

Characterization of Strong Nonlinear Phenomena of Free Surface Due to Parametric Excitation*

Qunfeng Xu, Baozeng Yue, Xiaoqiang Shi

Department of Mechanics, School of Aerospace Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing
Email: Darcy.Hsu@gmail.com

Received: Nov. 28th, 2012; revised: Dec. 18th, 2012; accepted: Dec. 23rd, 2012

Abstract: The study of the most important droplet-ejecting is given based on the phenomena of sub-cooled fuel of spacecraft propelling machinery during powered flight using VOF method of ADINA-F, which is verified to be taking high reliability to simulate the phenomenon of liquid strong nonlinear sloshing. The critical excitant frequency of free surface is deduced, whose dominant restoring energy from ejection is surface tension. Then the relationship between strong nonlinear features and frequency, forcing amplitude are revealed of this surface under low frequency and high frequency respectively. The inhibitory effect of nonlinear phenomenon caused by liquid viscous is also expounded.

Keywords: Droplet-Ejecting; VOF Method; Nonlinear Phenomenon; Surface Tension; Parametric Excitation

参数激励下自由液面强非线性特征研究*

徐群峰, 岳宝增, 史晓强

北京理工大学宇航学院力学系, 北京
Email: Darcy.Hsu@gmail.com

收稿日期: 2012年11月28日; 修回日期: 2012年12月18日; 录用日期: 2012年12月23日

摘要: 本文以航天推进装置超低温推进剂在真实工况为背景, 对最为关键的微小液滴飞溅现象展开研究, 利用 ADINA-F 的 VOF 方法研究了该类问题, 并证明了其对于模拟液体强非线性现象具有较高的可靠性。推导了以表面张力为主导恢复力的自由液面的临界激励频率, 揭示了该类液面在低频和高频参数激励下的强非线性特征与激励频率和幅值的关系, 并阐述了液体黏性对于强非线性现象的抑制效应。

关键词: 液滴飞溅; VOF; 非线性现象; 表面张力; 参数激励

1. 引言

自由液面的液滴飞溅、弹跳、粘附等非线性现象在自然界非常常见, 如湖面和海洋自由液面的波浪, 拍打在海岸和船舶上的浪花, 水流湍急的河流, 雨滴坠入泥潭时的弹跳及飞溅等。液体飞溅以及飞溅的液体与容器、膜等形成冲击会产生一些非常美丽诸如“皇冠形飞溅”“钟形水花”等现象, 国内外学者针对液体飞溅撞击动力学, 克服液体飞溅导致的浪费及

能量耗散, 剧烈情况下容器的安全问题等做了大量的研究^[1-6]。研究方法既有实验方法和数值方法, 也有基于有限液滴的理论计算, 但理论计算仅限于对接触角、拉伸力、液滴尺寸形状、表面张力和载荷计算等线性问题的研究^[1]。

对于密封容器内液体受迫晃动自由液面破碎飞溅等问题, 刘闯^[7]基于液态金属快中子增殖堆的假想堆芯破损事故背景借鉴了固体力学中的拉伸断裂准则研究了单一液团脱离自由液面的临界条件, 推导了冲击载荷计算公式。文献^[8]基于 LNG 船载背景采

*基金项目: 国家自然科学基金(11072030)资助项目。

用 VOF 方法成功模拟出液体飞溅撞顶现象, 仅单一算例耗时 265 小时。文献[9]利用 Fluent 软件模拟油罐车罐内液面破碎现象及隔板对晃动的抑制效果。Goodridge et al.用实验方法研究了在参数激励下发生不同黏性的液体飞溅现象的临界加速度, 飞溅现象与表面张力、激励频率和波高的关系, 以及液体黏性对飞溅现象的影响^[10]。

自由液面较大规模的液面破碎、大量微小液滴飞溅等现象及其临界条件的研究, 由于其强非线性特征, 而且小尺寸液滴(雾化)模拟需要非常细的网格, 对于临界条件的研究也需要多次的计算, 所以研究手段一般都是实验研究。但是实验一般非常耗时耗资, 尤其是对于大尺寸的超低温实验测试。如火箭发动机燃料储腔的纵向振动可能导致谐振燃烧现象, 其引发的液态推进剂运动会导致气液交界面的低温氢蒸发加速, 随后可能会导致气隙冷凝和相应的压力坍塌。另一方面, 飞溅液滴和壁面接触会导致大量的热交换会致使液体快速挥发、压力突增等。而且真实的飞行工况测量数据往往非常困难。对于飞行阶段受到纵向振动的超低温燃料晃动只能测量到极为有限的数据^[11]。

本文基于这样的工程背景探究了一种低成本的数值计算方法研究该类问题, 即基于 ADINA-F 的 VOF 方法。ADINA-F 提供的 VOF 方法是通过捕捉自由液面来解决多相不相容流体流动问题的方法。其通过连续的表面力模型(CSF)模拟表面张力和壁面附着力。该类工程问题常用的两相流分别为 LH₂(液态氢)、LO₂(液态氧)或水, H₂、O₂, 水蒸汽。本文先验证了数值方法的可靠性, 即计算 ADINA-F 对于大幅非线性晃动的模拟误差。然后针对参数激励下的液滴飞溅不稳定现象从激励频率, 激励量级, 液体黏性等方面展开研究, 探究了参数激励下自由液面不稳定特性。本文将部分结果和 Goodridge et al.的实验结果对比, 其高度吻合的结果不仅表明该数值手段研究自由液面强非线性特征的可行性, 而且 ADINA 强大的流固耦合功能可以应用于后续关于飞溅液体反弹和储腔的安全性问题等方面工作。

2. 数值方法探究及可靠性验证

通过 VOF 方法最多可以模拟两种不同的流体, 既可以是可压缩流体也可以是不可压缩流体, ADINA-

F 的 VOF 方法传递方程为

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \phi_i = 0, i = 1, \dots, n \quad (1)$$

其中 \mathbf{v} 是速度矢量, ϕ_i 是第 i 类流体的质量比例, i 为流体类(不包括初级流体)。ADINA-F 采用有限体积法离散该方程。混合流体域内的材料参数 m 的计算取所有类的平均值 $m = \sum_{i=0}^n \phi_i m_i$, 注意到初级流体的质量比例为 $\phi_0 = 1 - \sum_{i=1}^n \phi_i$ 。ADINA-F 表面张力通过连续的表面力模型(CSF)模拟表面张力和壁面附着力, 故视表面张力为一体力, 单元体积内的体力为

$$f^s = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \sigma_{ij} (\phi_i \Gamma_j \nabla \phi_j + \phi_j \Gamma_i \nabla \phi_i) \quad (2)$$

其中 σ_{ij} 是第 i 类和第 j 类流体之间的表面张力系数, 且 $\Gamma_i = -\nabla \cdot (\nabla \phi_j / \|\nabla \phi_j\|)$ 。

对于宽为 L , 液面高度为 H 的二维矩形容器, Faltinsen^[12]计算出其第 n 阶固有频率为

$$\omega^n = \sqrt{g \frac{n\pi}{L} \tanh\left(\frac{n\pi H}{L}\right)}, n = 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

借此数据为参考, 进行 ADINA-F 能模拟液面强非线性现象的可行性验证。建立二维矩形容器, 长宽各为 2 m, 容器内的两相流为空气和水, 均为黏性不可压缩液体, 容器具有 $v = 1.5$ m/s 的右向初速度, $t = 0$ 时刻静止, 液体不受到外部激励而自由晃动。本文分别计算充液比 $k_1 = 0.5$, $k_2 = 0.25$, $k_3 = 0.125$ 时的液体晃动壁面压力, 然后对其作傅里叶变换(FFT), 可以得到液体自由晃动的固有频率, 与理论值对比, 考察误差及其 ADINA-F 的可靠性。

根据式(3)计算出充液比 $k_1 = 0.5$, $k_2 = 0.25$, $k_3 = 0.125$ 时($H_1 = 1$, $H_2 = 0.5$, $H_3 = 0.25$)的一阶晃动固有频率, $\omega_1^1 = 3.7594$, $\omega_2^1 = 3.1789$, $\omega_3^1 = 2.3996$ 。图 1 为充液比 $k_1 = 0.5$ 时的某一时刻气液两相分布图(网格密度对误差验证基本没有影响, 故网格较疏, 但能可以看出液体已经发生飞溅现象)。图 2 为该情况下的左右壁面反作用力时程变化图。对受力曲线做 FFT, 如图 3 所示, 得出峰值对应的频率为 3.7481 即数值计算出的液体一阶晃动频率。由于左右壁受力情况只有方向不同, 故研究右壁反作用的傅里叶变化, 计算其峰值对应的频率, 表 1 为三次数值计算的结果, 给出了

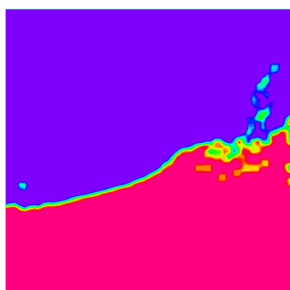


Figure 1. The profile of vapor-liquid two phase
图 1. 某时刻气液两相分布图

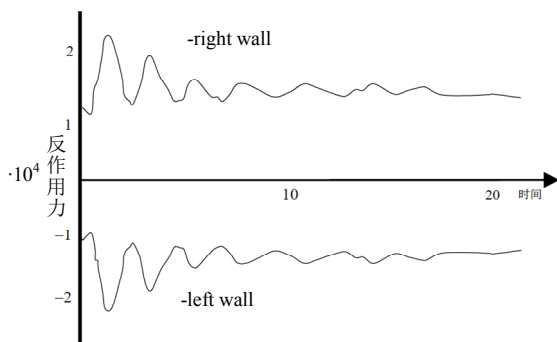


Figure 2. Curve of reaction on the left and right walls
图 2. 左右壁面反作用力变化图

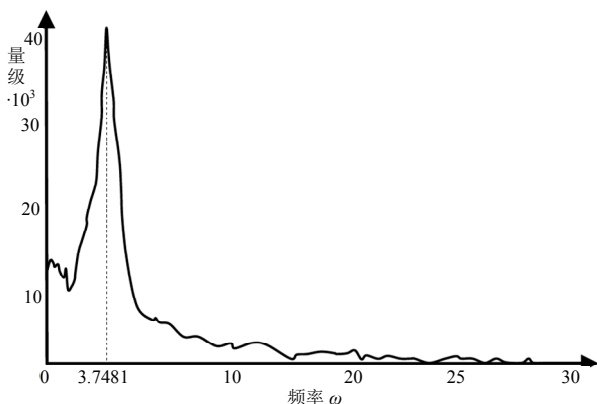


Figure 3. Amplitude frequency diagram of reaction at right wall
图 3. 右壁反作用力 FFT 幅频图

Table 1. Comparison and error analysis between numerical result and analytical solution

表 1. 数值计算结果和解析解对比及误差分析

充液比 k_i	一阶晃动 频率解析解	ADINA-F 计算结果	误差(%)
$k_1 = 0.5$	$\omega_1^1 = 3.7594$	3.7481	4.1%
$k_2 = 0.25$	$\omega_2^1 = 3.1789$	3.0994	2.5%
$k_3 = 0.125$	$\omega_3^1 = 2.3996$	2.3201	3.0%

理论值对比并算出误差。对比误差均在 5% 以内，可

以认为 ADINA-F 对模拟储腔内液体飞溅等非线性现象有较高的可靠性。

3. 强非线性特征结果和讨论

上述表明了 ADINA-F 有能力模拟不可能通过线性解析解得到的液体飞溅、翻转等强非线性运动，Goodridge et al.^[10]的实验把参数激励下的法拉第波研究拓展到非线性不稳定域，研究在参数激励下发生的破碎液面形状和液滴飞溅现象。实验发现随着激励力的增加，初始状态下平坦的液面会演变成周期性的驻波。然后逐渐呈现非周期状态，当激励力足够大的时候，将产生射流或突增形式的大量级波，随后导致液滴飞溅。

发生变形的自由液面恢复为静液面的恢复力为重力 and 表面张力，当波较长时，重力起主要作用(重力波)，波较短的时候，表面张力起主要作用(毛细波)。存在临界波长 λ_c ，当波长大于 λ_c 时，自由液面恢复力主要为重力，当波长小于 λ_c 时，恢复力主要为表面张力。由于本文主要讨论自由液面微小液滴飞溅行为，为了避免其结果依赖储腔形状和尺寸，必须使波长小于临界波长 λ_c 。

根据流体力学基础知识，对于无限深度的二维小振幅周期波有频散关系^[10]：

$$\omega^2 = gk + \frac{\sigma k^3}{\rho} \tanh(kh), (h \rightarrow \infty) \quad (4)$$

其中 ω 是角频率， g 是重力加速度， k 为组合成波的正弦波数目， σ 是表面张力， ρ 是流体密度，故频率依赖重力作用项 gk 和表面张力项 $\sigma k^3/\rho$ ，令

$gk = \sigma k^3/\rho$ ，即使他们的贡献相等可得到临界波数 $k_c = \sqrt{\rho g/\sigma}$ ，代入式(4)得到临界角频率为 $\omega_c = g^{3/4}(\rho/\sigma)^{1/4}$ ，根据重力加速度值和水的参数 $f_c = \omega_c/2\pi = 13.8 \text{ Hz}$ 。

这样我们通过控制激励频率 $f > f_c$ 使得波长小于临界波长，表面张力为变形自由液面的主要恢复力，而且研究结果不受储腔形状和尺寸的影响。

3.1. 低频参数激励

我们首先考虑激励频率为 20 Hz 的情况，由于 $f > f_c$ ，故表面张力为主导恢复力，且研究结果不依赖储腔的形状和尺寸，更具有一般性。

因为要研究大量微小尺寸液滴飞溅现象，计算成本非常高，为节约计算资源，先研究 2D 模型。数值计算模型如图 4 所示，水平方向上等距均匀划分 250 个网格，竖直方向上的网格在液面附近加密，用足够的网格密度来确保可以观测到高频下的微小波高和发生飞溅现象的小尺寸液滴，所以模型能捕捉到大于或等于 $0.8\text{ mm} \times 0.8\text{ mm}$ 尺寸的液滴。

流体单元类型为 FCBI-C，FCBI-C 单元所有自由度都定义在单元中心处，计算量小，适用于移动边界的流体模型，在瞬态分析中与复合时间积分(Composite)一起使用能模拟涡街问题。求解器为 AMG(type 1)，是求解非线性流体方程的一种迭代算法。边界条件为 Moving wall，其运动学条件满足 Goodridge et al.^[10]实验所施加的加速度边界条件。VOF 最大积分次数 50，收敛公差为 10^{-6} 。流体材料为 $k-\varepsilon$ 湍流模型材料，水的密度 1000 kg/m^3 ，运动学黏性 $\nu = 0.01\text{ cm}^2/\text{s}$ ，空气密度 1.225 kg/m^3 ，运动学黏性 $10^{-4}\text{ cm}^2/\text{s}$ ，水气表面张力系数 0.0729 N/m 。

Goodridge et al.实验结果的选取区域离边界距离 7.67 cm ，消除了容器边界效用的影响，本文数值计算也类似地选取了中间部分计算域来消除边界效用的影响(如图 5 左上角所示)。图 5 给出了代表性的结果，也给出了 Goodridge et al.中通过实验得到图片和加速度临界值用以对比和验证。其实验配置为直径 20 cm 的圆柱形塑性容器，初始充液 10 cm ，被安装在一个电驱的电磁振荡器上。实验中所用的代表不同黏性的液体分别为水，甘油水混合物，乙醇。

实验测得纯水发生飞溅的 α 临界值约大于 1.0 。图 5、图 6 给出了两种仿真结果， $\alpha = 1.0$ 和 $\alpha = 2.0$ 的

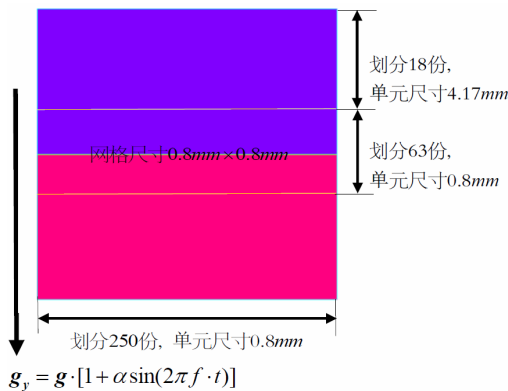


Figure 4. Simulation model and meshing
图 4. 数值计算模型及网格划分

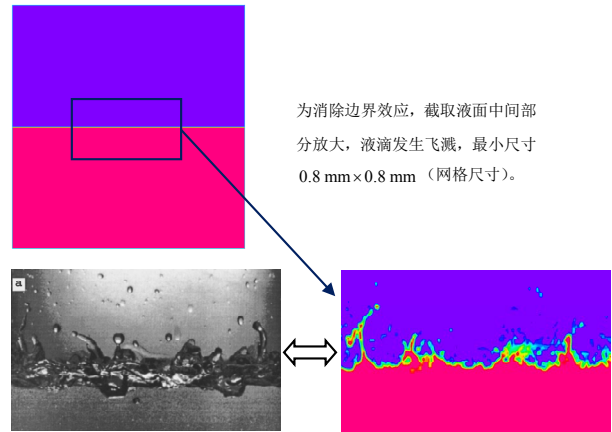


Figure 5. Droplet ejection from experiment and simulation at $f = 20\text{ Hz}$, $\alpha = 2.0$, $a_{\max} = 19.62\text{ m/s}^2$
图 5. $f = 20\text{ Hz}$, $\alpha = 2.0$, $a_{\max} = 19.62\text{ m/s}^2$ ，实验和仿真结果都发生液滴飞溅

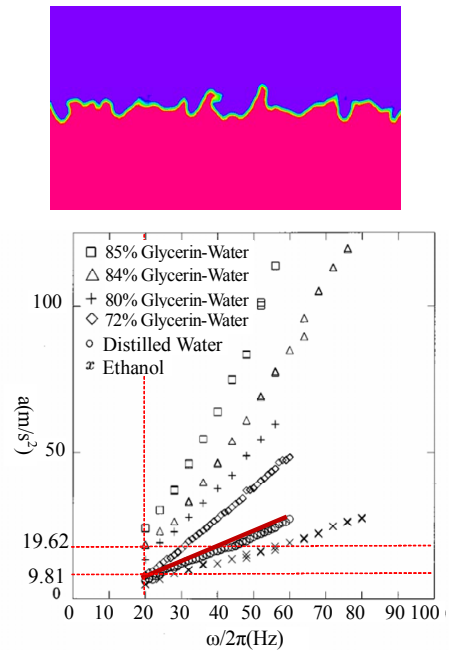


Figure 6. No droplet ejection from experiment and simulation at $f = 20\text{ Hz}$, $\alpha = 1.0$, $a_{\max} = 9.81\text{ m/s}^2$
图 6. $f = 20\text{ Hz}$, $\alpha = 1.0$, $a_{\max} = 9.81\text{ m/s}^2$ ，实验和仿真结果都未发生液滴飞溅(实验结果 $\alpha = 1.0$ 处的小误差允许存在)

情况。 $\alpha = 1.0$ 时，有明显的液面驻波且无飞溅现象，液面完整性非常好。驻波导致液面面积增大，可能增大气液相之间的热交换，这里不展开讨论。当激励幅值增加到 $\alpha = 2.0$ 时，图中可见表面驻波开始破碎且形成大量飞溅的液滴。由于有较高的初始速度，液滴将飞溅出自由交界面附近。在推进剂储腔内，这些液滴将大大的增加了气液相之间的热交换。由于两相交

换，它们不仅从自由液面附近的气相损耗热，而且在气隙部位他们也会从温度较高的气体里面损耗热。这种类型的液滴飞溅可能导致气隙坍塌。

图 5、图 6 中引用的实验结果图片和数值计算结果对比发现从波高、波形和飞溅的液滴等方面发现两者结果吻合很好。加速度的临界值方面的比较也很令人满意， $\alpha = 1.0$ 低于临界值， $\alpha = 2.0$ 高于临界值。需要指出的是，该数值仿真得到的液滴的最小尺寸是网格的尺寸即 $0.8 \text{ mm} \times 0.8 \text{ mm}$ ，故也可能存在更小尺寸的液滴。

3.2. 高频参数激励

随着激励频率增加，同量级的激励下液面破碎的程度被削弱，从图 7 可看出当 $\alpha = 2.0$ 时只有驻波而没有出现液滴飞溅。随着激励频率增加数值模拟的临界值和实验结果一致，(见实验结果图)。另外图 7 与图 6 比较我们也能发现对于同是 $\alpha = 2.0$ 的情况，高频激励的波高响应也有所衰减。但是，对于受迫幅值较大即 $\alpha = 4.0$ 时，可以观察到液面飞溅出大量的小液滴(图 8)。对比实验结果，液滴尺寸和波高等方面吻合非常

好，数值计算出临界值区间是 $2 < \alpha < 4$ 。

3.3. 非线性特征的黏性效应

上述两相流是空气和水，Goodridge et al.^[10]的实验使用了多种流体发现低黏性的流体的临界值依赖黏性和激励频率。图中显示了不同黏性流体的效果。为了模拟实验所观测到的结果，数值模拟采用了甘油 - 水的混合物使得其黏性是水的 43 倍。图 9 中给出数值模拟得到的瞬态波形和实验照片比较。与当流体是水的时候液面破碎是瞬时发生的情况不同，甘油 - 水的混合物液面发生破碎之前会形成很多突出的细长的丝状体。图 10(a), (b)对比可见相同激励频率和相同加速度量级 $\alpha = 2.0$ 情况下的纯水和甘油 - 水混合物，高黏度液体能稳定液滴飞溅，纯水液面飞溅的微小液滴(图 10(a))在甘油 - 水混合物中得到了抑制(图 10(b))。

3.4. 三维算例

前面的讨论基于二维而展开，因为已经证明本文所考虑的自由液面以表面张力为主导恢复力，其强非线性特征不依赖储腔的形状和尺寸，具有一般性，可

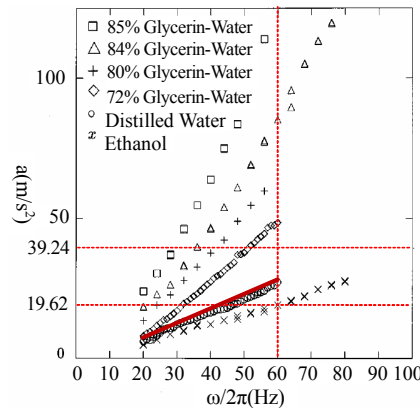
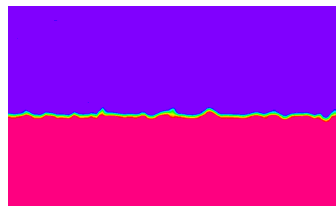


Figure 7. No droplet ejection from experiment and simulation at $f = 60 \text{ Hz}$, $\alpha = 2.0$, $a_{\text{max}} = 19.62 \text{ m/s}^2$

图 7. $f = 60 \text{ Hz}$, $\alpha = 2.0$, $a_{\text{max}} = 19.62 \text{ m/s}^2$ ，实验和仿真结果都未发生液滴飞溅(与 $f = 20 \text{ Hz}$ 的情况比较，波高更小)

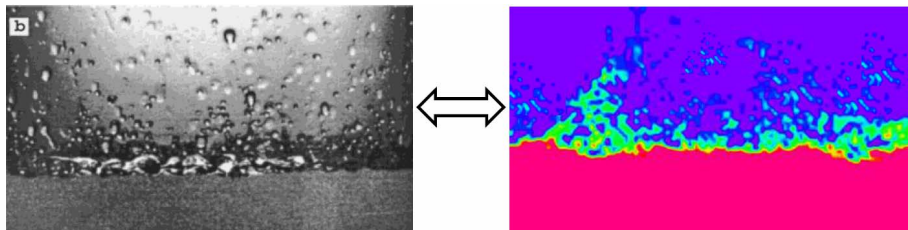


Figure 8. Droplet ejection from experiment and simulation at $f = 60 \text{ Hz}$, $\alpha = 4.0$, $a_{\text{max}} = 39.24 \text{ m/s}^2$

图 8. $f = 60 \text{ Hz}$, $\alpha = 4.0$, $a_{\text{max}} = 39.24 \text{ m/s}^2$ ，实验和仿真结果都发生液滴飞溅(与 $f = 20 \text{ Hz}$ 的情况比较，波高和液滴都更小)

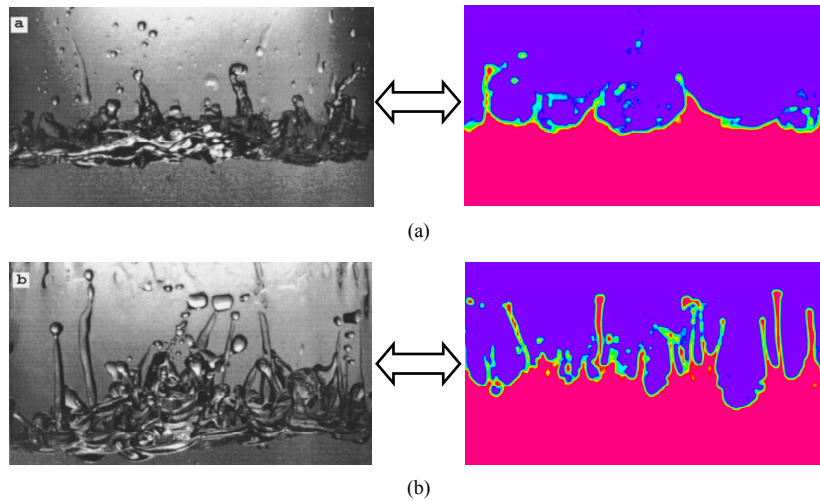


Figure 9. Droplet ejection modeling and comparison with experiment at 60 Hz using Glycerin-water: (a) Effect of viscosity: water with lower viscosity $f = 20 \text{ Hz}$, $\alpha = 2.0$; (b) Effect of viscosity: glycerin-water higher viscosity $f = 20 \text{ Hz}$, $\alpha = 3.0$, $\nu = 43\nu_{\text{水}}$

图 9. 激励频率 $f = 20 \text{ Hz}$ 时纯水和甘油 - 水混合物的黏性效应实验和仿真对比图: (a) 黏性效应: 较低黏度的纯水 $f = 20 \text{ Hz}$, $\alpha = 3.0$, $\nu = 43\nu_{\text{水}}$; (b) 黏性效应: 较高黏度的甘油 - 水混合物 $f = 20 \text{ Hz}$, $\alpha = 3.0$, $\nu = 43\nu_{\text{水}}$

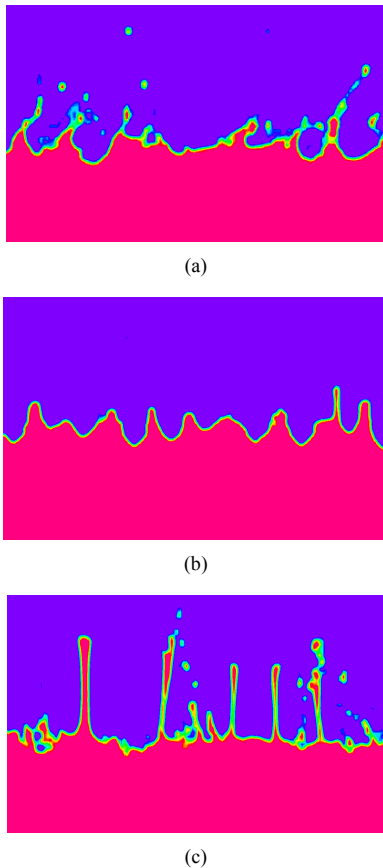


Figure 10. Characteristics of droplet formation at different acceleration level and for different fluids $f = 20 \text{ Hz}$: (a) Water, $\alpha = 2.0$; (b) Glycerin-Water, $\alpha = 2.0$; (c) Glycerin-Water, $\alpha = 3.0$

图 10. 不同加速度量级和不同黏性液体所形成液滴的特征: (a) 纯水, $\alpha = 2.0$ ($f = 20 \text{ Hz}$); (b) 甘油 - 水混合物, $\alpha = 2.0$; (c) 甘油 - 水混合物, $\alpha = 3.0$

以预测三维的结果一致。而且要捕捉微小尺寸的液滴，计算资源非常大，本文给出一个三维算例作为验证和推广。考虑液体为甘油 - 水混合物， $\nu = 43\nu_{\text{水}}$ ， $\alpha = 3.0$ ， $f = 20 \text{ Hz}$ ，网格模型如图 11 左所示，网格数目为 80 万，自由液面处加密，VOF 最大积分次数为 150，其余设置和二维情况相同，4 秒计算时间约 140 个小时，图 11 右为代表性结果，可以看到从边界处出现了和二维结果一致的丝状体和破碎(考虑网格和 *moving wall* 条件)，可认为在这样的问题研究中二维的简化分析具有一般性。

4. 结论及展望

本文以航天推进装置超低温推进剂在真实工况下可能导致的气液相热交换、液滴飞溅、雾化、压力坍塌和谐振燃烧现象为背景，探究了一种可行且简易的 CFD 技术研究方案，并对以表面张力作为主要恢复力的液面的最为关键的液滴飞溅现象(是导致其他问题的主要原因)临界条件和黏性的影响展开研究。本文从模态的角度先证明了 ADINA 软件对液体晃动模拟的可行性; 然后对于无激励下液体的自由晃动(已发生液滴飞溅)提取其固有频率, 对于不同的充液比计算其与解析解的误差, 均不超过 5%。本文得到对于低频参数激励下液滴飞溅临界激励幅值 $1 < \alpha < 2$ ，高频参数激励下液滴飞溅临界激励幅值为 $2 < \alpha < 4$ ，对比实验结果，液滴尺寸、波高和波面破碎情况等方面

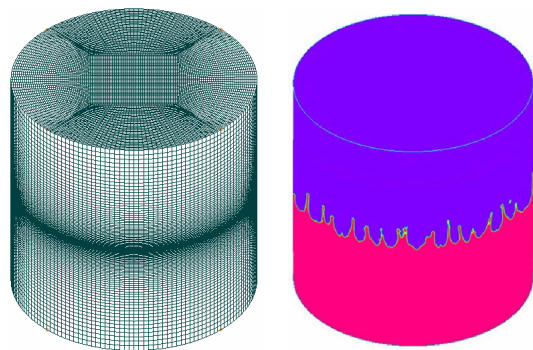


Figure 11. Result of three-dimensional simulation example
图 11. 三维算例(左为网格图, $f = 20 \text{ Hz}$, $\alpha = 3.0$, $\nu = 43\nu_*$)

吻合非常好,且高频激励比低频激励下的响应波高和液滴尺寸更小。本文也研究了表面张力为主导恢复力的自由液面黏性强非线性现象的影响,发现与当流体是水的时候液面破碎是瞬时发生的情况不同,甘油-水的混合物液面发生破碎之前会形成很多突出的细长的丝状体,且高黏性的流体对于液滴飞溅现象的产生有抑制效果。

本文验证了 ADINA-F 的 VOF 方法解决该类问题具有较高的可靠性。且对于考虑表面张力的 10 秒钟的模拟均耗时不超过 5 小时,模拟的微小液滴尺寸可达 $0.8 \text{ mm} \times 0.8 \text{ mm}$,非常节约计算资源。且 ADINA 软件具有强大的多物理场耦合能力,可为后续的液体弹跳、热交换、储腔安全性等问题展开研究。

参考文献 (References)

- [1] H. Y. Yu, J. W. Kwon. Chamber extraction on a chip by nanoliter droplet ejection. *The Royal Society of Chemistry Lab Chip*, 2005, 5: 344-349.
- [2] A. James. Vibration-induced drop atomization and the numerical simulation of low-frequency single-droplet ejection. *Journal of Fluid Mechanics*, 2003, 476: 29-62.
- [3] 吴子牛. 液滴高速碰撞固壁引起的皇冠型飞溅现象理论研究 [A]. 全国流体力学青年研讨会, 2001.
- [4] 马理强等. 液滴冲击液膜问题的光滑粒子动力学模拟[J]. *物理学报*, 2012, 61(24): Article ID: 244701.
- [5] F. T. Dodge. The new “dynamic behavior of liquids in moving containers”, 2000. snap.lbl.gov
- [6] C. D. Stow, M. G. Hadfield. An experimental investigation of fluid flow resulting from the impact of a water drop with an unyielding dry surface. *Proceedings of the Royal Society of London*, 1981, 373(1755): 419-441.
- [7] 刘闯等. 液体飞溅及冲击壁面问题的分析[J]. *清华大学学报(自然科学版)*, 2005, 45(5): 22-37.
- [8] D. M. Liu. A numerical study of three-dimensional liquid sloshing in tanks. *Journal of Computational Physics*, 2008, 227(8): 3921-3939.
- [9] K. Modaresi-Tehrani. Three-dimensional analysis of transient slosh within a partly-filled tank equipped with baffles. *Vehicle System Dynamics*, 2007, 45(6): 525-548.
- [10] Goodridge, et al. Viscous effects in droplet-ejecting capillary waves. *Physical Review E*, 1997, 56(1): 472-475.
- [11] H. Q. Yang, J. M. Rojahn, J. W. Peugeot and D. J. Dorney. CFD analysis of propellant tank sloshing under vertical oscillatory thrust and horizontal oscillatory side load. Orlando: Feed System Design and Analysis, 10-13 November, 2008: Paper LPS-06.
- [12] O. M. Faltinsen. A numerical non-linear method of sloshing in tanks with 2D flow. *Journal of Ship Research*, 1974, 18(4): 224-241.