Proof of Riemann Hypothesis(一)

—The Way, Method and Main Steps of Proving Riemann Hypothesis(3/3)

Zhicheng Guo, Jun Yang

Beijing institute of Technology, Zhuhai, Zhuhai Guangdong, China
Email: 13833116000@139.com, yj621015@163.com

Received: Jul. 14th, 2020, published:Jul.17th, 2020

Abstract

In view of the problem of zero point theory of periodic polynomials and its abnormal phenomenon near the peak of $|\zeta|$, this paper relates the periodic zero point of function f defined on interval [−*a*, *a*] and its odd order at ± *a* with the new properties of cliffor chain and prime number, which are the author's research results, and makes a reasonable explanation of Riemann's hypothesis by using Godel number, and then completes the proof of Riemann's conjecture. At the same time, 21 basic new theorems, lemmas and corollaries which are closely related to the proof of Riemann conjecture are given. The concrete idea of proof: first, set the formula $\frac{1}{2}\left[\zeta(3)-\zeta(-3)\right]$ of $\zeta(3)=\frac{2}{7}\pi^2\log 2+\frac{16}{7}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\log(\sin x)\mathrm{d}x$ and $\zeta(-3)=\frac{1}{120}$ as "special unit" I expressed by M-Gonal number, then decompose the set of all nontrivial zeros into the path combination of "special unit" I, and then by studying the geometry system of Helmholtz and Clifford, we can get the method of transforming Riemannian analytic extension of ζ function into discrete series extension. The main steps are as follows: 1) Transform the integral function $\int_0^\infty J(x)x^{-s-1}\mathrm{d}x$ into a series form based on plane stratification, study the two necessary and sufficient conditions that the real integral function has only real zero point, and apply these conditions in the study of Riemann function; 2) Apply the reduction principle of Fermat method to prove the zero point distribution conclusion of the whole periodic function related to the Riemann ζ function; 3) Study the 16th problem of Hilbert and hel Mholdz and Clifford's geometric system equivalence problem. Based on the research of the simplest calculation method of the recurrence theory of metamathematics, this paper briefly proves that the 16th problem of Hilbert is equivalent to the finite points where the space finite parallel lines (finite distance) intersect at infinity; 4) The basic principle of proving Riemann conjecture and two key conclusions are given. In fact, many papers that have been published or published in Hans publishing house belong to the preparatory work of proving Riemann's conjecture. In the future, we will continue to give detailed proof or explanation of each of the above items around Riemann conjecture, and finally complete the strict proof of Riemann conjecture.

Keywords

Zeros of the Riemann Zeta Function, Greedy Algorithm, Planar Configuration, Clifford Chain, Rational Recursion, Binary Parting

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51021. | CC-BY 4.0 Open Access | rec:14 July 2020, publ: 17 July 2020

黎曼猜想的证明(一)

——证明黎曼猜想的途径、方法和主要步骤(下)

郭志成，杨　军

北京理工大学珠海学院，广东　珠海，中国
Email: 13833116000@139.com, yj621015@163.com

收稿日期：2020年7月14日；发布日期：2020年7月17日

摘　要

针对周期多项式的零点理论问题及其在$|\zeta|$峰值附近的异常现象，将区间$[-a, a]$上定义的函数f的周期零点及其在$\pm a$处的奇数阶与作者的研究成果—Cliffor链的新性质和素数的新性质联系起来，并用哥德尔数对黎曼假定作出了合理的解释，进而完成了黎曼猜想的证明。同时，论文中也给出了21个与证明黎曼猜想紧密相关的基础性新定理、引理和推论。证明的具体思路：首先将Euler公式$\zeta(3)=\frac{2}{7}\pi^2\log 2+\frac{16}{7}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\log(\sin x)\mathrm{d}x$和$\zeta(-3)=\frac{1}{120}$的算式$\frac{1}{2}[\zeta(3)-\zeta(-3)]$设定为用M角数表示的“特殊单位”I，然后分解所有非平凡零点的集合为“特殊单位”I的路径组合，再通过研究Helmholtz和Clifford的几何体系，就可以得到将ζ函数的黎曼解析延拓转化为离散级数延拓的方法。主要步骤：1) 将积分函数$\int_0^{\infty}J(x)x^{-s-1}\mathrm{d}x$转化为基于平面分层的级数形式，研究实整函数只有实零点的两个充要条件，并在黎曼函数的研究中应用这些条件；2) 应用费马递降法的降阶原理，证明与黎曼函数ζ有关整周期函数的零点分布结论；3) 研究希尔伯特第16个问题与Helmholtz和Clifford的几何体系等价问题。通过元数学递归理论的最简计算方法的研究，扼要证明希尔伯特第16个问题与空间有限条平行直线(有限的间距)相交于无穷远处的有限个点等价的结论；4) 给出证明黎曼猜想的基本原理以及两个关键结论。实际上，已经在汉斯出版社发表或发布的多篇论文都属于证明黎曼猜想的的前期准备工作。我们以后将围绕着黎曼猜想陆续给出上述每一项内容的详细证明或说明，最终完成黎曼猜想的严密证明。

关键词

黎曼函数非平凡零点，贪婪算法，平面构形，Clifford链，有理递归，二元分拆

4. 黎曼猜想的 PM 表示

4.1. 有理递归理论与函数$\zeta(s)$的关系简介

为了数学的严密性，人们引入了同构、同态、同调、同坯、同伦等代数定义，用来解决(平面和多维空间)几何对称性的不直观问题，有理递归就是一种研究几何对称性的代数理论。有理递归的特点是只与轴线上的变差相关，而与轴线位置的具体坐标无关。

由于语言的滥用，有必要首先给出有理递归的语言定义。递推是对序列有重复运算法则的算法总称，**递归**是与歌德尔(系统)不完备性相伴的针对自然数的皮亚诺(Peano)归纳算法，本文的**有理递归**是把针对

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51021. | CC-BY 4.0 Open Access | rec:14 July 2020, publ: 17 July 2020

自然数的递归推广到针对有理数的一类算法。有理递归类似于(包含普通代数学的)逆向数学，属于拓扑。下面是一个逆向数学的例子。递推关系式

$$u_n = \frac{\left(34n^3 - 51n^2 + 27n - 5\right)}{n^3} u_{n-1} - \frac{(n-1)^3}{n^3} u_{n-2} \tag{4.1}$$

是一个关于递推项数 n 的三次代数方程

$$\left(u_n - 34u_{n-1} + u_{n-2}\right)n^3 + 3\left(17u_{n-1} - u_{n-2}\right)n^2 - 3\left(9u_{n-1} - u_{n-2}\right)n + \left(5u_{n-1} - u_{n-2}\right) = 0$$

的曲线，其中 u_k 是项数 k 的系数。Apèry 求出了这个递推关系式的一组解为

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k}^2 \binom{n+k}{k}^2$$

它的前面几项是：$u_0 = 1, u_1 = 5, u_2 = 73, u_3 = 1445, u_4 = 33001, u_5 = 819005, \cdots$。显然，任意连续三个 u_k 的整数解都可以给出关于 n 的三次代数方程的一个整数组。因此，与表示方程的单变量系数关系的韦达定理类似的，上述三次方程系数的关系是用递推公式表示的，它是比单变量更复杂的一种系数关系。我们通过系数函数 u_k 满足的一些通式，可以将三次方成的系数关系变成了相对简单的形式，这种转化属于拓扑。有理递归就是研究这类实代数方程的各种系数的分类、奇点和连续性的一种理论。

作者在文献[1]证明了 M 角数存在下面的递推关系：

$$\begin{cases} p_m^s + p_3^{s-1} = p_{m+1}^s, \\ p_m^{\frac{k^2}{2}m^2 - \frac{(2k)^2 - k}{2}m + \frac{(2k)^2}{2}} + p_m^{km-2k+1} = p_m^{\frac{k^2}{2}m^2 - \frac{(2k)^2 - k}{2}m + \frac{(2k)^2}{2} + 1}, \end{cases} \quad k, s = 1, 2, 3, \cdots$$

对于四角数，可以用 x_k, y_k 表示直角三角形两个直角边的边长。如果用 x_k, y_k 表示圆上满足条件 $x_k \geq \frac{1}{2} y_k \left(y_k - 1\right) + 1$ 的两段弦长，那么对于确定的数组 $\left(x_k, y_k\right)$，两个整数数组变量 (m, k) 的联立方程组

$$\begin{cases} \dfrac{k^2}{2} m^2 - \dfrac{(2k)^2 - k}{2} m + \dfrac{(2k)^2}{2} = x_k \\ km - 2k + 1 = y_k \end{cases}$$

可以表示成逆向递推关系如下：

$$\begin{cases} k = x_k - \dfrac{1}{2} y_k \left(y_k - 1\right) \\ \dfrac{1}{2} m = 1 + \dfrac{\frac{1}{2}\left(y_k - 1\right)}{x_k - \frac{1}{2} y_k \left(y_k - 1\right)} \end{cases} \tag{4.2}$$

如果用自然数 n 顺序标记有理数 $\dfrac{x_k}{y_k}$，那么这种由自然数 n 通过简单计算(通常可指加减乘除和二次根式计算)得到有理变量 $\dfrac{m}{k}$ 的表达式的可逆过程符合有理递归的语言定义，故公式(4.2)属于有理递归。

目前人们把递归定理分为强递归定理和弱递归定理两类[2]，强有理递归得到的是对称条件下的递归性质，弱有理递归得到的是非对称条件下的递归性质。公式(4.1)属于强有力递归，公式(4.2)属于弱有理递归。有理递归最主要的结论是莱斯关于拓展集合 N 和 $\varnothing$ 的唯一存在性和米希尔对不动点表述的两个性质。

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51021. | CC-BY 4.0 Open Access | rec:14 July 2020, publ: 17 July 2020

性质(Rice)： 唯一的递归扩展集合是 N 和 $\varnothing$ 。

性质(Myhill)： .存在递归函数 $\phi_1(z_1,z_2,y_1,y_2)$ 和 $\phi_2(z_1,z_2,y_1,y_2)$ ，使得

$$\omega_{\phi_1(z_1,z_2,y_1,y_2)} = x : R_{z_1}\left(x,y_1,y_2,\phi_1(z_1,z_2,y_1,y_2),\phi_2(z_1,z_2,y_1,y_2)\right)$$

和

$$\omega_{\phi_2(z_1,z_2,y_1,y_2)} = x : R_{z_2}\left(x,y_1,y_2,\phi_1(z_1,z_2,y_1,y_2),\phi_2(z_1,z_2,y_1,y_2)\right)$$

人们利用强有理递归的性质证明了 $\zeta(3)$ 为无理数，但弱递归性质至今没有突破性的进展[3]。本文有理递归研究的是特殊的弱有理递归，得到了偏(非)对称条件下弱有理递归的许多性质。进一步说，形为公式(4.2)的弱有理递归是分子和分母分别作用于强有理递归的过程，这种特殊的弱有理递归是对强有理递归理论的拓展，可以用来研究自变量 s 为高斯整数时函数 $\zeta(s)$ 的性质。

4.2. 哥德尔数与有理递归的关系简介

欧拉研究了对于每项都是由其前三项 P,Q,R 推出的递推级数，Euler 给出的前三项的方法是：通过求解关于 R 的三次方程[s230]

$$\begin{aligned}
&R^3-(2\alpha Q-\beta P)R^2+\left[\left(\alpha^2+\beta\right)Q^2-(\alpha\beta+3\gamma)PQ+\alpha\gamma P^2\right]R \\
&-\left[(\alpha\beta-\gamma)Q^3-\left(\alpha\gamma+\beta^2\right)PQ^2+2\beta\gamma P^2Q-\gamma P^3\right]\cdot\gamma^0 \\
&=\Big\{C^3-(2\alpha B-\beta A)C^2+\left[\left(\alpha^2+\beta\right)B^2-(\alpha\beta+3\gamma)AB+\alpha\gamma A^2\right]C \\
&\quad-\left[(\alpha\beta-\gamma)B^3-\left(\alpha\gamma+\beta^2\right)AB^2+2\beta\gamma A^2B-\gamma A^3\right]\Big\}\cdot\gamma^n
\end{aligned}$$

得到由前两项 P,Q 表示 R 的公式。再由两个递推尺度公式得到级数由前面一项推出的方法，就得到只有前面一项确定的通项公式。

递推尺度 $\alpha,\beta,\gamma,\cdots$ 决定递推规律，它给出了由递推级数所产生的分式的分母表达式：

$$1-\alpha z+\beta z^2-\gamma z^3+\cdots \tag{2}$$

对于每项都是由其前四项 P,Q,R,S 推出的递推级数，欧拉研究了它的的任意部分和，最后用例题说明了对于二次实因式作分母的级数，利用部分和公式减少递推尺度数量的方法。由于分母为四次多项式，可以化为两个二次实因式作分母的真分式之和。欧拉没有给出四个递推尺度以上时，减少递推尺度数量的方法。歌德尔把单位 I 和 6 个递推尺度 $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,$ ὸ配上通常使用的算术符号，建立了群的算术关系。后来人们又增加了 5 个算数符号，用 12 个(包括单位 I)固定算符来表示我们熟悉的域中算数关系。

歌德尔描述了一种形式演算系统，称之为“PM”。他用若干个元数字锁定了形式演算系统(PM)中的通常算术概念，建立了我们熟悉的算术关系。简单的说，歌德尔用 7 个(或 12 个)数字表示了群中(或域中)的算符、数字变量、命题变量和谓词变量，使得对一种(或两种)代数运算法则封闭的系统存在的所有定理，都可以用一个确定的固定**算符串**[1] (通常称之为哥德尔数)来表示。反过来说，用 7 个(或 12 个)算数符号组成的一串数字(通常是指用乘法连接的素数的幂，或是由算术基本定理得到的不完整的自然数标准形式。)表示的有关域的充分必要性质也可以解读成群的分类(或域范畴)的性质。

但是，对于超出域范畴(例如伽洛瓦扩域)的性质，就无法只用 12 个歌德尔元数字的字符串表示充分

[1] 算符串是指一串允许重复的固定算符，哥德尔用指数表示相邻的重复固定算符的个数。

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51021. | CC-BY 4.0 Open Access | rec:14 July 2020, publ: 17 July 2020

必要性质(或者说表达式不是唯一的)，例如 ABC 猜想和黎曼猜想就无法只用 12 个歌德尔元数字的算符串表出。如果再添加 4 个基本字符，把模运算法则也加入到域范畴(没有零计算的扩域)，那么 ABC 猜想和黎曼猜想就可以表示出来了。因此有模运算法则的数系中，添加新的固定算符是不可或缺的。

本文作者为了用哥德尔数表出 RH 的充要条件，用文献[4]给出的 4 角数表示单位 I，把添加模运算后的歌德尔固定算符扩充为 16 个。建立了如下的表 1

Table 1. The corresponding relation between Godel number and fixed operator
表 1. 歌德尔数与固定算符的对应关系

固定算符	歌德尔数	意义	固定算符	歌德尔数	意义
~	1	非	)	9	标点`
∨	2	或	,	10	标点
⊃	3	如果…那么…	+	11	加
∃	4	存在一个	×	12	乘
=	5	对应(映射到…)	>	13	大于(偏序关系)
0	6	零	≡	14	模(同余关系)
s	7	…的直接后继	mod 4^2	15	和…对称(镜像关系)
(	8	标点	3^k	16	四元字符串(四角数分拆)

费马递降法是指数项的代数学(即指数为自然数的)归纳法，因此 M 角数的递降法属于费马递降法的一种。为了建立 RH 形式命题和算术命题的联系，把 M 角数的两个变量定义为元和次，再利用 M 角数的定义转换两个递推尺度的级数为一元一次递归，转换三个递推尺度级数为二元一次递归，等等[2]。更多递推尺度的级数与 m 元 n 次有理递归形成了一一对应关系，见表 2。

Table 2. The corresponding relation between the number of recursive scales and rational recursion
表 2. 递推尺度数量与有理递归的对应关系

递推尺度数量	有理递归的元和次	递推尺度数量	有理递归的元和次
1	1 元 0 次(或 n 元 0 次)	9	3 元 3 次
2	1 元 1 次	10	4 元 3 次
3	2 元 1 次	11	1 元 4 次
4	1 元 2 次	12	2 元 4 次
5	2 元 2 次	13	3 元 4 次
6	3 元 2 次	14	4 元 4 次
7	1 元 3 次	15	5 元 4 次
8	2 元 3 次	16	1 元 5 次

4.3. 黎曼猜想的对偶定理简介

元数学把一个域视为一个系统，用从 1 到 12 的自然数对应了十二种域中的运算符号(称为形式演算系统，记为 PM)，由此把域中的每一个数学定理表为了唯一的一组数字。反之，如果知道了一组数字表示的是域中的关系式，是否可以把它解读为域中的数学定理？答案是肯定的。实际上，从人们提出问题

[2] 这个性质需要严格证明，在此暂作为结论给出，以后再详细证明。

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51021. | CC-BY 4.0 Open Access | rec:14 July 2020, publ: 17 July 2020

到这些问题得到解决，遵循的都是这个过程。

也就是说，数字之间是否存在着某种关系(命题)，是由系统中的哥德尔数确定的。存在这种哥德尔数，则命题为真；不存在这种哥德尔数，则命题为假。哥德尔数的数量决定了问题的复杂程度。

对平面上的 Clifford 链问题，本文首先分解为独立的形式演算命题(PM)和元数学命题(结构性质的命题)两部分论述，PM 提供的结论是一些简单数字(或字符)之间的关系。这些结论及其证明是直观的和可验证的，它有助于理解结构命题(例如 RH)证明过程。因此结构命题的证明只需要提供它被足够精确地映射到 PM 自身的途径。由此，许多困难的问题可以转化为数字之间关系式并赋予数字以结构性质。下面就是 RH 结构命题的数字化过程。

Euler 在文献[5]中得到了：对于由前面相邻的连续两项确定的递推级数，可以找到方法，使得每项都可以由它的前一项，而不是前面连续两项推出，这是递推级数的一条重要性质。根据这条性质，从任何一项 P 都可推出其下一项 Q，若递推级数的前面两项为 A,B；且的递推尺度为α,β，那么递推公式为：

$$Q=\frac{1}{2}\alpha P+\sqrt{\left(\frac{1}{4}\alpha^2-\beta\right)P^2+\left(B^2-\alpha AB+\beta A^2\right)\beta^2}$$

虽然式中有根号，但不会得到无理数，因为递推级数的项都是有理的。

我们把“由前面邻近的连续两项确定的递推级数”推广为“由前面不一定连续的两项确定的递推级数”，并反过来研究这个问题，**发现了下面的递推结论：**

定理 4.1(代数基本定理的对偶定理): 若递推级数由前面的第 m 项和第 n 项确定(不妨假定 $m\le n$),那么递推得到的极值可能不只一个，但最多有 n 个极值；并且极值的最多个数与前面有限项的取值无关。

为了得到比命题 4.1 更进一步的结果，作者研究了公式(4.2)的弱有理递归，给出项数 m,n 为有理数的递归定义如下：

定义 4.1: 令： $n=\max\{m,n\}$，任意给定 $2n$ 个有理数(有限项，有些可以是 0)

$$A_{-n},B_{-n},A_{-n+1},B_{-n+1},\cdots,A_{-1},B_{-1}$$

和确定的位置函数 x_1,y_1,x_2,y_2；这里 x_1 表示前面第 m 项的分子位置，y_1 表示前面第 m 项的分母位置，y_1 表示前面第 n 项的分子位置， y_2 表示前面第 n 项的分母位置；并且它们都是有理数 [3]。

我们把递归的过程做如下定义：

$$A_0=x_1A_{-n}+x_2B_{-m}，\quad B_0=y_1B_{-n}+y_2A_{-m}$$

$$A_1=x_1A_{-n+1}+x_2B_{-m+1}，\quad B_1=y_1B_{-n+1}+y_2A_{-m+1}$$

$$A_2=x_1A_{-n+2}+x_2B_{-m+2}，\quad B_2=y_1B_{-n+2}+y_2A_{-m+2}$$

$$\vdots$$

$$A_i=x_1A_{-n+i}+x_2B_{-m+i}，\quad B_i=y_1B_{-n+i}+y_2A_{-m+i}$$

由此得到

$$K_0=\frac{A_0}{B_0}$$

[3] 为了简单明了，一般情况下假定为正有理数。

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51021. | CC-BY 4.0 Open Access | rec:14 July 2020, publ: 17 July 2020

$$K_1=\frac{A_1}{B_1}=\frac{x_1A_0+x_2B_0}{y_1B_0+y_2A_0}$$

$$K_2=\frac{A_2}{B_2}=\frac{x_1A_1+x_2B_1}{y_1B_1+y_2A_1}=\frac{\left(x_1^2+x_2y_2\right)A_0+\left(x_1x_2+x_2y_1\right)B_0}{\left(y_1^2+y_2x_2\right)B_0+\left(y_1y_2+y_2x_1\right)A_0}$$

$$\vdots$$

$$K_i=\frac{A_i}{B_i}=\frac{x_1A_{-n+i}+x_2B_{-m+i}}{y_1B_{-n+i}+y_2A_{-m+i}}$$

$$\lim_{i=\infty}K_i=K$$

此过程我们称为 m 阶 n 次有理递归，K 称为有理递归的极值。二元矩阵$\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{pmatrix}$称为特征矩阵，记为 D。行列式$\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{vmatrix}$称为特征值，记为$\lambda$。

在递归过程中，$K_i=\dfrac{A_i}{B_i}$没有约分的计算过程，这一点与连分数的 Padé逼近不同。通过简单计算容易发现：

定理 4.2: m 阶 n 次有理递归如果有一个极值，那么最多有 n 个极值；并且极值的最多个数与前面有限项

$$A_{-n},B_{-n},A_{-n+1},B_{-n+1},\cdots,A_{-1},B_{-1}$$

的取值无关。

定理 4.3(Eisenstein 级数的敛散判别式): 对于 m 阶 n 次有理递归的特征矩阵，当数 $1<x_1=y_1=x_2=y_2<4$ 时，有理递归的极值有且仅有有限个(可以称为收敛于有限个极值 K)；当数 $x_1=y_1=x_2=y_2\geq 4$ 时，有理递归的极值 K 有无穷多个(通常称为发散)。

我们知道，判别两个并非绝对收敛级数的乘积是否收敛级数是一个非常困难的问题，甚至我们不知道如何构建出所有的收敛或发散的级数。定理 7.2 提示我们，如果二元矩阵$\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{pmatrix}$中的 x_1,y_1,x_2,y_2 取自然数，就是判别 m 阶 n 次有理递归的敛散性是解决上述问题有效途径。

在命题 4.2 中，若我们用 m 表示可交换变量 x^k 的整数倍，用 n 表示变量 x 的最高次数；那么，命题 4.2 就与代数基本定理形成了对偶关系。由此也可以证明稍微拓展的代数基本定理：首项为 1，其它 m(包括符号∞)个系数为整数，最高次数为 n 的多项式方程最多有 n 个根，且最多相异根的数量与项的系数无关。重根的情况由 m 个系数确定。

显然，有理递归的前面有限项

$$A_{-n},B_{-n},A_{-n+1},B_{-n+1},\cdots,A_{-1},B_{-1}$$

与多项式方程的 m 个复系数形成了对偶关系，由此导致了有理递归极值的最多相异个数与 n,m 两者相关，记有理递归极值的个数为函数$\zeta(m,n)$。$\zeta(m,n)$的值由下面的表格确定：

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51021. | CC-BY 4.0 Open Access | rec:14 July 2020, publ: 17 July 2020

Table 3. Results of $\zeta(m,n)$ Number

表 3. 函数 $\zeta(m,n)$ 的数值表

	$n=\Phi$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$	$n=9$	$n=10$	$n=11$	$n=12$	$n=13$	$n=14$
$m=\phi$		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$m=1$	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
$m=2$	4	1	1	1	4	1	1	1	4	1	1	1	4	1	1
$m=3$	6	1	2	1	2	1	6	1	2	1	2	1	6	1	2
$m=4$	8	1	1	1	1	1	1	1	8	1	1	1	1	1	1
$m=5$	10	1	2	1	2	1	2	1	2	1	10	1	2	1	2
$m=6$	12	1	1	1	4	1	1	1	4	1	1	1	12	1	1
$m=7$	14	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	14
$m=8$	16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$m=9$	18	1	2	1	2	1	6	1	2	1	2	1	6	1	2

表 3 中ϕ行和Φ列是按其它数值的计算法则补充上的，函数$\zeta(m,n)$数值由 m 和 n 共同控制 [4]。我们去掉 n 为奇数的列，简化为

Table 4. Results of $\zeta(m,n)$ umber only n is a even number

表 4. n 为偶数时，函数$\zeta(m,n)$的数值表

	$n=\Phi$	$n=2$	$n=4$	$n=6$	$n=8$	$n=10$	$n=12$	$n=14$	$n=16$	$n=18$	$n=20$	$n=22$
$m=\phi$		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$m=1$	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
$m=2$	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1
$m=3$	6	2	2	6	2	2	6	2	2	6	2	2
$m=4$	8	1	1	1	8	1	1	1	8	1	1	1
$m=5$	10	2	2	2	2	10	2	2	2	2	10	2
$m=6$	12	1	4	1	4	1	12	1	4	1	4	12
$m=7$	14	2	2	2	2	2	2	14	2	2	2	2
$m=8$	16	1	1	1	1	1	1	1	16	1	1	1
$m=9$	18	2	2	6	2	2	6	2	2	18	2	2

我们发现，如果将直线$n-2m=0$视为对称轴，那么在表 4 中，行的$\zeta(m,n)$数值从零到对称轴是一个整周期，列的$\zeta(m,n)$数值从零到对称轴是半个周期；并且列的$\zeta(m,n)$数值关于对称轴也是对称。

仅利用上述行及列的对称性质，我们可以逐步构造出表 2 的数值。添加 n 为奇数的列就得到了表 3。如果只用行来构造或者只用列来构造表 4 稍微麻烦一些。但是正是由于这种复杂性，对极值公式$\zeta(m,n)$的研究可以解决很多困难的问题。对确定的自然数组(m,n)，函数$\zeta(m,n)$是有理递归收敛的最多极值个数。例如：$\zeta(3,6)=4$表示最多存在不同的四个函数

[4] 给出了莫比乌斯函数$\mu(n)$的插值计算方法。

$$K_1(x_1,y_1,x_2,y_2),K_2(x_1,y_1,x_2,y_2),K_3(x_1,y_1,x_2,y_2),K_4(x_1,y_1,x_2,y_2)$$

式中 x_1,y_1,x_2,y_2 为非负整数。

我们令：$K_i(x_1,y_1,x_2,y_2)=\zeta_i(x_1,y_1,x_2,y_2)=\zeta_i$，并称 ζ_i 为矩阵 D 的特征值。这样用 $\xi(3,6)$ 表示集合 $\{\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,\zeta_4\}$ 中的任意一个元素 $\xi(3,6)$，并不会与 $\zeta(m,n)$ 表示极值个数产生误解。也就是 $\zeta(m,n)$ 既可以表示一个集合的元素数量，也可以表示阶为 $\zeta(m,n)$ 集合中的任意元素[5]。因此不妨用函数 $\zeta(m,n)$ 同时也表示 m 阶 n 次有理递归收敛的任意极值。用 ζ 表示任意 ζ_i，可以得到

定理 4.4: m 阶 n 次有理递归的极值满足关系式

$$\zeta^{n-m}\left(\zeta^{\frac{m}{2}}-x_1\right)\left(\zeta^{\frac{m}{2}}-y_1\right)=x_2y_2$$

也就是说，通过求解方程的根，可以得到若干个特征矩阵的特征值。

特征值与数组 (m,n) 相关，当 $(m,n)=1$ 时，有理递归只有一个极值。显然，对于确定特征矩阵，一元一次有理递归的极值和二元一次有理递归的极值如果存在，那么分别只有一个。作者发现，两者的比值存在确定的关系式，并且比值与素数相关。即：

定理 4.5: 对于任意正整数 n_0 和 r，存在正整数序列 $\{n_r\},r=1,2,3,\cdots$ 使得

$$2\cos\left(\frac{\pi}{n_r}\right)=\left(2\sin\frac{\left[R(r-1)\cdot n_0+2\cdot(-1)^{r-1}\right]\pi}{2^r\cdot n_0}\right)^2$$

$$R(r)=2^{r-2}+2^{r-4}+2^{r-6}+\cdots+2^{\mu+2}+2^{\mu}$$

特别是，当 r 趋近于无穷大时，$n_r\to 3$。

公式中 $\mu=0$ 或 $\mu=1$，且 r 与素数相关。

定理 4.6(素数的新性质之三): 令：$x_1=1,x_2=0$，如果存在 $2n$ 元 n 次有理递归的极值，那么数组 (y_1,y_2) 的整数解仅有 $(2^m,\mathrm{D})$ 一种形式，式中 m 为偶数，D 为与 n 无关且无(素数)平方因子的奇数。

作者发现证明了圆周率公式：

$$\frac{2}{\pi}=\frac{9}{16}\left(1+\frac{1}{2\times1^2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3\times3^2}\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{4\times5^2}\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\right)^2+\frac{1}{5\times7^2}\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\frac{7}{8}\right)^2+\cdots\right)$$

不妨令：$\frac{-1}{\pm0}=\frac{\pm i^2}{(\pm0)^2}=I_0,\left(\frac{1}{2}\right)^2=I_1,\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\right)^2=I_2,\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\right)^2=I_3,\cdots$，由此得到：

引理 4.1: 圆周率存在单向逼近的如下级数形式：

$$\frac{2}{\pi}=\frac{9}{16}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{I_0\cdot I_n}{(n+1)(2n-1)^2}=\frac{9}{16}\left\{1+\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|(n+1)|(2n-1)^2}\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\cdots\times\frac{2n-1}{2n}\right)^2\right\}$$

我们知道，Dirichlet 公式为

$$1-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}-\frac{1}{13}+\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\frac{1}{19}-\frac{1}{21}+\frac{1}{23}-\cdots=\frac{\sqrt{2}}{2}\log\left(1+\sqrt{2}\right)$$

式中每项的符号取前面第 4 项的符号。

[5] 即：本文把黎曼给出的两种函数ξ和ζ表为一种函数ζ，而将它们之间区别用一组自变量表出。这种方法是高斯首创的。

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51021. | CC-BY 4.0 Open Access | rec:14 July 2020, publ: 17 July 2020

显然，符号的选取等同于顺时针余弦象限的符号。它等价于

引理 4.2(复平面上的 Dirichlet 公式): 可以假想把 Dirichlet 公式弯曲在一个圆周上[6]，由此得到二次系统的(膨胀)公式为：

$$4\cos^2\frac{2\pi}{34}=4\sin^2\frac{15\pi}{34}=2+\frac{1}{8}\left(-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}\right)+\frac{1}{8}\sqrt{68+12\sqrt{17}-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}-2\left(1-\sqrt{17}\right)\sqrt{34+2\sqrt{17}}}$$

$$4\cos^2\frac{8\pi}{34}=4\sin^2\frac{9\pi}{34}=2+\frac{1}{8}\left(-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}\right)-\frac{1}{8}\sqrt{68+12\sqrt{17}-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}-2\left(1-\sqrt{17}\right)\sqrt{34+2\sqrt{17}}}$$

$$4\cos^2\frac{9\pi}{34}=4\sin^2\frac{8\pi}{34}=2-\frac{1}{8}\left(-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}\right)+\frac{1}{8}\sqrt{68+12\sqrt{17}-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}-2\left(1-\sqrt{17}\right)\sqrt{34+2\sqrt{17}}}$$

$$4\cos^2\frac{15\pi}{34}=4\sin^2\frac{2\pi}{34}=2-\frac{1}{8}\left(-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}\right)-\frac{1}{8}\sqrt{68+12\sqrt{17}-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}-2\left(1-\sqrt{17}\right)\sqrt{34+2\sqrt{17}}}$$

显然，第一个公式是正十七边形的欧几里德作图公式。后面三个公式尽管和第一个公式的区别只是后面两项根式的符号不同，但后面三个公式的证明并不像第一个公式的证明那样简单。

更进一步的，如果改变根式 $\sqrt{68+12\sqrt{17}-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}-2\left(1-\sqrt{17}\right)\sqrt{34+2\sqrt{17}}}$ 中或第二项 $\left(-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}\right)$ 内某一项的符号，给出相应余弦函数的弧度表达式是怎样的呢？这个既属于代数也属于分析的问题是证明黎曼猜想必须解决的。

需要说明的是，传统的数字递推是单纯数字的算法，本文用歌德尔数表示的有理递归通常具有算术真理和形式命题的双重含义，哥德尔数是对算法的一种标记。由引理 4.2 和文献[1]可以得到公式(1.4)的改进形式

$$p_{n+1}-p_n<Kp_n^{\frac{7}{16}}$$

式中 K 为与 n 无关的常数。

引理 4.3 当 $x_2y_2>0, x_1-y_1\neq 0$ 时，存在恒等式

$$\left(\frac{x_1}{2y_2}-\frac{y_1}{2y_2}\right)+\sqrt{\left(\frac{x_1}{2y_2}-\frac{y_1}{2y_2}\right)^2+\frac{2x_2}{2y_2}}=\sqrt{\frac{(x_1-y_1)+\sqrt{(x_1-y_1)^2+x_2y_2}}{(y_1-x_1)+\sqrt{(y_1-x_1)^2+y_2x_2}}}\cdot\sqrt{\frac{x_2}{y_2}}$$

必须说明，这个形式简单的恒等式不属于代数的范畴；因此，很难找到代数的证明方法。利用定理 4.5 和引理 4.1、4.2、4.3，作者研究了 r 为高斯整数时，等式

$$\zeta(r)=\text{有理数}\cdot\pi^r$$

的某种 p 进连续性问题[7]，证明了等价于黎曼猜想的如下推论：

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51021. | CC-BY 4.0 Open Access | rec:14 July 2020, publ: 17 July 2020

推论(RH 的对偶定理): 令：$x_1 = 1, x_2 = 0$，如果把数组(y_1, y_2)的(递归极值K的)整数解扩充为(递归极值ζ的)高斯整数解，那么当y_2满足条件$Re(y_2) > 0, Im(y_2) \neq 0$时，必有$Re(y_1) = 2$。

由推论和定理 3.9 可以证明高斯整数分解的唯一性；由此进行拓扑分层，就给出了黎曼猜想的证明。

5. 后记

一开始我们就应该明白，任何数学问题的证明都需要追溯到五个基本公设，证明的正确与否取决于数学问题与五个公设之间的逻辑链条是否存在和完整。链条上论据可以来自于基于五个基本公设而已经得到的数学结论，也可以来自于(拓展的五个基本公设下的)新建立的数学理论。许多数学家给出的未解决数学难题的证明，往往因为发现了逻辑链条不完整或链条上某一环节的问题而功亏一篑。这样的例子比比皆是。

例如，1995 年，怀尔斯首次声称证明了费马大定理，并且幸运的补充了被人们发现问题的环节而避免了最终失败的命运。而望月新一就没有这样幸运了，其证明 ABC 猜想的论文由于鲜有同行能看懂，至今证明的逻辑链条都无人能理顺。

作者八年前就发现了黎曼猜想的证明方法，但是由于涉及解释更多哥德尔数这个深奥的问题，唯恐出现纰漏，故又寻找到容易理解的几何代数方法和微积分方法等多种证明，才予以公布，以避免望月新一的窘境。当然，也可以由莫莱微分定理的逆向过程，用微积分方法证明黎曼猜想；但是由于所有证明方法都涉及高斯整数分解的唯一性问题，微积分的证明方法既不简单也不直观。因此本文只简单介绍黎曼猜想的几何代数证明方法，已经在汉斯出版社发表和发布的论文，解决了黎曼猜想证明环节上的一些简单问题。

参考文献

[1] 郭铭浩，郭志成. M 角数恒等式及其应用—从 M 角数谈起[J]. 理论数学, 2017, 7(4): 250-254. https://doi.org/10.12677/PM.2017.74032

[2] Raymond M. Smullyan. Recursion theory for metamathematics[J]. 2013.

[3] Coelho J , Sercio F . Characterizing gonality for two-component stable curves[J]. 2020.

[4] 郭铭浩, 郭志成. 勾股定理离散性质的推广和应用—Pythagorean 方程和特殊的 M 角数[J]. 理论数学, 2017, 7(4): 255-261. https://doi.org/10.12677/PM.2017.74033

[5] 欧拉, 张延伦. 无穷分析引论(上)[M]. 哈尔滨工业大学出版社, 2013.

[6] Donoho, David, L,etc. Hessian eigenmaps: Locally linear embedding techniques for high-dimensional data.[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 2003.

[7] Babei A , Rolen L , Wagner I . The Riemann Hypothesis for period polynomials of Hilbert modular forms[J]. 2020.

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51021. | CC-BY 4.0 Open Access | rec:14 July 2020, publ: 17 July 2020