9]。因此，对该模型的动力学研究具有重要的理论和实际意义。

本文对一类永磁同步电机模型，研究了该系统平衡点的稳定性和Hopf分岔；利用数值模拟，验证了理论分析的结果。

2. 数学模型

当同步磁阻电机中没有励磁绕组和阻尼绕组，相应的系统方程为[10]

$$\begin{cases} v_{as} = R_s i_{as} + \frac{d\psi_{as}}{dt} \\ v_{bs} = R_s i_{bs} + \frac{d\psi_{bs}}{dt} \\ v_{cs} = R_s i_{cs} + \frac{d\psi_{cs}}{dt} \end{cases} \quad (1)$$

其中， v_{as}, v_{bs}, v_{cs} 是定子相电压； i_{as}, i_{bs}, i_{cs} 是定子相电流； $\psi_{as}, \psi_{bs}, \psi_{cs}$ 是定子磁链； R_s 是定子电阻。通过适当的时间变换、变量变换和状态变量变换[11] [12]，同步磁阻电机驱动方程可以简化为[10]

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -bx + yz \\ \frac{dy}{dt} = -y - xz + cz \\ \frac{dz}{dt} = xy - az \end{cases} \quad (2)$$

其中 a, b, c 是正常数。

3. 系统的平衡点及稳定性分析

显然 $O(0, 0, 0)$ 是系统的平衡点非零平衡点可以通过解下列方程组获得

$$\begin{cases} x^2 - cx + a = 0 \\ y^2 = ab \\ z = \frac{xy}{a} \end{cases} \quad (3)$$

- 1) 当 $\Delta = c^2 - 4a < 0$, 只有一个平衡点 $(0, 0, 0)$;
- 2) 当 $\Delta = c^2 - 4a = 0$, 有三个平衡点 $\left(\frac{c}{2}, \pm\sqrt{ab}, \pm\frac{c}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}\right); (0, 0, 0)$;
- 3) 当 $\Delta = c^2 - 4a > 0$, 有五个平衡点 $\left(\frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4a}}{2}, \pm\sqrt{ab}, \frac{xy}{a}\right); (0, 0, 0)$ 。

显然, 平衡点 $(0, 0, 0)$ 是稳定的结点, 因为相应的特征值都为负数, 即 $-a, -b, -1$ 。下面讨论非零平衡点的稳定性。

系统在点 $s_+(x_0, y_0, z_0)$ 处对应矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} -b & z_{eq} & y_{eq} \\ -z_{eq} & -1 & c - x_{eq} \\ y_{eq} & x_{eq} & -a \end{pmatrix} \quad (4)$$

其中 $x_0 = \frac{c + \sqrt{c^2 - 4a}}{2}$, $y_0 = \sqrt{ab}$, $z_0 = \frac{x_0 y_0}{a}$ 。

系统在 $s_-(-x_0, -y_0, -z_0)$ 和 $s_+(x_0, y_0, z_0)$ 处有相同的特征多项式。即

$$f(\lambda) = \lambda^3 + (a+b+1)\lambda^2 + \frac{b}{a}(a+x_{eq}^2)\lambda^2 + 2b(a+x_{eq}^2) \quad (5)$$

通过运用 Routh-Hurwitz 稳定性准则, 平衡点渐进稳定的条件可以表示为

$$\begin{cases} 2b(x_{eq}^2 - a) > 0 \\ \frac{ab(3a+b+1) - b(a-b-1)x_{eq}^2}{a(a+b+1)} > 0 \end{cases} \quad (6)$$

4. Hopf 分岔分析

由 Hopf 分岔定理[13], 当系统中有一对复数特征值满足下列条件时, 系统将产生 Hopf 分岔。

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(\lambda)|_{c=c_0} = 0 \\ \operatorname{Im}(\lambda)|_{c=c_0} \neq 0 \\ \frac{d}{dc} \operatorname{Re}(\lambda)|_{c=c_0} \neq 0 \end{cases} \quad (7)$$

其中, c_0 是系统发生分岔时 c 的关键值。

因为在(0, 0, 0)点没有类似 $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ ($\omega > 0$) 的特征根, 所以在(0,0,0)点系统不会发生 Hopf 分岔。若方程(5)有纯虚根 $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ ($\omega > 0$), 则有

$$-i\omega^3 - (a+b+1)\omega^2 + \frac{b}{a}(a+x_{eq}^2)i\omega + 2b(x_{eq}^2 - a) = 0 \quad (8)$$

通过将实部和虚部分离, 可得

$$\begin{cases} \omega^2 = \frac{b}{a}(a+x_{eq}^2) \\ \omega^2 = \frac{2b(x_{eq}^2 - a)}{a+b+1} \end{cases} \quad (9)$$

对于正的 a, b, c 和 n 的存在, 参数必须满足以下条件:

$$\begin{cases} a-b-1 > 0 \\ x_{eq}^2 - a > 0 \\ x_{eq}^2 = \frac{a(3a+b+1)}{a-b-1} \end{cases} \quad (10)$$

若 a 和 c 为正值, 那么 $\left[\frac{c-\sqrt{c^2-4a}}{2}\right]^2 < a$ 。所以, 若有一组对称的平衡点 $\left(\frac{c-\sqrt{c^2-4a}}{2}, \pm\sqrt{ab}, \frac{x_{eq}y_{eq}}{a}\right)$ 存在, 他们一定不会满足式(7)所示分岔条件, 而且从式(6)中可知, 它们总是不稳定的。而通过将 $x_{eq} = \frac{c+\sqrt{c^2-4a}}{2}$ 代入式(10)中, 可获得发生 Hopf 分岔时 c 的关键值

$$c_0 = 4a\sqrt{\frac{a}{[(a-b-1)(3a+b+1)]}} \quad (11)$$

相应的特征值可以表示为

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -(a+b+1) \\ \lambda_{2,3} &= \pm i\sqrt{bc_0\left(c_0 + \frac{\sqrt{c_0^2-4a}}{2a}\right)} \end{aligned} \quad (12)$$

显然, 从式中(6)可以看出, 当 c 足够大但仍小于关键值 c_0 时, 一对平衡点 $\left(\frac{c+\sqrt{c^2-4a}}{2}, \pm\sqrt{ab}, \frac{x_{eq}y_{eq}}{a}\right)$ 为稳定的。一旦超过了关键值, 这对平衡点将变成不稳定的鞍点。

下面利用第一李雅普诺夫系数[14]讨论 Hopf 分岔的超(次)临界性。假设 C^n 是一个定义在复数域 C 的线性空间, 对任意向量 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$, 其中 $x_i, y_i \in C$ ($i = 1, 2, \dots, n$),

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \overline{x_i} y_i。$$

下面引入范数 $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, 这样 C^n 是一个 Hilbert 空间。我们考虑以下线性系统:

$$\dot{x} = Ax + F(x), \quad x \in R^n \quad (13)$$

其中 $F(x) = O(\|x\|^2)$ 是光滑的函数。

$$F(x) = \frac{1}{2}B(x, x) + \frac{1}{6}C(x, x, x) + O(\|x\|^4) \quad (14)$$

其中 $B(x, x)$ 和 $C(x, x, x)$ 分别是双线性和三次函数。

若方程(4)的矩阵 A 有一对纯虚根 $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ ($\omega > 0$), $q \in C^n$ 是 A 的对应于 λ_1 的特征向量, 有 $Aq = i\omega q$, $A\bar{q} = -i\omega\bar{q}$, 同时引入伴随向量 $p \in C^n$, 满足 $A^T p = -i\omega p$, $A^T \bar{p} = i\omega \bar{p}$, 并且 $\langle p, q \rangle = 1$.

现在引入变换

$$\begin{cases} X = x - x_{eq} \\ Y = y - y_{eq} \\ Z = z - z_{eq} \end{cases} \quad (15)$$

则平衡点 (x_{eq}, y_{eq}, z_{eq}) 可以平移到原点 $(0, 0, 0)$ 。

根据在平衡点 $O(0, 0, 0)$ 处的第一李雅普诺夫系数定理有

$$l_1(0) = \frac{1}{2\omega} \operatorname{Re} \left(\langle P, C(q, q, \bar{q}) \rangle - 2 \langle p, B(q, A^{-1}B(q, \bar{q})) \rangle + \langle p, B(\bar{q}, (2i\omega E - A)^{-1}B(q, q)) \rangle \right) \quad (16)$$

当 $a = 6$, $b = 1$ 时, $c_0 = 6\sqrt{\frac{6}{5}}$, $x = 5\sqrt{\frac{6}{5}}$, $y = \sqrt{6}$, $z = \sqrt{5}$ 。

此时,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{5} & \sqrt{6} \\ -\sqrt{5} & -1 & \sqrt{\frac{6}{5}} \\ \sqrt{6} & 5\sqrt{\frac{6}{5}} & -6 \end{pmatrix} \quad (17)$$

接下来计算矩阵 A 相应的向量 p 、 q , 满足 $Aq = i\omega q$, $A^T p = -i\omega p$, 且 $\langle p, q \rangle = 1$ 。其中

$$q = \left(\frac{2\sqrt{690} + \sqrt{115}i}{46 + 23\sqrt{6}i}, \frac{-\sqrt{138} + 7\sqrt{23}i}{46 + 23\sqrt{6}i}, \frac{\sqrt{115}}{23} \right)^T \quad (18)$$

$$p = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{418}}{38} \\ \frac{-\sqrt{2090} + \sqrt{3135}i}{76 + 19\sqrt{6}i} \\ \frac{\sqrt{418}i}{76 + 19\sqrt{6}i} \end{pmatrix} \quad (19)$$

$$\bar{q} = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{690} - \sqrt{115}i}{46 - 23\sqrt{6}i} \\ \frac{-\sqrt{138} - 7\sqrt{23}i}{46 - 23\sqrt{6}i} \\ \frac{\sqrt{418}i}{76 + 19\sqrt{6}i} \end{pmatrix} \quad (20)$$

\bar{q} 表示与 q 共轭的向量。

对于该系统，双线性和三线性函数分别是

$$B(X, X') = (yz' \quad -xz' \quad xy')^T \quad (21)$$

$$C(X, X', X'') = (0 \quad 0 \quad 0)^T \quad (22)$$

则

$$B(q, q) = \begin{pmatrix} \frac{7\sqrt{5}i - \sqrt{30}}{46 + 23\sqrt{6}i} \\ \frac{-10\sqrt{6} - 5i}{46 + 23\sqrt{6}i} \\ \frac{19\sqrt{5} - 13\sqrt{30}i}{46 - 92\sqrt{6}i} \end{pmatrix} \quad (23)$$

$$B(q, \bar{q}) = \begin{pmatrix} \frac{7\sqrt{5}i - \sqrt{30}}{46 + 23\sqrt{6}i} \\ \frac{-10\sqrt{6} - 5i}{46 + 23\sqrt{6}i} \\ \frac{-5\sqrt{5} - 15\sqrt{30}i}{230} \end{pmatrix} \quad (24)$$

系数矩阵的逆矩阵是

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{5}}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{24} \\ \frac{\sqrt{15}}{10} & 0 & \frac{\sqrt{30}}{60} \\ \frac{\sqrt{6}}{12} & -\frac{\sqrt{30}}{24} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix} \quad (25)$$

令

$$S = A^{-1}B(q, \bar{q}) = \begin{pmatrix} \frac{52\sqrt{30} + 51\sqrt{5}i}{1104 + 552\sqrt{6}i} \\ \frac{21i + 2\sqrt{6}}{552 + 276\sqrt{6}i} \\ \frac{59\sqrt{30}i + 48\sqrt{5}}{2208 + 1104\sqrt{6}i} \end{pmatrix} \quad (26)$$

则

$$B(q, s) = \begin{pmatrix} \frac{461\sqrt{690} + 18\sqrt{115}i}{50784 - 101568\sqrt{6}i} \\ \frac{185\sqrt{138} + 3780\sqrt{23}i}{50784 - 101568\sqrt{6}i} \\ \frac{44\sqrt{690}i + 3\sqrt{115}}{-12696 + 25392\sqrt{6}i} \end{pmatrix} \quad (27)$$

所以

$$\langle p, B(q, s) \rangle = \frac{-820\sqrt{72105} + 945\sqrt{48070}i}{1286528 + 1447344\sqrt{6}i} \quad (28)$$

令

$$s' = (2i\omega E - A)^{-1} B(q, q) = \begin{pmatrix} \frac{-1215\sqrt{5}i + 445\sqrt{30}}{30710 + 830\sqrt{6}i} \\ \frac{721\sqrt{6} + 2448i}{30636 + 828\sqrt{6}i} \\ \frac{-3120\sqrt{5} + 365\sqrt{6}i}{-61272 - 1656\sqrt{6}i} \end{pmatrix} \quad (29)$$

则

$$B(\bar{q}, s') = \begin{pmatrix} \frac{6204\sqrt{115} + 5617\sqrt{690}i}{1294992 + 742716\sqrt{6}i} \\ \frac{2555\sqrt{138} - 3120\sqrt{690} + (21840\sqrt{115} - 2190\sqrt{23})i}{2589984 + 1485432\sqrt{6}i} \\ \frac{1167\sqrt{115} + 866\sqrt{690}i}{259624 + 148902\sqrt{6}i} \end{pmatrix} \quad (30)$$

所以

$$\langle p, B(\bar{q}, s') \rangle = 0.07789334316 + 0.02819563309i \quad (31)$$

因此有

$$\begin{aligned} l_1(0) &= \frac{1}{2\omega} \operatorname{Re} \left(\langle P, C(q, q, \bar{q}) \rangle - 2 \langle p, B(q, A^{-1}B(q, \bar{q})) \rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle p, B(\bar{q}, (2i\omega E - A)^{-1} B(q, q)) \rangle \right) \\ &= 0.002948073883 > 0 \end{aligned} \quad (32)$$

从而在这组参数下, 该 Hopf 分岔类型是次临界的。

5. 数值模拟

下面利用 Runge-Kutta 方法对系统进行数值模拟。取初值 $x(0) = 4, y(0) = 2, z(0) = 1$ 。

当 $a = 6, b = 1, c = 5.5 < c_0$ 时, $y(t)$ 与 $z(t)$ 的关系如图 1 所示。

当 $a = 6, b = 1, c = 7.0 > c_0$ 时, $y(t)$ 与 $z(t)$ 的关系如图 2 所示。

由图 1 我们可以看出随着 t 的增大, $y(t)$ 与 $z(t)$ 最终趋向于平衡点(4, 2); 由图 2 可以看出在平衡点附近首先出现一个周期解, 随着时间 t 的增大, $y(t)$ 和 $z(t)$ 最终趋于平衡点(0, 0), 这与理论分析的结果是一致的。

6. 结论

这篇文章利用解析和数值方法研究了一类永磁同步电机的局部动力学行为。分析了同步磁阻电机的平衡点的稳定性并利用 Hopf 分岔定理和第一李雅普诺夫系数分析了系统发生 Hopf 分岔的条件和类型,

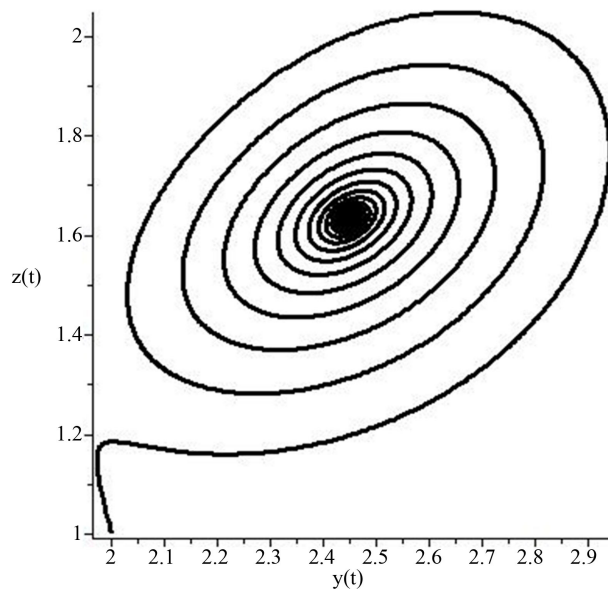


Figure 1. Projection of the phase portrait in y-o-z plane

图 1. 相图在 y-o-z 平面上的投影

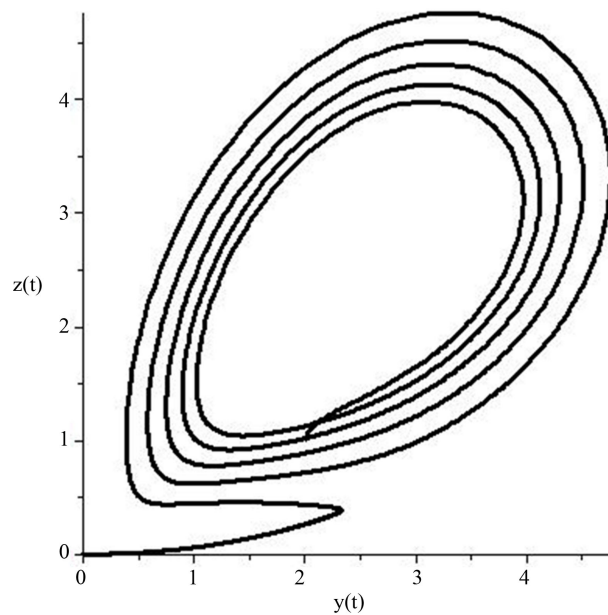


Figure 2. Projection of the phase portrait in y-o-z plane

图 2. 相图在 y-o-z 平面上的投影

得出当 $c > c_0$ 时，系统出现次临界分岔。为这类模型的分析提供了理论参考。

致 谢

感谢国家自然科学基金资助项目，中国博士后基金特别资助项目和高校博士基金项目的资助。

基金项目

国家自然科学基金资助项目 (Nos. 11202095, 11172125); 中国博士后基金特别资助项目 (No.

2013T60531); 高校博士点基金项目(No. 20133218110025)。

参考文献 (References)

- [1] 中研普华永磁电机行业分析专家 (2015) 2015-2020 年中国永磁电机行业市场深度调研与投资前景分析报告.
- [2] 郭庆鼎, 孙宜标, 王丽梅 (2006) 现代永磁电动机交流伺服系统. 中国电力出版社, 北京, 11 p.
- [3] 李永东, 梁艳 (2002) 高性能交流永磁同步电机伺服系统现状. *中国电工技术学会电力电子学会第八届学术年会论文集*, 深圳, 1108, 1149.
- [4] Zhong, L., Rahman, M.E., Hu, W.Y., Lira, K.W. and Rahman, M.A. (1999) A direct torque controller for permanent magnet synchronous motor drives. *Energy Conversion*, **14**, 637-642. <http://dx.doi.org/10.1109/60.790928>
- [5] 冯江华 (2010) 轨道交通永磁同步牵引系统研究. *机车电传动*, **5**, 15-18.
- [6] 温文强 (2008) 永磁同步电机在电梯技术上的应用. *机械与电气*, **3**, 69-71.
- [7] 陈巨涛, 郭焱, 郑华耀 (2006) 船舶电力推进三相永磁同步电机的数学模型和仿真. 2006 年电力系统自动化学术交流研讨会, 厦门, 中国电机工程学会, 654-656.
- [8] 闫耀明, 范瑜, 王志忠 (2002) 永磁同步电机风力发电系统的自寻优控制. *电工技术学报*, **6**, 83-84.
- [9] 唐丽婵, 齐亮 (2011) 永磁同步电机的应用现状与发展趋势. *装备机械*, **1**, 8.
- [10] 邹国堂, 王政, 程明, 著 (2009) 混沌电机驱动及其应用. 科学出版社, 北京, 1-2, 54-60.
- [11] Hemati, N. (1994) Strange attractors in brushless DC motors. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications*, **41**, 40-45. <http://dx.doi.org/10.1109/81.260218>
- [12] Li, Z., Park, J.B., et al. (2002) Bifurcations and chaos in a permanent-magnet synchronous motor. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, **49**, 383-387. <http://dx.doi.org/10.1109/81.989176>
- [13] Alligood, K.T., Sauer, T.D. and Yorke, J.A. (1996) Chaos: An introduction to dynamical systems. Springer-Verlag, New York, 106-109.
- [14] Yu, Y.G. and Zhang, S.C. (2004) Hopf bifurcation analysis of the Lü system. *Chaos, Solutions and Fractals*, **21**, 1217-1220. <http://dx.doi.org/10.1016/j.chaos.2003.12.063>