

# The Magnus Effect of a Specific Axisymmetric Rotator's Motion in the Air

Zeguo Wang, Hanchen Liu, Mingyue Guan, Fang Lin\*

College of Physical Science and Technology, Sichuan University, Chengdu Sichuan  
Email: \*linfang@scu.edu.cn

Received: Mar. 1<sup>st</sup>, 2017; accepted: Mar. 15<sup>th</sup>, 2017; published: Mar. 21<sup>st</sup>, 2017

---

## Abstract

In this paper, the kinetic characteristics of a specific axisymmetric rotator's gliding in the air with different initial conditions under the influence of the Magnus effect was deeply studied through theoretical analysis, numerical simulation and experiments. The motion equations of the rotator were built theoretically and the numerical solution was obtained. Theoretical predictions were further reproduced in experiments and the related parameters which affect the appearance of cyclotron gyration and their relationship were obtained and analyzed. Undetermined coefficients in these motion equations were fitted according to the trajectories measured in experiments. In addition, a phenomenon of cyclotron gyration was anticipated during numerical simulations.

## Keywords

Magnus Effect, Axisymmetric Rotator, Cyclotron Gyration

---

# 特定轴对称旋转体在空气中运动的马格努斯效应研究

王泽国, 刘汉琛, 关鸣悦, 林方\*

四川大学物理科学与技术学院, 四川 成都  
Email: \*linfang@scu.edu.cn

收稿日期: 2017年3月1日; 录用日期: 2017年3月15日; 发布日期: 2017年3月21日

---

## 摘要

本文研究了特定形状的轴对称旋转体以不同初始条件在滑翔过程中, 受马格努斯效应作用的运动特性。本文从理论上推导得到旋转体运动方程并进行数值求解, 进一步预判特定初始条件下旋转体将出现特

殊运动现象——“斤斗”运动，提取并分析了影响“斤斗”运动出现的参数和它们之间的相互关系。本文还从实验上进行了待定参数的测定与拟合，再现了理论预期的“斤斗”运动。

## 关键词

马格努斯效应，轴对称旋转体，“斤斗”运动

Copyright © 2017 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

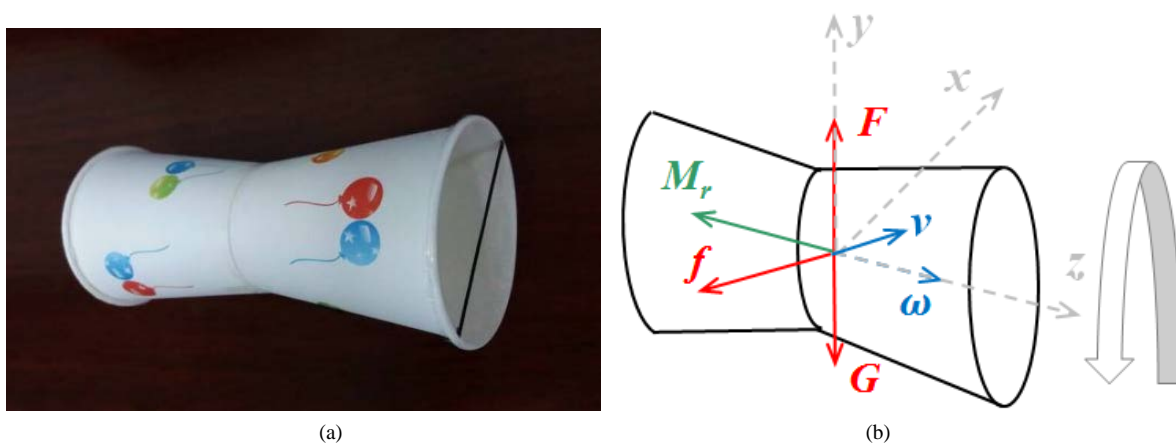


Open Access

## 1. 引言

高速旋转的物体在空气中飞行时，其运动轨迹会发生弯曲。1852年德国物理学家海因里希·马格努斯(Heinrich Magnus)首次描述了这种空气动力学效应，因此该现象被称作马格努斯效应[1]。马格努斯效应在体育运动中极为常见，比如足球的“香蕉球”、排球的侧旋球、乒乓球的弧圈球，等等；因而对这种现象的研究能够促进相关体育项目的发展，提高运动员的竞技水平[2] [3] [4] [5]。时至今日，马格努斯效应的产生机制已经得到了较为完善的解释并在球类运动中得到广泛应用。另一方面，利用马格努斯效应滞空的飞行器作为一种长期存在的设想，尽管已有模型和实验进行了探究[6] [7] [8]，但至今并未实用化，因此对其滞空原理进行研究就成为了一个很有趣并具备实用价值的课题。这一问题也出现在2014年第28届国际青年物理学家锦标赛(28<sup>th</sup> International Young Physicists' Tournament)上。现有的相关文献大多只是对马格努斯飞行器进行模型设想和定性描述，或者仅对飞行器运动方程进行推导，鲜有文献将飞行器理论运动轨迹与实验轨迹进行对比分析；尚未有文献对飞行器在运动过程中出现的“斤斗”现象进行讨论。

本文的研究对象是由两个一次性纸杯底部对底部粘接而成的特定形状轴对称旋转体，如图1(a)所示。将橡皮筋缠绕在该旋转体表面并将其发射出去，则该旋转体能够借助马格努斯效应以特定轨迹在空中滑



**Figure 1.** (a) Two disposable paper cups were glued bottom to bottom to form an axisymmetric rotator, which was the Magnus glider used in this paper; (b) Force analysis diagram of the glider, where quantities were all vectors

**图 1.** (a) 本文研究所用“马格努斯滑翔机”，系两个一次性纸杯底部粘接而成的轴对称旋转体；(b) 滑翔机受力分析图(图中标物理量均为矢量)

翔一定距离,故称之为马格努斯滑翔机(下简称滑翔机)。本文将对其滑翔机制和运动形态进行较深入的理论探讨和实验验证,主要包括:受力分析得出滑翔机的运动方程;数值计算预测其运动轨迹以及对初始条件的依赖关系;实验测定待定参数,与理论预期进行对比;再现“斤斗”运动并分析该运动出现的条件。

## 2. 理论分析

滑翔机在空中飞行期间受到了3个力和1个力矩的作用,分别为马格努斯力 $F$ 、重力 $G$ 、空气阻力 $f$ 以及空气阻力矩 $M_r$ ,如图1(b)所示。由于马格努斯力与空气阻力的方向随滑翔机运动而改变,因此本文将滑翔机的运动在正交系中分解,分解为随质心的二维平动(可进一步分解为水平方向与竖直方向的直线运动)和绕滑翔机纵向对称轴的转动。

### 2.1. 平动空气阻力

考虑到空气是一种低黏流体,且通过自由落体运动实验测算,可以认为滑翔机在飞行过程中所受平动空气阻力 $f$ 与飞行速度平方 $v^2$ 成正比,即有

$$f = \frac{1}{2} c \rho s v^2 = -m \frac{dv}{dt}, \quad (1)$$

其中 $c$ 为常数, $\rho$ 为空气密度, $s$ 为过滑翔机纵向对称轴的截面面积(即两个等腰梯形面积之和)。

### 2.2. 转动角速率

首先,已知牛顿粘性公式

$$f' = -\eta \left( \frac{dv_t}{dr} \right)_r \cdot s, \quad (2)$$

其中, $f'$ 为滑翔机受到的转动阻力, $\eta$ 为空气的粘滞系数, $v_t$ 为滑翔机运动速度切向分量的大小, $\left( \frac{dv}{dr} \right)_r$ 为半径为 $r$ 处的切向速度梯度, $s$ 为滑翔机表面积。

引入一个近似模型来估算滑翔机角速度大小的变化情况。假设所用纸杯的平均半径为 $r_c$ ,由式(2)可求得滑翔机所受到的转动阻力矩大小为

$$M = -\eta \left( \frac{dv}{dr} \right)_r \cdot 4\pi L r_c \cdot r_c, \quad (3)$$

方向与角速度方向相反。进一步,通过计算可得滑翔机的转动惯量为

$$I = \sigma \pi r_c^4 + 4\sigma \pi L r_c^3, \quad (4)$$

其中, $\sigma$ 为纸杯的面密度, $L$ 为纸杯高度。综上,由 $M = I \frac{d\omega}{dt}$ ,可得滑翔机角速率随时间变化率为

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{-\eta \left( \frac{dv}{dr} \right)_r \cdot L}{\sigma r_c \left( \frac{1}{4} r_c + L \right)}. \quad (5)$$

下面对 $\left( \frac{dv}{dr} \right)_r$ 的数量级进行估算,以进一步化简公式,并得到可供实验参考的参数。用差分近似微分,可得

$$\left(\frac{dv}{dr}\right)_{r_c} = \frac{\omega(r_c + \Delta r - r_c)}{\Delta r} = \omega, \quad (6)$$

代入式(5)并做积分可得

$$\omega = \omega_0 \exp\left[-\frac{\eta L}{\sigma r_c \left(\frac{1}{4}r_c + L\right)}t\right], \quad (7)$$

其中， $\omega_0$ 为初始角速度， $L$ 为纸杯高度。

经测量，实验所用纸杯质量为 6.6 g，高度为 7.2 cm，纸杯底面直径为 5.0 cm，开口直径为 6.8 cm， $r_c$ 取为底面直径与开口直径的均值；空气粘滞系数取 $1.82 \times 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ 。将以上数值换算为国际单位制并代入到式(7)进行计算化简，可得滑翔机转动角速率随时间变化关系为

$$\omega = \omega_0 \exp[-1.76 \times 10^{-3}t], \quad (8)$$

其中常数量纲为 $[\text{T}^{-1}]$ 。实验中测得滑翔机滞空时间不超过 10 s，由式(8)可知，滑翔机在整个滑翔过程中角速率变化量与初始值之比小于 2%。综上可得一个重要结论，即针对本文所研究的系统，可以认为在滞空期间，滑翔机转动角速度大小保持初始值不变，据此本文在后续计算中忽略滑翔机飞行过程中转动角速度大小的变化。

### 2.3. 马格努斯力

在滑翔机垂直于对称纵轴方向上取任一截面，如图 2 所示。当滑翔机旋转时，由于粘性效应，其表面附面层气流将随之运动，流速大小可表示为 $u = Ar\omega$ ，其中  $A$  是与滑翔机表面性质、内摩擦、粘滞性有关的常数，取值范围 $[0,1]$ 。

用  $v$  表示滑翔机质心平动速度， $u$  表示滑翔机表面转动切向线速度(即表面附面层气流切向流速)，由图 3 中所示的几何关系可得，滑翔机横截面某直径与表面圆周交点  $a$ 、 $b$  处的合速度分别为

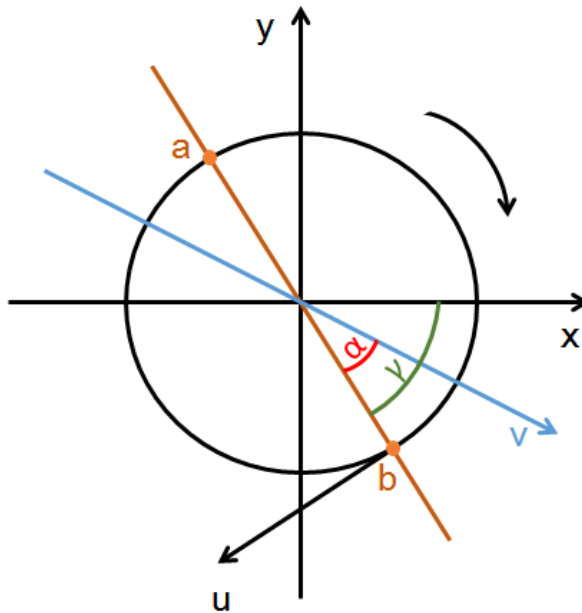


Figure 2. Cross section perpendicular to the longitudinal symmetry axis of the glider

图 2. 滑翔机垂直于对称纵轴的横截面图

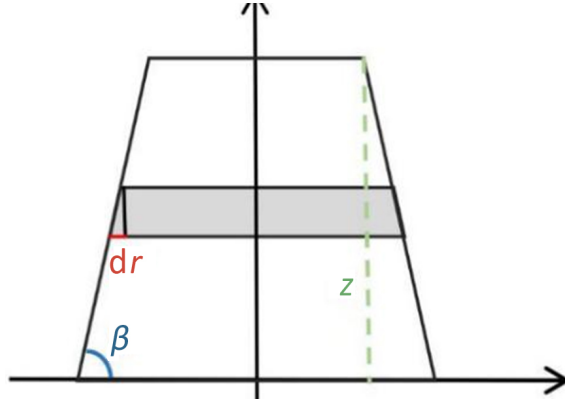


Figure 3. Cross section along the longitudinal symmetry axis of the glider

图 3. 组成滑翔机的单个纸杯沿对称轴的纵剖面图

$$v_a^2 = v^2 + u^2 - 2vu \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = v^2 + u^2 + 2vu \sin \alpha, \quad (9)$$

$$v_b^2 = v^2 + u^2 - 2vu \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = v^2 + u^2 - 2vu \sin \alpha.$$

设  $a, b$  两点的压强差为  $\Delta p$ ，由伯努利方程可得

$$\Delta p = p_b - p_a = \frac{1}{2}\rho v_a^2 - \frac{1}{2}\rho v_b^2 + \rho g(h_a - h_b) = 2\rho Ar\omega v \sin \alpha + 2\rho gr \sin \gamma, \quad (10)$$

其中， $h_a, h_b$  分别为  $a, b$  点离地面的高度， $r$  为所取截面半径。由图 3 得  $r = r_0 - \frac{z}{\tan \beta}$  ( $r_0$  为纸杯的最大半径)，

则  $\frac{dr}{\cos \beta} = -\frac{dz}{\sin \beta}$ ；同时注意到  $dF = \Delta p ds$ ，将力的微分  $dF$  对面积  $s$  进行积分可得

$$F = \int_{r_{\min}}^{r_0} \int_0^{\pi} \Delta p ds = \int_{r_{\min}}^{r_0} \int_0^{\pi} \Delta p r dy \frac{dr}{\cos \beta} = \int_0^{z_0} \int_0^{\pi} \Delta p r dy \frac{dz}{\sin \beta}, \quad (11)$$

即单位线元所受马格努斯力。由于  $a, b$  两点对称，因此积分范围为  $[0, \pi]$ 。将  $F$  分别在  $x$  轴和  $y$  轴投影，可得

$$F_x = \int_0^{z_0} \int_0^{\pi} \Delta p \cos \gamma ds = \int_0^{z_0} -\rho Ar^2 \omega v_y \pi \frac{dz}{\sin \beta}, \quad (12)$$

$$F_y = \int_0^{z_0} \int_0^{\pi} \Delta p \sin \gamma ds = \int_0^{z_0} \left( \rho Ar^2 \omega v_x \pi + \rho g r^2 \pi \right) \frac{dz}{\sin \beta}.$$

其中， $v_x, v_y$  分别为滑翔机飞行速度的水平分量和竖直分量。由于组成滑翔机的两个纸杯对称，则可对滑翔机一侧(即一个纸杯)进行受力分析，其所受马格努斯力的  $x$  轴分量和  $y$  轴分量分别为

$$F_x = \int_0^{z_0} -\rho A \omega v_y \pi \left( r_0 - \frac{z}{\tan \beta} \right)^2 \frac{dz}{\sin \beta} = -\rho A \omega v_y \pi z_0 \csc \beta \left( r_0^2 - \frac{r_0 z_0}{\tan \beta} + \frac{z_0^2}{3 \tan^2 \beta} \right) = -k_2 A \omega v_y,$$

$$F_y = \int_0^{z_0} \rho A \omega v_x \pi \left( r_0 - \frac{z}{\tan \beta} \right)^2 \frac{dz}{\sin \beta} + \int_0^{z_0} \rho g \pi \left( r_0 - \frac{z}{\tan \beta} \right)^2 \frac{dz}{\sin \beta} \quad (13)$$

$$= \rho A \omega v_x \pi z_0 \csc \beta \left( r_0^2 - \frac{r_0 z_0}{\tan \beta} + \frac{z_0^2}{3 \tan^2 \beta} \right) + \rho g \pi z_0 \csc \beta \left( r_0^2 - \frac{r_0 z_0}{\tan \beta} + \frac{z_0^2}{3 \tan^2 \beta} \right) = k_2 (A \omega v_x + g).$$

其中,  $k_2 = \rho\pi z_0 \csc\beta \left( r_0^2 - \frac{r_0 z_0}{\tan\beta} + \frac{z_0^2}{3\tan^2\beta} \right)$ ,  $z_0$  为纸杯高度。

## 2.4. 滑翔机运动方程

综上, 可到滑翔机的运动方程

$$\begin{aligned} f_x + F_x &= m \frac{dv_x}{dt} \\ F_y - mg + f_y &= m \frac{dv_y}{dt} \end{aligned} \quad (14)$$

其中,  $f_x = -\frac{1}{2}c\rho sv_x \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ , 为平动空气阻力的水平分量;  $f_y = -\frac{1}{2}c\rho sv_y \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ , 为平动空气阻力的竖直分量。由于该方程组没有解析解, 下面将采用数学软件 Matlab®编程求数值解, 并将数值模拟结果与同参数同初始条件下的实验结果做比较。

相比于现有文献, 本文理论分析在以下几个方面有所创新。首先, 本文讨论了滑翔机在空气中运动时角速度的变化并得出了滑翔机在滞空期间其角速度的变化可以忽略的结论; 其次, 在受力分析中考虑了滑翔机自身重力的影响使得最终拟合结果更加精确; 最后, 待定参数  $A$  根据实验结果拟合确定(详见下文), 比现有文献[2] [6]直接假定  $A$  的取值更为合理。

## 3. 数值模拟、参数测定与实验对比

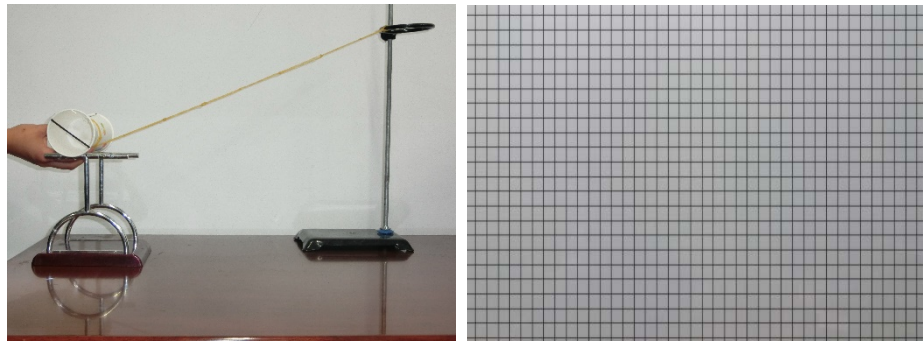
实验采用高速摄像机拍摄滑翔机的运动过程(摄影机已经通过砖墙测试以保证所用焦段没有镜头畸变)。将滑翔机两端开口用保鲜膜绷紧封住, 在滑翔机正对摄影机的圆形侧面上用记号笔标出一条直径, 以此作为滑翔机旋转角测量参考线。实验中, 利用投影仪将直角坐标投影到墙上(如图 4 所示), 测得每一个投影坐标网格的边长为 4.875 cm。以橡皮筋完全脱离滑翔机瞬间为初始时刻, 该时刻滑翔机所在位置为坐标原点, 侧面参考线与水平直线夹角为初始旋转角。实验中先后用 480 fps、240 fps、120 fps 等不同帧数的摄影模式进行拍摄, 发现在 480 fps 模式下, 参考线最为清晰, 故采用此模式。将拍摄所得滑翔机空中运动视频导入图像处理软件 Photoshop®进行逐帧处理, 选取相邻的易于读取旋转角的画面进行读数, 通过像素点与坐标网格长度的关系可计算得到滑翔机当前时刻的坐标, 通过参考线可读取滑翔机当前时刻的旋转角; 将坐标和旋转角对两帧画面之间的时间间隔进行差分即可求得相应时刻的平动速率和转动角速率。

实验还对式(1)中的待定参数  $c$  进行了测定, 并对式(10)中的待定参数  $A$  进行拟合。 $c$  可通过滑翔机自由落体运动测得。实验中将滑翔机从一定高度无初速度释放并标记滑翔机下落高度为 1 m 的位置, 对其整个下落过程进行拍摄, 通过视频得到滑翔机下落 1 m 所用时间, 代入运动方程

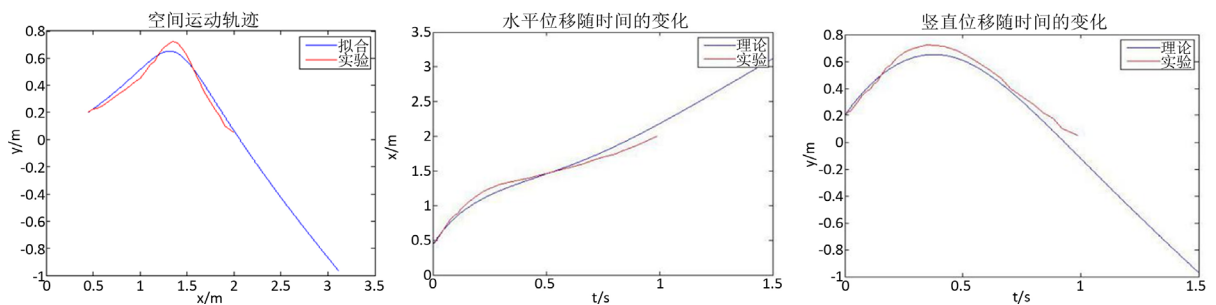
$$m \frac{d^2s}{dt^2} = mg - \frac{1}{2}c\rho s \frac{ds}{dt} \quad (15)$$

可解得  $c = 2.37$ 。参数  $A$  则可采用拟合法来获得。将实验测得的初始值代入(14)式,  $A$  从 0 到 1 以 0.01 为间隔取值, 在 Matlab®中利用四阶龙格库塔法编程计算得出滑翔机的理论运动轨迹, 与相同初始条件的实验运动轨迹进行比较, 通过两条曲线的拟合程度来确定  $A$  的最终取值。结果显示, 当  $A = 0.35$  时, 两条曲线拟合度最好, 如图 5(a)所示。为了验证所得  $A$  值是否正确, 图 5(b)和(c)分别显示了相同参数值下水平位移与竖直位移随时间变化的实验和数值结果对比, 从图中可以看出, 实验与数值计算结果拟合得很好。

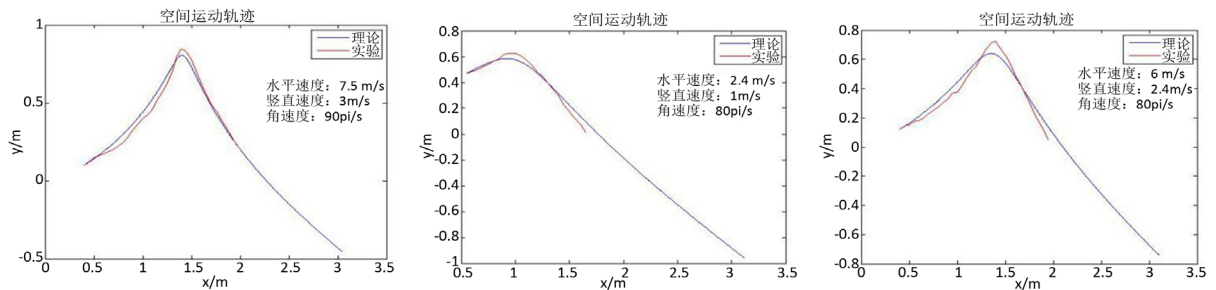
利用同一个滑翔机进行三组实验, 通过改变橡皮筋缠绕圈数、松紧程度以及发射角度来改变初始条件。将实验结果与数值模拟结果(待定参数取值  $c = 2.37$ ,  $A = 0.35$ )进行对比, 如图 6 所示。可以看出, 实验与数值结果符合得很好, 有效地证明了理论分析和待定参数测定的正确性。



**Figure 4.** The glider launching device in experiments and the projected coordinate grid used to measure the coordinates and velocities of the glider  
**图 4.** 实验中的滑翔机发射装置图以及用于测量滑翔机运动坐标和速度的投影坐标网格



**Figure 5.** Determination of parameter  $A$  by fitting data. The initial coordinates were (0.45 m, 0.2 m); the initial horizontal and vertical velocity were respectively 5.2m/s and 2.5m/s; the initial angular velocity was  $480/7$  rad/s  
**图 5.** 用拟合法确定参数  $A$ 。实验中初始坐标为(0.45, 0.2)，单位：m，初始水平速度与竖直速度分别为 5.2 和 2.5，单位：m/s。初始角速度为  $480/7$ ，单位：rad/s



**Figure 6.** Comparison of experimental and numerical results under different initial conditions. Initial condition parameters were shown in each figure  
**图 6.** 不同初始条件下实验结果和数值模拟结果对比。初始条件参数如图注所示

#### 4. 滑翔机“斤斗”运动分析

数值模拟结果显示，在一定条件下，滑翔机会进行“斤斗”运动，即滑翔机的运动轨迹会出现回环。由式(13)可知，在忽略重力的情况下，马格努斯力的方向与速度方向垂直。数值计算可以验证重力项对马格努斯力的影响极小，数值小于速度项的 5%，由此可认为马格努斯力的方向与速度方向垂直。马格努斯力使得速度方向朝该力的方向转动，速度方向的转动进而引起马格努斯力的同向转动，可类比洛伦兹力对点电荷的作用。如图 1(b)所示，如果沿  $-z$  方向观察，可以发现马格努斯力与速度将同时逆时针旋转并保持相互垂直状态，因而一定条件下速度的水平分量会出现负值，即出现“斤斗”现象。改变实验的初始条件上可得到理论上预期的轨迹，如图 7 所示。

“斤斗”运动的出现与  $A$  的取值、初始时刻速度竖直分量与水平分量的比值以及角速率三个因素有关。 $A$  的取值与滑翔机的表面性质以及粘滞性有关，对于同一滑翔机以及同样的实验环境，可以认为是不变量。下面从改变初始时刻竖直速度与水平速度的比值以及初始角速率两个方面进行分析。通过控制变量法分别改变速度比值和角速率，利用 Matlab<sup>®</sup> 数值计算不同初始条件下水平速度的变化，如图 8 所示

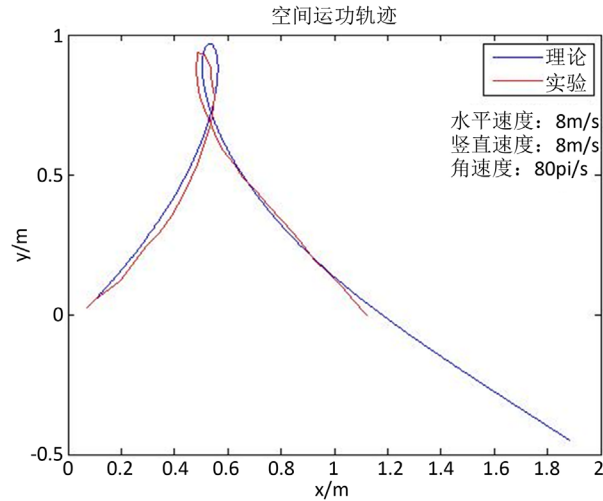


Figure 7. Comparison of experimental and numerical results about the cyclotron gyration of glider. Initial condition parameters were shown in figure

图 7. 滑翔机出现“斤斗”运动的实验和理论对比。实验初始条件参数如图注所示

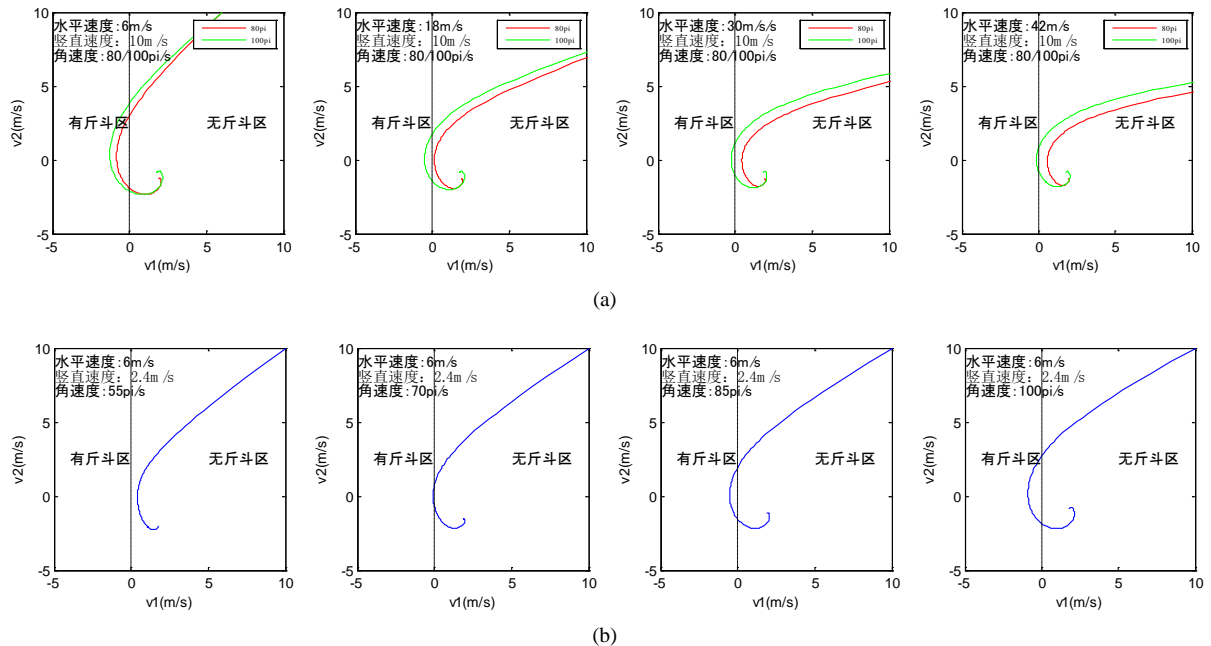


Figure 8. The conditions under which the cyclotron gyration would occur. (a) Vertical speed and angular speed of glider were maintained, and horizontal velocity increased; (b) Horizontal velocity and vertical velocity were maintained, and angular velocity increased. ( $v_1$  meant horizontal velocity, and  $v_2$  represented vertical velocity.)

图 8. “斤斗”运动出现条件研究。(a) 竖直速度与角速度保持不变，水平速度由小到大变化；(b) 水平速度与竖直速度保持不变，角速度由小到大变化。(v1 表示水平速度，v2 表示竖直速度)



示。当水平速度出现小于 0 的情况时，滑翔机即出现“斤斗”运动。

在图 8(a)中，水平速度由 6 m/s 变化到 42 m/s，水平速度与竖直速度的比值逐渐增大，可以看出滑翔机运动状态由“有斤斗区”向“无斤斗区”逐渐过渡，且角速度越大过渡周期越长。在 8(b)中，角速度由  $55 \pi/s$  变化到  $100 \pi/s$ ，可以看出，随着角速度的增大，滑翔机运动状态由“无斤斗区”向“有斤斗区”逐渐过渡。

由上述分析可得以下结论：1) 角速度大小、初始竖直速度与水平速度之比均与是否出现“斤斗”运动相关，在一个量保持不变的情况下，总可以通过改变另一个量来达到出现“斤斗”的效果；2) 在角速度增大的情况下，“斤斗”运动出现所需的竖直速度与水平速度的比值阈值减小；3) 在角速度不变的情况下，竖直速度与水平速度的比值越大越容易出现“斤斗”运动。

## 5. 总结

本文对马格努斯滑翔机进行了动力学分析，得到含待定参数  $c$  和  $A$  的运动方程，通过实验测定了待定参数  $c$ ，以数值模拟与实验对比拟合的方法确定了参数  $A$ ，并验证了理论分析的正确性；此外，本文还对滑翔机出现“斤斗”运动的条件进行了较为深入的分析。本文较为完整地研究了某一特定形状轴对称旋转体在空气中运动的马格努斯力效应问题，从理论推导、数值模拟和实验角度进行了较为完整的分析，得到了互相一致的结论。

## 参考文献 (References)

- [1] Swanson, W.M. (1961) The Magnus Effect: A Summary of Investigations to Date. *Journal of Basic Engineering*, **83**, 461-470. <https://doi.org/10.1115/1.3659004>
- [2] 潘慧炬. 马格努斯效应的力学模型[J]. 浙江体育科学, 1995, 17(3): 16-19.
- [3] 李丰. 香蕉球的运动分析及方程推导[J]. 硅谷, 2013(1): 174.
- [4] Hong, S., Nobori, R., Sakamoto, K., Koido, M., Nakayama, M. and Asai, T. (2016) Experiment of Aerodynamic Force on a Rotating Soccer Ball. *Procedia Engineering*, **147**, 56-61.
- [5] Guzman, C. (2016) The Magnus Effect and the American Football. *Sports Engineering*, **19**, 13-20. <https://doi.org/10.1007/s12283-015-0184-4>
- [6] Barkla, H.M. and Auchterlonie, L.J. (1971) The Magnus or Robins Effect on Rotating Spheres. *Journal of Fluid Mechanics*, **47**, 437-447. <https://doi.org/10.1017/S0022112071001150>
- [7] 吴海娜. 马格努斯滑翔机运动的探索与研究[J]. 大学物理实验, 2015, 28(5): 4-6.
- [8] 冀炜, 王景文, 王晨. 马格努斯滑翔机在不同旋转方向下的运动成因[J]. 科技风, 2016(9): 13-14.

**期刊投稿者将享受如下服务：**

1. 投稿前咨询服务 (QQ、微信、邮箱皆可)
2. 为您匹配最合适的期刊
3. 24 小时以内解答您的所有疑问
4. 友好的在线投稿界面
5. 专业的同行评审
6. 知网检索
7. 全网络覆盖式推广您的研究

投稿请点击：<http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱：[ijm@hanspub.org](mailto:ijm@hanspub.org)