

Study on resistance coefficient

Zhao Zhenguo, Huang Chunhua*

China Institute of Water Resources and Hydropower Research

Email: *robar@126.com

Abstract

In this paper, the resistance coefficient diagrams of Nikuradse, Moody and Segsda are discussed. The discussions show that resistance coefficient diagram of segsday as the Nikuradse's form can't exist, only the two dimension of open channel flow exists the resistance coefficient diagram as the form of Nikuradse diagram. In this paper, this resistance coefficient diagram is given. With this diagram, the velocity of the two dimensional open channel uniform flow on the rough plate is computed. The computation result is coincidence with the experiment value of Segsda for shallow water flow.

Keywords

Two dimensional open flow, Resistance coefficient diagram, Uniform flow

Subject Areas: Math & Physics

阻力系数的研究

赵振国, 黄春花*

中国水利水电科学研究院, 北京市 邮编: 100038

Email: *robar@126.com

收稿日期: 2015年12月22日; 发布日期: 2015年12月22日

摘要

本文对尼库拉兹、穆迪和蔡克士达等三个阻力系数图作了评述, 指出了这些图中存在的问题。文中指出, 在矩形明渠中不存在像尼库拉兹那样形式的阻力系数图。只有在二维明渠中, 才存在像尼库拉兹那样形式的阻力系数图, 并在文中给出了二维明渠均匀流的阻力系数图。利用所给图中粗糙平面上的阻力系数公式, 计算了二维粗糙渠道均匀流的流速, 并和蔡克士达的宽浅矩形渠道中的试验结果相比较, 差值在4%以内。

关键词

二维明渠流; 阻力系数图; 均匀流

1 概述

现有的流体运动的阻力系数图, 共有三个, 即尼库拉兹 (Nikuradse)^[1]的人工加糙的管流阻力系数图; 穆迪 (Moody.L.F)^[2]的商业管的阻力系数图和蔡克士达 (А.П.Э.Е.Г.Ж.Д.А)^[3]的人工加糙的矩形明渠均匀流阻力系数图。

尼库拉兹的阻力系数图在水力学中占有重要的地位, 他是第一个用图形的方式将管流中的阻力系数, 从层流到紊流直到阻力平方区, 给出了一个直观的显示。

本文对这三种阻力系数图做了评述, 并证明在矩形明渠流中不可能作出像尼库拉兹那样的阻力系数图, 只有在二维的明渠流中, 才能作出像尼库拉兹那样的阻力系数图。

本文继尼库拉兹对轴对称管流的阻力系数图之后, 给出了二维明渠均匀流的阻力系数图。

2 关于尼库拉兹、穆迪和蔡克士达阻力系数图的评述

2.1 关于尼库拉兹粗糙管中水流阻力系数图的评述

尼库拉兹于 1933 年发表了粗糙管中水流的阻力系数图, 见图 1, 此图使我们对水流从层流到紊流直到阻力平方区, 有了更清楚、更直观的概念。

图中纵坐标为阻力系数“ λ ”其定义为

$$\frac{\Delta p}{\gamma} = \lambda \frac{\Delta L}{d} \frac{v^2}{2g} \quad (1)$$

式中: d 为水管直径 (m); v 为管内水流平均速度 (m/s); $\Delta p/\gamma$ 为 ΔL (m) 距离内的水头损失 (m); g 为重力加速度 (m/s²)。横坐标为雷诺数 $Re = vd/\nu$, ν 为水的运动粘滞系数 (m²/s)

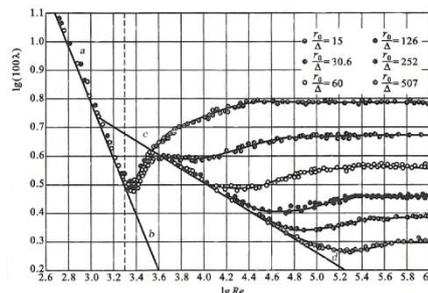


图 1 尼库拉兹阻力系数图

2.1.1 水力光滑曲线

图 1 中的 cd 曲线称为水力光滑曲线, 其公式为:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg(Re \sqrt{\lambda}) - 0.8 \quad (2)$$

关于式 (2), 文献[4]中认为“由此式可以看出, 光滑区的沿程水头损失系数 ‘ λ ’ 只与水流的雷诺数有关, 粗糙度不起作用”; 文献[5]中认为“紊流光滑区不同相对粗糙度 Δ/d 的试验点都落在直线 cd 上, 说明与 Δ/d 无关”。

二者都认为式 (2) 中的阻力系数 λ , 只同 Re 有关, 与 Δ/d 无关, 这种看法是错误的。

粘性底层的厚度 δ 大于粗糙高度 K (即[5]中的 Δ) 时, 为水力光滑, 否则将离开 cd 线进入向完全粗糙的过渡区。其临界点为

$$K = 13.9 \frac{d}{Re \sqrt{\lambda}} \quad \frac{r}{K} = \frac{1}{27.8} Re \sqrt{\lambda} \quad (3)$$

式 (3) 中, r 为水管半径, 由式 (2、3) 可得表 1:

表 1 计算结果

r/K	15.3	30.8	60	126.5	248	511
λ	0.045	0.039	0.032	0.027	0.022	0.019
$\lg(100\lambda)$	0.66	0.59	0.50	0.43	0.35	0.28
Re	1995	4345	9363	21430	46200	10300
$\lg Re$	3.3	3.64	4.0	4.33	4.66	4.82

表 1 中的数据, 除 $r/K = 15.3$ 的特殊情况外, 都同图 1 一致。一定的 r/K 值, 如 $r/K = 60$, 当 $Re > 9363$, 即 $\lg Re > 4.0$ 时, 将离开 cd 线进入过渡区。 $Re < 9363$ 时, 才为水力光滑, 受式 (2) 的约束。所以水力光滑线 cd 不是与 r/K 无关。

2.1.2 层流到紊流的过渡区

从尼库拉兹的试验资料可得，其试验雷诺数的范围见表 2

表 2 雷诺数范围

r/k	15	30.6	60	126	252	507
lg Re	3.770—5.987	3.672—6.000	3.653—5.962	3.630—5.560	4.210—5.991	4.114—5.987

从上表可见，在 $\lg Re < 3.630$ 的过渡区并无试验资料； $r/k = 15$ 时最小 $\lg Re = 3.770$ 。美国罗士 (Hunter Rouse) 教授 1981 年来华讲演中，也曾指出，过渡区的这些试验点是人为给出的，不是试验结果。

从层流 ($Re < 2300$) 转变为紊流，其起点与扰动及管壁的粗糙有关，所以在文献[7]中，从层流到紊流的过渡给出了多条曲线。

2.2 关于穆迪阻力系数图的评述

与前述阻力系数图不同，穆迪阻力系数图 (见图 2) 不是人工加糙的，而是用于商业管道。商业管道的糙度是非均匀的，各种各样的，如何来定义它们呢？仍然需要回到均匀加糙，把商业糙度化为当量的均匀糙度，用尼库拉兹糙率来表示。

水力光滑管的公式仍为式 (2)。阻力平方区的公式也和尼库拉兹一样为：

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg \frac{r}{K} + 1.74 \quad (4)$$

式中 K 为当量糙度。

从光滑到完全粗糙的过渡区，如图 2 所示，和尼库拉兹的图 1 不同，考里补缺 (Colebook) 用下式表示：

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1.74 - 2 \lg \left(\frac{K}{r} + \frac{18.7}{Re \sqrt{\lambda}} \right) \quad (5)$$

式 (5) 和商业管道的阻力试验结果的比较见图 3^[6]

式 (2) 可以改写为：

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1.74 - 2 \lg \frac{18.7}{Re \sqrt{\lambda}} \quad (6)$$

式 (5) 为式 (4) 和式 (6) 之和。Re 大时式 (5) 趋近式 (4)； K/r 小时，趋近式 (6)。

普遍的看法认为，造成这种差别的原因是，商业管道的糙率是不均匀的。笔者提出下面的看法：

在水力光滑区和完全粗糙区，穆迪图和尼库拉兹图一样，只在过渡区不同，令人费解。

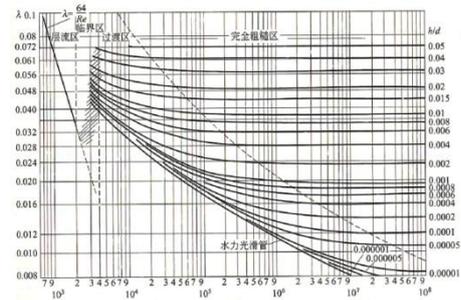


图 2 穆迪阻力系数图

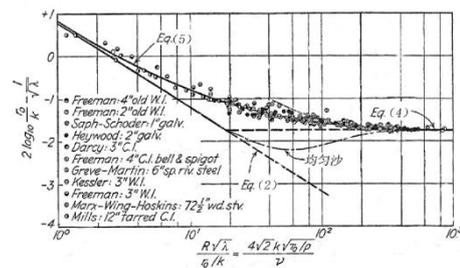


图 3 比较图

- 1) 式 (5) 和式 (6) 没有交点，这不合理，理由在 2.1.1 节中已经讲过。
- 2) 式 (5) 在 K/r 小时，趋近式 (6)，说明式 (5) 在 K/r 小时才合理。文献[2]中所给的试验值也主要为小的 K/r ，最小 $K/2r = 0.000005 (r/K = 100000)$ 。从图 1 可见， K/r 小时，过渡区与式 (5) 更接近。
- 3) 式 (5) 所给的过渡区终点 $K/\delta \approx 6$ (δ 为边界层名义厚度)；尼库拉兹试验 $K/\delta \approx 2.9$ ；依本 (A.T.Ippen) 在[2]的讨论中所举商业管试验 K/δ 最大为 2.5，均和 6 差别很大。
- 4) 单个物体的阻力试验见图 4，除具有固定分离点的圆盘外，其他物体的阻力系数 C_D (和 λ 类似)，在

达到阻力平方区的分布都和尼库拉兹试验相似。因为在达到阻力平方区以前，阻力系数都要除以 $v^\alpha (0 < \alpha \leq 1)$ ，所以 λ 先减小是合理的。

- 5) 商业管道的相对粗糙 K/r 都很小，又无系统试验，加上其试验误差 (5~10%)，二者又不在同一个试验范围，可能是造成差别的原因。
- 6) 可以认为，图 3 为图 1 在 K/r 小时的近似。

2.3 关于蔡克士达阻力系数图的评述

蔡克士达在矩形明流水槽中进行了类似于尼库拉兹在圆管中进行的水流阻力试验^[3] 见图 5，得出

$$\lambda = \frac{2g\Delta L J}{v^2} = f\left(\text{Re}, \frac{R}{K}\right) \tag{7}$$

式中：J 为水力坡度；R 为水力半径 (m)， $\text{Re} = vR/v$ ，其余符号同前。

在 Re 大时，式 (7) 变为：

$$\lambda = f\left(\frac{R}{K}\right) \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 4 \lg \frac{R}{K} + 425 \tag{8}$$

即阻力系数只是 $\frac{R}{K}$ 的函数。

我们对上述问题作参数分析如下：

$$\lambda = f(v, b, h, K, \nu) = f\left(\frac{vh}{\nu}, \frac{K}{b}, \frac{K}{h}\right) \tag{9}$$

式中：b 为槽宽 (m)，h 为水深 (m)。

在槽宽 b 很大，水深 h 很浅时， $\frac{K}{b} \ll \frac{K}{h}, R \approx h$ ，则式 (9) 变为

$$\lambda = f\left(\frac{vh}{\nu}, \frac{K}{h}\right) \approx f\left(\frac{vR}{\nu}, \frac{K}{R}\right) \tag{10}$$

式 (7) \approx 式 (10)，所以 (7、8) 只能近似地用在宽浅的矩形渠道，而非对所有矩形渠道都正确，因为

在管道中 $\frac{K_1}{r_1} = \frac{K_2}{r_2} = \frac{K_3}{r_3}$ 时，1、2、3 几何相似

在矩形槽中 $\frac{K_1}{R_1} = \frac{K_2}{R_2} = \frac{K_3}{R_3}$ 时，1、2、3 不一定几何相似

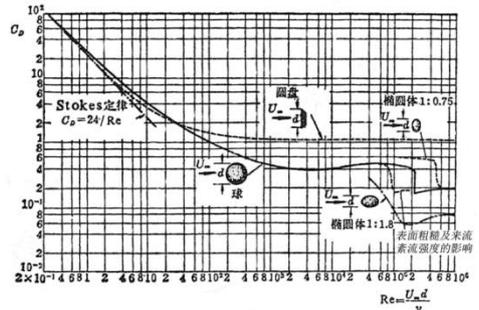


图 4 单个物体的阻力试验图

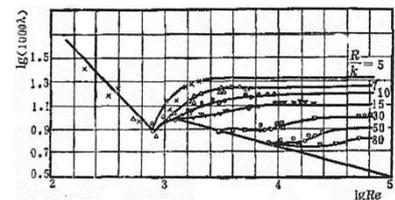


图 5 蔡克士达阻力系数图

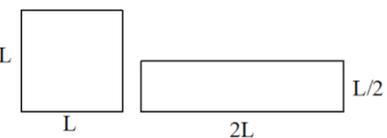


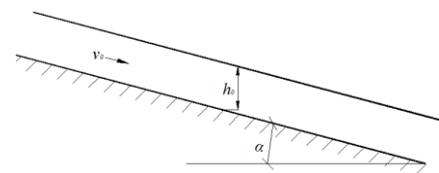
图 6 不同几何图

例如：图 6 中，二图水力半径 R 相等 ($R = L/3$)，但二图几何不相似。所以，在阻力平方区，管流中 K/r 相等时，阻力系数相等；矩形明渠流中， K/r 相等，阻力系数不一定相等。

在二维明渠均匀流中 $\frac{K_1}{h_1} = \frac{K_2}{h_2} = \frac{K_3}{h_3}$ 时，1、2、3 几何相似，所以只有在二维明渠均匀流中，才存在着和尼库拉兹管流相似的阻力系数图。

3 二维明渠均匀流的阻力系数图

前面已经指出，在矩形槽的明渠流中，不存在如管流中的阻力系数图，只有在二维明渠均匀流中，存在着和管流中类似的阻力系数图。



3.1 层流区

图 7 所示为二维明渠均匀流, 底坡 $i = \sin \alpha$, 水深 h_0 (m), 平均流速 v_0 (m/s), 雷诺数 $Re = v_0 h_0 / \nu$ ($Re < 550 \sim 600$) 时流动为层流, 其阻力系数已知为: 图 7 二维明渠均匀流

$$\lambda = \frac{6}{Re} \quad (11)$$

阻力系数定义同前。

3.2 水力光滑区

平板上的紊流边界层的流速分布为^{[4][6]}

$$v = v_* \left(5.85 \lg \frac{yv_*}{\nu} + 5.56 \right)$$

其平均流速为:

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{1}{h_0} \int_0^{h_0} v dy = \frac{v_*}{h_0} \int_0^{h_0} \left(5.85 \lg \frac{yv_*}{\nu} + 5.56 \right) dy \\ &= \frac{v_*}{h_0} \int_0^{h_0} (2.54 \ln \nu + 5.56) dy = \frac{v_*}{h_0} \int_0^{h_0} \left(\frac{2.54 \nu}{v_*} \ln \frac{yv_*}{\nu} + 5.56 dy \right) \\ &= \frac{v_*}{h_0} \left(\frac{2.54 \nu}{v_*} \left(\frac{h_0 v_*}{\nu} \ln \frac{h_0 v_*}{\nu} - \frac{h_0 v_*}{\nu} \right) + 5.56 h_0 \right) \\ &= 2.54 v_* \ln \frac{h_0 v_*}{\nu} - 2.54 v_* + 5.56 v_* \\ &= v_* \left(2.54 \ln \frac{h_0 v_*}{\nu} + 3.02 \right) = v_* \left(5.85 \lg \frac{h_0 v_*}{\nu} + 3.02 \right) \end{aligned} \quad (12)$$

因为 $v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$ $\tau_0 = \lambda \rho \frac{v_0^2}{2}$ 所以 $v_* = \sqrt{\frac{\lambda}{2}} v_0$

代入式 (12) 得:

$$v_0 = \sqrt{\frac{\lambda}{2}} v_0 \left(5.85 \lg \frac{h_0 v_0}{\nu} \sqrt{\frac{\lambda}{2}} + 3.02 \right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 4.14 \lg Re \sqrt{\frac{\lambda}{2}} + 2.14$$

(13)

$$\lambda = \frac{1}{\left(4.14 \lg Re \sqrt{\frac{\lambda}{2}} + 2.14 \right)^2}$$

3.3 粗糙区

粗糙平板上的紊流流速分布公式为^{[4][6]}:

$$v = v_* \left(5.75 \lg \frac{y}{K} + 8.5 \right)$$

水深 h_0 内的平均流速为:

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{1}{h_0} \int_0^{h_0} v dy = \frac{v_*}{h_0} \int_0^{h_0} \left(5.75 \lg \frac{y}{K} + 8.5 \right) dy \\ &= \frac{v_*}{h_0} \int_0^{h_0} \left(2.5 \ln \frac{y}{K} + 8.5 \right) dy \\ &= v_* \left(2.5 \ln \frac{h_0}{K} + 6 \right) = v_* \left(5.75 \lg \frac{h_0}{K} + 6 \right) \end{aligned} \quad (14)$$

如前 $v_* = \sqrt{\frac{\lambda}{2}} v_0$ 代入式 (14), 得

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 4.071 \lg \frac{h_0}{K} + 4.24$$

$$\lambda = \frac{1}{\left(4.071 \lg \frac{h_0}{K} + 4.24\right)^2} \tag{15}$$

计算结果见表 3。

表 3 计算结果

h_0/K	10	15	20	30	40	60	100	200	400
λ	0.0145	0.012	0.011	0.0095	0.0087	0.0076	0.0066	0.0054	0.0046
$\lg(10^3 \lambda)$	1.16	1.08	1.04	0.98	0.94	0.88	0.81	0.73	0.66

3.4 水力光滑到完全粗糙的过渡区

3.4.1 起点

粘性底层的实际厚度 $\delta \approx 5 \frac{\nu}{v_*}$ 经计算验证，可用 $\delta = 4.5 \frac{\nu}{v_*}$ ， $v_*^2 = \frac{\tau_0}{\rho} = \frac{1}{2} \lambda v_0^2$ ， $\delta = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \frac{4.5\nu}{v_0}$ 令 $\delta = K$ 则得

$$\frac{K}{h_0} = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \frac{4.5\nu}{v_0 h_0} = \frac{4.5}{\text{Re}} \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \tag{16}$$

式 (16) 代入式 (13) 可得：

$$\lambda = \frac{1}{\left(4.141 \lg \left(4.5 \frac{h_0}{K}\right) + 2.14\right)^2} \tag{17}$$

表 4 计算结果

h_0/K	15	20	30	40	60	100	200	400
λ	0.0106	0.0096	0.0083	0.0076	0.0067	0.0058	0.0048	0.0041
$\lg(10^3 \lambda)$	1.025	0.98	0.92	0.88	0.83	0.76	0.69	0.61
$\lg(\text{Re})$	2.96	3.10	3.30	3.46	3.66	3.92	4.16	4.60

3.4.2 终点

过渡区的终点，即完全粗糙起点为 $\lg \frac{v_* K}{\nu} = 18.3$ ， $\frac{v_* K}{\nu} = 67.6$ ， $\left(\frac{v_* K}{\nu}\right)^2 = 4570$ ， $v_* = \frac{1}{2} \lambda v_0^2$ 则可得：

$$\begin{aligned} \left(\frac{v_* K}{\nu}\right)^2 &= \frac{\lambda}{2} \left(\frac{v_0 K}{\nu}\right)^2 = \frac{\lambda}{2} \left(\frac{v_0 h_0}{\nu}\right)^2 \left(\frac{K}{h_0}\right)^2 = \frac{\lambda}{2} \text{Re}^2 \left(\frac{K}{h_0}\right)^2 = 4570 \\ \lambda &= 9140 \frac{1}{\text{Re}^2} \left(\frac{h_0}{K}\right)^2 \end{aligned} \tag{18}$$

由式 (15) 和式 (18) 可得下表

表 5 计算结果

h_0/K	10	15	20	30	40	60	100	200	400
λ	0.0144	0.0122	0.0109	0.0095	0.0086	0.0075	0.0065	0.0054	0.0045
$\lg(10^3 \lambda)$	1.158	1.086	1.037	0.98	0.934	0.877	0.813	0.73	0.655
Re	7967	12983	18314	29426	41237	66060	118581	263027	568806
$\lg(\text{Re})$	3.90	4.11	4.26	4.47	4.62	4.82	5.07	5.42	5.75

3.5 阻力系数图

用以上结果（式（11、13、15、17、18））可得二维明渠均匀流的阻力系数图，见图 8。尼库拉兹阻力系数图为轴对称流；本文图为二维流。

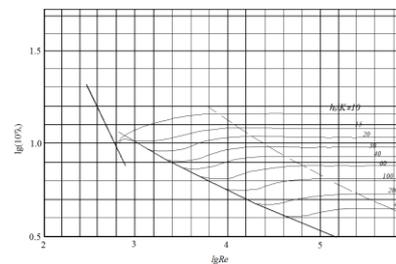


图 8 二维明渠均匀流阻力系数图

4 流速计算

利用上述阻力系数可以进行二维明渠均匀流的流速计算。明渠均匀流水头损失 Δh 的公式为：
$$\Delta h = \lambda \frac{\Delta L}{h_0} \frac{v_0^2}{2g}$$

可得

$$v_0 = \sqrt{\frac{2}{\lambda} \sqrt{gh_0 i}} \tag{19}$$

式中 $i = \Delta h / \Delta L$ 为渠道底坡或水面坡度。

4.1 层流

把式（11）代入式（19），可得二维明渠均匀流中，层流的流速计算公式为：

$$v_0 = \sqrt{\frac{Re}{3}} \sqrt{gh_0 i} \tag{20}$$

式中符号同上。

4.2 粗糙区

将式（15）代入式（19），可得完全粗糙区的二维明渠均匀流的流速计算公式为：

$$v_0 = \sqrt{2 \left(4.07 \lg \frac{h_0}{K} + 4.24 \right) \sqrt{gh_0 i}} \tag{21}$$

$$= \left(5.75 \lg \frac{h_0}{K} + 6 \right) \sqrt{gh_0 i}$$

我们把式（21）和文献[3]中宽浅矩形渠道的试验结果比较如下表：

表 6 比较结果

b (cm)	100	100	100	100	100	100
h_0 (cm)	2.5	3.54	3.85	5.55	4.77	4.75
b/h_0	40	29	26	18	21	21.1
i	0.0005	0.0007	0.0005	0.0007	0.0007	0.001
K (mm)	2.4	3.34	2.4	3.34	2.18	2.17
v (cm/s)	13.45	13.4	17.3	23.7	23.7	28.7
v_0 (cm/s)	13.7	13.5	17.3	24.7	24.7	29.6
$\left(\frac{v_0 - v}{v} \right) \%$	1.9	0.7	0	4	4	3

上表中 b 为渠宽， h_0 为水深， v 为试验平均流速， v_0 为式（21）的计算值，二者很吻合。二维流因无边墙，所以计算值稍大。

5 结语

本文对尼库拉兹、穆迪和蔡克士达三个阻力系数图进行了评述。认为蔡克士达在矩形明渠流中不可能作出类似于尼库拉兹那样的阻力系数图。只有在二维明渠均匀流中才存在和尼库拉兹图类似的阻力系数图。本文利用在蔡氏论文发表前已有的几种流速分布公式，作出了二维明渠均匀流的阻力系数图。利用上述二维阻力系数图，进行了二维粗糙底面上的均匀流流速计算，计算结果和蔡氏试验中的宽浅矩形水槽试验结果相比较，二者很吻合。

参考文献

- [1]J.尼库拉兹（张瑞瑾译）粗糙管中水流的规律（M）水利出版社，1957年。
- [2]А.П.ЭЕГЖДА ГЦДРАВЦЧЕСКЦЕ ПОТЕРЦ НА ТРЕНЦЕ В КАНААХ И ТРУБОПРОВОДАХ (M) ЕНИНГРАД, 1957.
- [3]清华大学水力教研组编，水力学，人民教育出版社，1982年。
- [4]赵振兴，何建京主编，水力学，清华大学出版社。
- [5]Moody L.F. Friction Factors for pipeflow (J), ASME Trans. Vol.66, 1944.
- [6]Hunter Rouse Engineering Hydraulics (M), John Wiley&sons, Inc., 1949.
- [7]L.普朗特等著（郭永怀等译），流体力学概论（M），科学出版社，1981年，P267-268。