The Noncontradictory Simplest Derivative Method under the Definition of A New Derivative that Does Not Involve the Denominator

Weiguo Shen

China Distrct Heating Association, Beijing China
Email: qygrswg@sina.com

Received: Jul.25th, 2020, published:Jul.28th, 2020

Abstract

Through the previous series of articles of the author, it is completely clear how Newton and others were able to find the correct derivative, although it appears that it will lead to Berkeley paradox. And, of course, that requires a new definition of the derivative, although Newton et al actually figured that out. On the basis of this new definition, a new derivative method without denominator is proposed, which is the simplest and non-contradictory derivative method so far. At the same time, under the new definition of derivative, we can get a new definition of derivative that is compatible with it, which also eliminates the inconsistency between the definition of derivative of function and independent variable, thus solving the implicit contradiction in integration. Finally, the author further reveals the logic contradiction implied by the derivation of limit method (the so-called "second generation calculus"), so it is not valid at all, and Berkeley paradox cannot be eliminated by limit method. So the first calculus (Newton et al.) was actually right and should be vindicated.

Keywords

New Definition of Derivative, First Generation Calculus, Second Generation Calculus, Berkeley Paradox, Reduction of A Fraction. Differential, Integral

新导数定义下的、不涉及分母的无矛盾最简求导法

沈卫国

中国城镇供热协会，北京，中国
Email: qygrswg@sina.com

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51023. | CC-BY 4.0 Open Access | rec:25 July 2020, publ: 28 July 2020

收稿日期：2020年7月25日；发布日期：2020年7月28日

摘　要

通过前期笔者的系列文章，彻底搞清了牛顿等当年究竟是如何求出正确导数的，尽管表面看来它会导致贝克莱悖论。当然，这需要一个新的导数定义，尽管牛顿等实际求出的就是也只能是它。在此新定义的基础上，提出与之一致的没有分母的求导新法，这是迄今为止最简单的、同时无矛盾的求导方法。在讨论中发现，很多论者惑于增量比值函数分母上的那个自变量的实质，尽管笔者已经在逻辑上彻底阐明了。于是，这里根据线性或其增量方程的系数就是其斜率的众所周知的数学事实，直接针对并无自变量分母的增量函数而不再是有自变量分母的增量比值函数来求导，也就是只要求得其系数即可知其斜率。于是自然可以彻底告别分母上的自变量，彻底杜绝任何歧义性的可能：没有那个自变量分母，照样求出了导数。勿再纠结于分母上的那个自变量了，它在推导的一开始就不存在。同时，在新的导数定义下，我们可以得到与之协调的微分新定义，同样消除了函数与自变量微分定义上的不协调，进而解决了积分中的隐含矛盾。最后，笔者进一步揭示了极限法求导(所谓“第二代微积分”)隐含的逻辑矛盾，因此根本不成立，贝克莱悖论不可能由极限法消除。因此，第一代微积分(牛顿等)实际是对的，应该为之正名。

关键词

导数新定义，第一代微积分，第二代微积分，贝克莱悖论，约分，微分，积分

1. 基于导数新定义的无分母且根本不涉及极限、无穷小概念的最简求导法

笔者在前期系列论文特别是文献[14]中，具体地揭示了费马、牛顿、莱布尼兹当年是如何通过看似明显不合理的推导(表观上产生了矛盾“贝克莱悖论”)求出了正确的导数的。特别是牛顿，并未使用极限概念和方法却求出了导数，因此，极限法求导即使正确，也并未解释牛顿为什么没有用极限法也正确地得到了导数的缘由。笔者通过分析指出：无论是牛顿等的所谓“第一代微积分”，还是柯西等的所谓“第二代微积分”，在令自变量等于 0 (牛顿等)或趋于 0 (柯西等)求极限前，都要有通过约分操作以消去分母上的自变量的步骤，而这，等于宣告分母上的自变量等于或趋于“1” (这是按约分的定义严格导出的结论)。然后再令原先分子上剩下的自变量等于(第一代微积分)或趋于(第二代微积分) 0，得到导数。这意味着什么？意味着原本在一个式子中出现的几个表面看起来或通常被认为是相同的自变量实际并不是同一个自变量，也就是它们有的等于或趋于“1”，而有的等于或趋于“0”。这实质上是把一个曲线方程(要求式中的几个自变量相同)变成了直线方程(式中的几个自变量其实不同)。于是，根据后者我们就可以给出导数真实的定义(也可以说就是新定义，但实际牛顿等实际求出的就是也只能是它)。其几何意义，就是曲线在某点的切线斜率；物理上的瞬时速度定义，就是做变速或曲线运动的某受力物体，在某瞬时该力突然消失时，其后该物体做匀速直线运动时的速度。而之前一般的导数定义，就是某非线性(当然可以包含线性)函数的增量函数，在某点与之有唯一共值点的一个线性函数的斜率。注意，这里的斜率，是属于线性函数的，不是非线性函数的。对应于几何上，就是曲线在某点的切线斜率，而不是曲线本身的斜率。

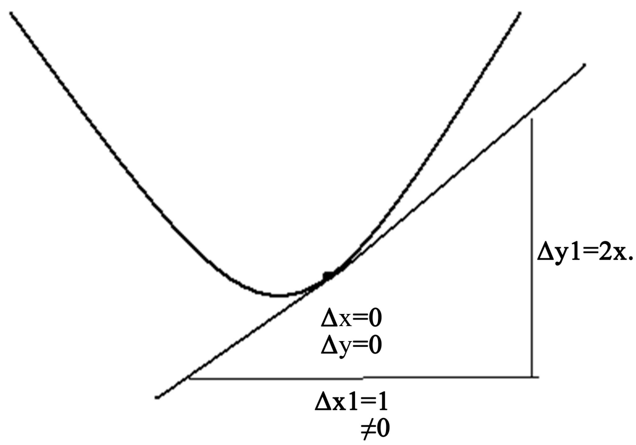
牛顿、柯西等人，由于没有意识到导数的真实含义，以为导数必须始终与曲线直接关联，所以不得不直接取非线性函数的增量比值函数，由于必须有个分母上的自变量，因此产生贝克莱悖论的问题。尽管由于笔者的揭示现在清楚了，这个分母上的自变量实际等于 1 (由于约分之故，按约分定义)，并没有消失，也不应该消失，因此不再构成任何矛盾(即贝克莱悖论)。但既然我们现在比牛顿等更加明确了导数的

真实定义，因此自然会有直接根据新定义的求导方法。此时可以完全不需要分母，因此更加简单、清晰。

导数新定义下的求导一般原则：设有非线性方程 y，其增量函数为 $\Delta y = f(x,\Delta x)$。又由于“增量”自然涉及两点，而“两点成一线”，因此这个非线性函数的增量，也决定了一个线性函数，于是我们有

$$\Delta y = f(x,\Delta x) = k(x,\Delta x)\cdot\Delta x \tag{1}$$

其中 $k(x,\Delta x)$ 显然即是该线性增量方程的系数，也就是斜率。当其中 $\Delta x = 0$ 时，定义成(自然也可认为是“求出了”)该非线性方程在某点的导数。几何意义上，即是这个非线性的曲线方程的在某点的切线的斜率。按斜率的定义，我们有 $\Delta y_1/\Delta x_1 = k(x,\Delta x)$。其中的 $\Delta x_1 \neq 0$ (与之对比，Δx 是可以等于 0 的)。Δx 在几何上是曲线与其割线的两个交点的横坐标差。当它等于 0 时，意味着二者只有一个交点，割线变为切线此时 $\Delta y_1/\Delta x_1 = k(x,0)$。如以二次曲线情况，见图 1 所示。但$\Delta y_1$、$\Delta x_1$，却是割线或切线上的(脱离曲线、与曲线无关的)任意的二点的纵、横坐标差。特别地，Δx_1 不允许为 0。这是斜率的定义决定的。 笔者前期论文中已经讨论了，无论牛顿等还是柯西等，他们通过约分，实际是令 $\Delta x_1 = 1$ 的。尽管他们都没有意识到此点。否则从一开始就不会有贝克莱悖论的疑难存在。也不需要什么极限法求导(第二代微积分)的繁文缛节(更不用说其仍旧还有隐含的逻辑矛盾。见文献[14])。



当图中$\Delta x = 0$ 时，曲线上二点合一，割线变切线。但此时切线上的两点间距Δx_1 并不等于 0，而是等于 1，进而其斜率为 $2x/1 = 2x$，即曲线的导数

Figure 1. Is a schematic diagram of quadratic function derivatives under the new definition
图 1. 新定义下的二次函数导数示意图

应该特别注意并小心的是(再一次强调)：这里的 $\Delta y_1/\Delta x_1 = k(x,\Delta x)$，绝对不是$\Delta y/\Delta x$。后者是曲线上(非线性方程)两个点的纵、横坐标差之比。虽然当 $\Delta x \neq 0$ 时，$\Delta y/\Delta x = \Delta y_1/\Delta x_1$。但当 $\Delta x = 0$ 时，$\Delta y/\Delta x = 0/0$，而$\Delta y_1/\Delta x_1$ 可并不等于 0/0，它等于 $k(x,0)$。进而我们有 $\Delta y_1 = k(x,\Delta x)\cdot\Delta x_1$。其中该直线中的纵、横坐标差$\Delta y_1$、$\Delta x_1$ 不会受到曲线上两个交点的约束。它们可以是任意的，唯一的约束就是二者之比为 $k(x,\Delta x)$。

注意：(1)式在 $\Delta x = 0$ 时，Δy 当然也等于 0。此时即有 $0 = k(x,0)\cdot 0$，但众所周知，这与直线的系数也就是斜率 $k(x,0)$ 是否为 0 毫无关系。实际上，大部分情况下 $k(x,0)\neq 0$。特别它绝对不会为 0/0。也就是在这种导数的定义或求法下，根本就不会有分母为 0 与否的贝克莱悖论困扰。而正如笔者一再强调的，此结论并非笔者独出心裁的凭空创造。事实上无论是费马、牛顿等的求导，还是柯西等的极限法求导，他们实际所能求出的就是这个，只不过缺一个正确的解释罢了。具体说，就是他们没有意识到他们无意中使用的那个求导的必要条件(或步骤)以消去分母上的自变量的那个“约分”操作，实际上就等价于令分母上的自变量为 1。这是约分的定义所要求的。而分母上的自变量增量Δx 为 1、同时再令式中其它剩下

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51023. | CC-BY 4.0 Open Access | rec:25 July 2020, publ: 28 July 2020

的、分子上的自变量增量Δx为0或“趋于0”(取0为极限)，这究竟意味着什么？如果一个公式中所谓的“同一个变量”可以有不同的值，说明什么？只能说明它们原本就不是同一个变量。

现以二次曲线方程$y=x^2$为例说明之：其增量方程为

$$\Delta y=\left(x+\Delta x\right)^2-x^2=2x\Delta x+\left(\Delta x\right)^2=\left(2x+\Delta x\right)\cdot\Delta x=k\left(x,\Delta x\right)\cdot\Delta x \tag{2}$$

(2)式中的Δy、Δx，为二次曲线与其割线两个交点的纵、横坐标差。因此该式既可以表示二次曲线的增量，也可以表示其割线的增量。2式最右边的$k\left(x,\Delta x\right)\cdot\Delta x$，显然是直线方程的表达形式。而左边的$2x\Delta x+\left(\Delta x\right)^2$，一般为曲线的表达形式。注意到$\left(2x+\Delta x\right)=k\left(x,\Delta x\right)$，也就有$k\left(x,0\right)=2x$，即这个二次曲线在$x$点的切线斜率，也就是其导数。可见，求导变得极其简单明确。即使交点二点合一($\Delta x=0$时)，也并不影响该直线(此时是曲线的切线)有其斜率。因为切线的斜率是$\Delta y_1/\Delta x_1=k\left(x,0\right)$，其中$\Delta x_1\neq 0$。

一般地，我们有$\Delta y=\left(\Delta y_1/\Delta x_1\right)\cdot\Delta x$。其中$\Delta x_1\neq 0$，而$\Delta x$可以等于0。

以上求导方法，完全基于导数的新定义，根本就不存在“分母上的自变量”，因此根本不会有贝克莱悖论。

这样看这个问题，也许更清晰：设有某直线的增量函数$\Delta y_1=g\left(\Delta x_1\right)=k\Delta x_1$，某曲线的增量函数$\Delta y=f\left(x,\Delta x\right)$。二者起先可以毫不相关(无交点)。但如果平行移动该直线令其与曲线相交，则其成为了曲线的割线，二者有了关联。此时这两条线的两个交点为二者所共有，此二点之差有$\Delta y_1=\Delta y$，$\Delta x_1=\Delta x$。于是$\Delta y=g\left(\Delta x\right)=k\Delta x=f\left(x,\Delta x\right)$，其中$f\left(x,\Delta x\right)$当然可以写成$s\left(x,\Delta x\right)\Delta x$，于是$k=s$，即有$s\left(x,\Delta x\right)=k\left(x,\Delta x\right)$是与这个二次曲线有两个交点的该割线的斜率，当其中$\Delta x=0$时，二点合一，即其切线斜率为$k\left(x,0\right)$，按定义，也就是曲线在该点的导数。

笔者在文献[12]中，把上述切线斜率称为该点“导数的第一定义”。而把与该切线平行(斜率自然数值一样)的曲线的割线(当然可以有无穷多个)的斜率，称为该点“导数的第二定义”。它们数值上是完全一样的。这一点是由中值定理保障的。由曲线上的两点，确定有此两点中间有一点的切线斜率与过该两点的割线斜率一致，为中值定理。而反之，先有一点的切线斜率，再去确定曲线上的两个点及过此二点的割线斜率与之相同，也许可以称之为“反中值定理”。当然，二者其实没有本质区别，就称中值定理也无妨。于是，对照斜率斜率相等的割线与切线方程，我们立即得到

$$K\left(x_0,\Delta x\right)=k\left(x_1,0\right) \tag{3}$$

上式中等号左边的$K\left(x_0,\Delta x\right)$为过横坐标分别为$x_0$、$x_0+\Delta x$曲线上二点的割线方程的斜率。而等号右边的$k\left(x_1,0\right)$为过上述二点中间的横坐标为$x_1$的曲线上的一点的切线方程斜率。

以二次曲线为例，过曲线上横坐标为x_0、$x_0+\Delta x$二点的割线方程的斜率为($2x_0+\Delta x$)，而上述二点中间的横坐标x_1点的曲线的切线方程的斜率为$2x_1$。于是按3式我们有

$2x_0+\Delta x=2x_1$。式中三个变量中任给两个，就可以知道第三个。同时由此式我们可以看出，x_1就是x_0点和$x_0+\Delta x$点的中值。有$x_0<x_1<x_0+\Delta x$。(勘误：在文献[12] P10，第14行，本式被印错，特此代为更正)。

2. 基于导数的新定义，微分就是增量——彻底解决了函数与自变量微分定义不一致的问题

笔者之所以要把导数定义分为两个(尽管数值相同)，是为了解决微分的定义问题，特别是自变量的微分定义。一般地，自变量的微分被定义成自变量的增量自身($\mathrm{d}x=\Delta x$)，但函数的微分却是其线性部分。不一致。自变量显然也可以是其它变量的函数，因此必然造成同一个变量有两种微分定义，作为函数(因变量)时是其线性部分，而作为自变量时就是其增量自身。这是明显的“双重标准”。但把自变量的微分

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51023. | CC-BY 4.0 Open Access | rec:25 July 2020, publ: 28 July 2020

也定义成其线性部分(将这个“自变量”看成其它变量的函数时)，是不可能的。因为这种函数可以有无数种，根本无法明确，也就无法定义。况且就是指定了一个具体的函数，那这个函数的自变量仍可以有其自变量，如此，这种“复合函数”可达无穷层。比如，y 以 x 为自变量，x 以 t 为自变量，t 以 s 为自变量，........。仍旧无法确定。如果止于某层，又会出现把自变量的微分定义成其增量的问题。那么，干脆取消自变量的微分资格，也就是一律不许再写 dx，只能写表示自变量增量的Δx，可不可以？理论上可以，但现实会使后续理论、应用变的十分复杂和不自然，比如复合函数的“链式法则”、微分方程等等。链式法则的简明且实际根本就正确的表达式 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t=\left(\mathrm{d}y/\mathrm{d}x\right)\left(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t\right)$ 将不应被允许。因为第一，极限法下的导数严格讲不能表示成分式，该式不成立。第二，按微分的两种第一，该式应该也应该写成 $\mathrm{d}y/\Delta t=\left(\mathrm{d}y/\Delta x\right)\left(\mathrm{d}x/\Delta t\right)$。等式右边的 d$x$ 与Δx 不相等，无法相消，因此也就得不到等式左边的 d$y/\Delta t$。但在笔者新的导数定义下，无论用所谓“导数的第二定义”(定义在割线上的)，还是用“导数的第一定义”(定义在切线上的)加“反中值定理”，都可以彻底地解决这个问题。这在 3 式乘上一个自变量的增量Δx 即可做到。于是微分与增量统一后可以写为：

$$\Delta y=K\left(x_0,\Delta x\right)\Delta x=k\left(x_1,0\right)\Delta x \tag{4}$$

于是，无论自变量的增量Δx 还是函数(因变量)的增量Δy，不但都是宏观量，而且就是其“微分”(微分不微)。可以统一写为 $\mathrm{d}y=\Delta y$， $\mathrm{d}x=\Delta x$。尽管并无必要，但也未尝不可。式中各量的含义与 3 式的解释相同，不再重复。由 4 式可见，此时的微分定义再无所谓“线性主部”之说。它就是精确的增量本身。明确说，微分就是增量，增量就是微分。且无论函数还是自变量都是如此。这就使理论再无内在矛盾且大为简化。更进一步，积分也被简化：积分，无非就是大些的微分，而微分无非就是小些的积分。二者没有本质区别。而传统的积分，实际也是隐含矛盾的，只不过一般的表述回避了这个矛盾而已。比如，在一个有限面积的积分区间个数趋于无限时，每一个积分小区间是趋于 0 的。也就是以 0 为极限。那么，积分时取到了这个极限 0 没有？取到了，就是以 0 作为极限值，对这个极限 0 积分，是不是还是 0？(无限多个 0 相加还是 0)如果不是 0，是什么？无穷小吗？这不又回到牛顿的无穷小了？极限法不是排除了无穷小概念了吗？更何况任何小区间(作为坐标增量)只要不等于 0，乘以导数后按传统积分就是函数的线性主部，就不是严格意义的函数增量，也就是会有误差。积分结果就不可能在理论上是一个精确值。总之，极限法的积分只提被积区间的总数趋于无穷大，而不提每一个被积区间趋于什么。因为无论趋于 0 还是无穷小，都会有问题。而现在，这些问题全部不存在了。

3. 多元函数导数、微分问题简评

对多元函数的，实际是一样的。比如自变量有两个时，无非是把割线改为割面，切线改为切面。其它基本原则都一样。这里省略。特别值得一提的是，极限法多元微积分只有“全微分”，而没有“全导数”(见文献[1])。一方面，这并不奇怪：由极限法求出的导数不过是个在某点的不可达极限值，而在标准分析中微分不是增量本身(作为自变量时)，就是增量的线性主部(作为函数时)，都是可以根据需要随意变动的宏观量。二者在概念上是截然不同的。但另一方面，又很可奇怪：毕竟导数与微分概念是密切相关的，将二者直接对立起来，即导数与增量无关，微分不是极限，是极其不自然的。但由前文可知，新导数与新微分定义都与也只与增量相关，这个意义上，全导数与全微分不仅都存在，而且是相互协调的。

4. 极限法求导(第二代微积分、标准分析)逻辑矛盾简析

最后，前文所述的不需要极限法也不需要无穷小的导数新定义及求导方法，是完全独立于极限法的。也就是，无论后者对、错，前者都成立。即使极限法无错，也不就说明它就错。而如果极限法求导是错

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51023. | CC-BY 4.0 Open Access | rec:25 July 2020, publ: 28 July 2020

的，它当然就是唯一正确的。事实正是如此。见笔者在文献[14]中的相关论述。这里结合具体函数简要复述如下：

设有自函数的增量比值函数$\Delta x/\Delta x$，极限法求导的思路及步骤是：在$\Delta x=0$点，其无有意义的函数值，也就是该函数在该点无定义。但在$\Delta x\neq 0$时，“可以”通过除法消去分母上的那个Δx，得到1，因此这个“1”在$\Delta x\to 0$时，仍旧为1，也就是在$\Delta x=0$点的极限值为1。虽然它在该点是没有有意义的函数值(无定义)的。这就是极限法求导的思路：最后由求在$\Delta x=0$点的不可达极限值，得到该函数在$\Delta x=0$点的导数等于1。这个推导或步骤看似逻辑上天衣无缝，特别是貌似“神来之笔”的一步：不是说在$\Delta x=0$点没有有意义的函数值吗？好，那就不求这个函数值。在所有其它点(即$\Delta x\neq 0$时)，该函数$\Delta x/\Delta x$都等于1(由于此时$\Delta x\neq 0$，所以“可以”通过做除法或约分，消去分母上的自变量Δx得到的)，再对这个“1”求$\Delta x\to 0$时的不可达极限，自然还是这个1。再定义它就是该点的导数。

上述推导中的逻辑问题，这么多年，竟然未被识者所明察，实在匪夷所思。下面从四方面揭示之：

第一，在$\Delta x\neq 0$的条件下，消去分母上的自变量Δx的一步，显然是整个推导的充分必要条件，“非它不可，有则必然”。但实际上笔者专门在前文中的相关步骤中把“可以”两字用引号标出，以强调实际在$\Delta x\neq 0$的条件下，把$\Delta x/\Delta x$写成“1”或求出为“1”本身，只是一个充分条件，而不是必要条件。也就是说，没有任何数学规则是说，只要$\Delta x\neq 0$，就必须把$\Delta x/\Delta x$之类的式子(包括所有分母为Δx的其它式子)写成“1”或分母为“1”。因此上述极限法求导的推导过程，实际是用“必须”取代了“可以”，因为只有在“必须”这个充要条件下，才会得到必然的、求导所要求的结论。而实际上那个消去分母的关键一步，作为必要条件并不被满足。

第二，既然在$\Delta x=0$点，函数$\Delta x/\Delta x$无定义，但通过在$\Delta x\neq 0$的其它点，我们可以消去分母上的Δx，得到1，再去求这个1在$\Delta x\to 0$时的不可达极限值(当然不是函数值)仍为1。那么，按同样的原则，如果我们先有这个同样的在$\Delta x=0$点无定义(但却有明确的不可达极限值，也是1)的函数“1”(这当然是完全可以允许的)，它在所有$\Delta x\neq 0$的其它点当然都可以加上一个分母Δx，也就是把这个“1”写成$\Delta x/\Delta x$，然后再去求其在$\Delta x\to 0$时的不可达极限值(当然也不是函数值)，不是可以得到0/0吗？也就是说，这个“不可达极限值”本身也是不可达的。“0/0”当然不是一个有意义的值，但不是只有先求出、得到它，才可能确定它无意义的吗？哪个在逻辑上为先？如此，我们不是把一个明明在$\Delta x=0$点有明确的、“有意义的”不可达极限值仍为“1”的函数1(尽管“规定”其在$\Delta x=0$点作为函数值无定义)，通过加上分母Δx，反而求出了1这个函数在$\Delta x=0$点的极限值为0/0，也就没有有意义的极限值。这显然是个矛盾，因此不成立。既然后者不成立，前者也必不成立，因为二者使用的原则是一致的。也就是说，既然1这个函数在$\Delta x=0$点的极限值不可能是0/0，那么同理，$\Delta \mathrm{x}/\Delta \mathrm{x}$这个函数在$\Delta x=0$点的极限值也不可能是“1”。换言之，既然“1”这个函数无论在$\Delta x=0$点是否有定义，其在该点的极限值都是1，不可能是无意义的0/0。那么同理，$\Delta x/\Delta x$这个函数在$\Delta x=0$点无论函数值还是极限值都只能是无意义的0/0，而不可能是有意义的“1”。

第三，$\Delta x/\Delta x$这个函数在$\Delta x=0$点的函数值只能是无意义的0/0，也就是无定义。它不可能有定义。但“1”这个函数在$\Delta x=0$点的函数值可以有定义，也可以无定义。究竟有无，完全看定义本身。这就是$\Delta x/\Delta x$与1的本质区别，也就是二者是不等价的。因此，对$\Delta x/\Delta x$的求在$\Delta x=0$点的极限(也就是极限法的求导。只能是唯一的不可达极限，不可能是可达极限)与对“1”的求在$\Delta x=0$点的极限(起码还有可能是可达极限)，不是一个等价的运算。或说是对不等价的不同函数求不同的极限值。但我们实际要求的在$\Delta x=0$点的极限值，是$\Delta x/\Delta x$的无疑，把它“偷偷地(通过消分母)”转换成对1的求在$\Delta x=0$点的极限值，在逻辑上是典型的“偷换概念”错误。

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51023. | CC-BY 4.0 Open Access | rec:25 July 2020, publ: 28 July 2020

第四，退一步说，即使以上所论全不成立，极限仍是存在的，我们用某点的不可达极限去“补充”在该点本无定义的原函数值，以使新函数连续的做法也是不成立的。在逻辑上，这同样是一种“偷换概念”：某点不能到达，只能无限接近，把这个点的不可达极限值重新加入，就能到达了吗？如能，就是不可达可达，矛盾。通常都说以极限值为导数值等等，但忽视了这个极限是不可达极限，也就是这个导数值其实是不可达的，换言之这个导数值只是一个不可达的极限(人们只知道用不可达极限来定义导数，却很少从反面来考虑问题：既然如此，不是要求或说明导数本身就是不可达的吗？)，即：导数不可达。也就是不存在。如果说它存在，其目的、意义也只是宣示“它不存在”而已。这有些像“0”这个概念：它表示什么也没有，但既然它表示的是“什么也没有”，这个意义上，它又不是“什么也没有”的。我们说，极限不可达，是可以的，这个极限还是有的。因为极限就是一个“目标”，目标达不到，但它还是个目标。作为目标，哪怕是到达不了的目标，“虚幻”的目标，它毕竟也是个目标。即，作为目标，它“存在”。但导数，可以在物理上解释成为“瞬时速度”，难道瞬时速度只是一个不可到达的“目标”、“虚幻”的目标而已吗？如果是，物理上显然有其物理意义的、实实在在的瞬时速度，原来仅仅是个“虚幻”的存在、“虚幻”的不可到达、实现的目标，不过是为了告诉人们它原本不存在而存在的。就如“0”这个概念不过是告诉人们什么也不存在而存在的一样。这当然是不成立的。而这一切，都是由极限法的推导得出的结论。总之，即使标准分析的不可达极限存在，它也是隐含矛盾的。而此点以往竟然未见有谁彻底探讨、揭示过。

以上讨论，对所有分母上有自变量的增量 Δx 的函数都有效，比如二次函数等。只不过 $\Delta x/\Delta x$ 最简单罢了。读者可自行体会之。

5. 与无穷有关的一般意义的极限问题的讨论

标题中的所谓“一般意义”，指的是不可达极限，同时是不涉及前述分母上自变量趋于 0 之类的极限。即使如此，在逻辑上它也很难在定义、推导、论证中不产生“循环论证”。至于可达极限，就是其函数值，这个是没有什么问题的。

数学中，经常用到某变量趋于无穷的极限。即符号 $\lim\limits_{x\to\infty}$ 的准确含义是什么？这个符号实际表示的是通过一个过程，达到某个值，也就是极限值。也就是它与其说是表示一个过程，还不如说是表示一个确定的值。尽管这个确定值(极限值)是通过一个过程得到的。但几乎未见有人对此中含义进行仔细分析，这里面不是没有问题的。无穷，或准确说无穷大(通常用符号∞表示)，就是永远还可以更大、更多、越来越大、总可以更大，无限大，就是无限制地、也就是“无极限”地大下去、多下去。因此，一个与“时域”有关的无限大(∞)真正表示的是一个过程，尽管这个过程是完成不了的，无限制的。既然如此，怎么还会有无限大的极限？这等于是无极限的极限、不可能有极限的极限，明显矛盾。即无穷大的定义，与极限的定义直接矛盾。这个问题，过去几乎未见什么人注意到。

对于极限法中的ε-δ方法，表面看回避了无穷的表述，但实际上只是用别的等价说法掩盖了它。比如，我们常说的“对应任意的ε，总有δ......”，既然任意，当然就是对任何的ε之意。任何，当然有无穷种，不可能是有限的。因此同样是无法穷尽的，完不了的。既然实际完不了，不就是永远也到不了极限点吗？既然如此，这个极限点肯定不是由ε-δ法求出来的。只能是先有了这个点作为极限点，然后才能知道永远到不了它和可以无限接近它。因此，ε-δ方法充其量也就是以一个事先已经存在的点作为极限点，然后再假么假事地不断接近但就是不去达到它。这在逻辑上是循环论证。而绝对不是由ε-δ法求出了这个极限。那么，以ε-δ法作为极限的定义可以吗？这当然可以。但定义不能作为或代替求极限的方法。

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51023. | CC-BY 4.0 Open Access | rec:25 July 2020, publ: 28 July 2020

6. 几代或几种微积分之间的关系问题讨论

最后，为以往论者所忽略或模糊的一点是，第一代微积分(牛顿等)与第二代微积分(极限法，柯西等)二者必有一对、一错，不可能相容。因为显然，所谓第二代微积分就是为了取代第一代的，就是为了消除第一代的矛盾贝克莱悖论的(而且它自认为是消除了)，二者怎么可能等价？如果等价，还要第二代微积分何干？如此，既然费马、牛顿、莱布尼兹等都是错的，微积分的发明权，不是应该归于柯西等吗？如果硬说第二代微积分是解释第一代微积分的，也就是用极限法去解释牛顿等法，即认为牛顿等人实际上是用极限法求出了正确的导数的。那么，牛顿是直接令 $\Delta x = 0$ 求出导数的，是不是应该解释为什么直接令 $\Delta x = 0$ 就是求的 $\Delta x \to 0$ 的极限？既然二者等价，还要第二代微积分的繁琐求导何干？显然，第二代微积分是否定牛顿等的直接令 $\Delta x = 0$ 的求导的。这又怎能说第二代解释了第一代呢？总之，怎么辩解都有矛盾，都不能自圆其说。因此，老老实实承认第二代与第一代微积分不相容，是唯一的逻辑出路。于是，既然笔者已经充分地诠释了第一代微积分求导法实际上的正确性，那么，就实在对不起了，第二代微积分无论影响多大，无论曾经被多少人所认可，或早或晚，也只能请其步入历史了。

此外现在已知，第二代微积分(标准分析)并不是唯一的微积分理论。非标准分析横空出世已有经年，其等于又回到了第一代微积分(见文献[15])。尽管罗宾逊没有否定第二代微积分，还说二者是协调的，可以互相证明的。但其实不尽然。非标准分析的求导步骤“取标准数”，函数值是可达的，标准数在非标准分析中是现实存在的、有定义的。而标准分析中的“求极限”，是不可达极限，也就是原函数在该点是无定义的。不能说有定义与无定义等价，不可达与可达等价。于是不同“代”的微积分理论中的导数只是数值一样，也就是可达与有定义的值，与不可达与无定义的值在数值上相等而已，本质上并不相同。否则第一代与第二代微积分不是也等价了？从这个微积分的历史事实也可以看出这里面的矛盾及不协调：第二代微积分(标准分析)否定了第一代微积分；而非标准分析又等于恢复了第一代微积分的做法。但第二代微积分(标准分析)与非标准分析又都对，不就等于说第一代与第二代微积分都不错了吗？如此，还要第二代微积分(标准分析)何来？内在的矛盾是明显的。

几句题外话。笔者始终认为，维护学术尊严、信誉的唯一途径，就是对逻辑正确的推理(特别是一经揭示就很简单的推理)赶紧搞清、承认，买账，而无论其否定的是一个历史多么久的理论。反之，如果千方百计地维护一个现有理论，理由仅仅因为其历史悠久或为大多数人所认可，是不可取的。拖的越久，学术尊严、信誉受损越大。

参考文献

[1] 莫绍揆.试论微分的本质.南京大学学报(自然科学),1994 年第 03 期

[2] 沈卫国.论增量分析视野下的测度问题、微积分求导及连续统的可数性.前沿科学，2017 年 03 期.

[3] 方源,王元.微积分(上).高等教育出版社，2014 年 7 月第一版.

[4] 沈卫国.论微积分求导公式的一种全新推导模式(解方程法)及贝克莱悖论的彻底消除.天津职业院校联合学报，2013 年 2 期.

[5] 沈卫国.微积分核心概念的无矛盾表述——不需要无穷小、极限等概念的增量分析.天津职业院校联合学报，2015 年 05 期.

[6] 沈卫国.微积分核心概念的无矛盾表述(续)——不需要无穷小、极限等概念的增量分析.天津职业院校联合学报，2015 年 11 期.

[7] 沈卫国.微积分极限法(标准分析)的本质及问题详析.天津职业院校联合学报，2017 年 06 期.

[8] 沈卫国.辩证逻辑与智能.智能系统学报.2011 年 04 期.

[9] 沈卫国.微积分求导问题考辩与新解(上).天津职业院校联合学报.2018 年 04 期.

[10] 沈卫国.微积分求导问题考辩与新解(下).天津职业院校联合学报.2018 年 07 期.

[11] 沈卫国.数学基础若干问题的创新性思考.理论数学.2018 年 08 期.

[12] 沈卫国.新诠释下的牛顿-莱布尼兹微积分(第一代)核心概念的最简教程纲要及——一种完全不需要极限、无穷小改您的微积分新理论.数学学习与研究.2019 年 05 期.

[13] 克莱因.古今数学思想(第四册).上海科学技术出版社.1981 年 7 月第一版.

[14] 沈卫国.牛顿、莱布尼兹究竟是如何“通过(看似)肯定不正确的数学途径得出正确结果”的——兼论对微积分核心概念的全新理解.天津职业院校联合学报.2020 年 05 期.

[15] 克朗，罗宾.什么是数学——对思想和方法的基本研究(增订版).复旦大学出版社.2005 年 5 月第二版

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51023. | CC-BY 4.0 Open Access | rec:25 July 2020, publ: 28 July 2020