Modern Physics 现代物理, 2019, 9(1), 19-22
Published Online January 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/mp
https://doi.org/10.12677/mp.2019.91003

Hans汉斯

The Correlation Criterion of Quantum Entanglement

Guangrong Liu

Department of Foundations, Air Force Engineering University, Xi'an Shaanxi
Email: fclgr@163.com

Received: Dec. 12th, 2018; accepted: Dec. 27th, 2018; published: Jan. 2nd, 2019

Abstract

The separability judgment of quantum states is the basic problem of quantum entanglement theory. In this paper, based on Schmidt decomposition of two-body pure states, the correlation criteria of matrix rank and vector group are given. For the two-body mixed state, a sufficient and unnecessary condition for separability is given, and an example is given.

Keywords

Quantum Entanglement, Quantum State, Composite System

量子纠缠的相关性判据

刘光荣

空军工程大学基础部，陕西 西安
Email: fclgr@163.com

收稿日期：2018年12月12日；录用日期：2018年12月27日；发布日期：2019年1月2日

摘 要

量子态可分性判断是量子纠缠理论的基本问题。本文根据两体纯态的*Schmidt*分解，给出了矩阵的秩，向量组的相关性判据。对于两体混合态，给出了可分的一个充分非必要条件，并举例说明。

关键词

量子纠缠，量子态，复合系统

文章引用：刘光荣. 量子纠缠的相关性判据[J]. 现代物理, 2019, 9(1): 19-22.
DOI: 10.12677/mp.2019.91003

1. 引言

量子纠缠在量子力学的基础理论中占据了重要的位置，并且在量子信息的应用中也是不可或缺的资源[1] [2] [3]。量子态可分性判断[4] [5]是量子纠缠理论的基本问题，量子纯态对应于相应的 Hilbert 空间的一个单位向量，量子混合态对应于作用于 Hilbert 空间中迹为 1 的正算子，其表现形式为密度矩阵，对于复合的量子系统，遇到的问题是量子态是否可分的问题，常用的方法有所谓的 PPT (Partial Positive Transposition)判据，矩阵重排判据(realignment criterion)，约化密度矩阵判据(reduced density matrixcriterion)，CCN 判据(Computable Cross Norm)等。

2. 量子纯态与复合系统

任意一个孤立的物理系统，与该系统的状态空间 H 相联系。H 为规定了复内积的可分的 Hilbert 空间，该系统完全由单位化的状态向量来表示。量子比特(qubit)与二维状态空间 H^2 相对应，H^2 取标准正交基 $|0\rangle$，$|1\rangle$，则任一状态向量 $|\varphi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$，其中 $\alpha,\beta \in C$ 且 $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$。H 中的单位向量也称为量子纯态[1]，对应于秩为 1 的密度矩阵 $\rho = |\varphi\rangle\langle\varphi|$。

给定若干个量子系统，通过张量积运算，形成复合系统。$H_A \otimes H_B$ 表示复合系统 AB，若取 H_A 的一组标准正交基记为 $|i\rangle, i = 1,2,\cdots,m$，取 H_B 的一组标准正交基记为 $|j\rangle, j = 1,2,\cdots,n$，则 $|\varphi\rangle_{AB} \in H_A \otimes H_B$ 表示为：

$$|\varphi\rangle_{AB} = \sum_i \sum_j m_{ij} |i\rangle\langle j|$$

记矩阵 $M = (m_{ij})_{m\times n}$，并将其按行按列分块得 $M = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n) = (\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)^{\mathrm{T}}$。其行向量对应于子系统 H_A 的向量，列向量对应于子系统 H_B 的向量。

定理 1 [1] Schmidt 分解定理：

在 Hilbert 空间 $H_A \otimes H_B$ 的两体复合系统 AB 中的任何一个纯态 $|\varphi\rangle_{AB}$，一定可以在子系统 A,B 中找到标准正交基 $|i\rangle_A |j\rangle_B$ 使得 $|\varphi\rangle_{AB} = \sum_i \lambda_i |i\rangle_A |j\rangle_B$，其中 $\lambda_i \ge 0$，$\sum_i \lambda_i^2 = 1$，λ_i 为矩阵 M 的奇异值，成为 Schmidt 系数，λ_i 非零的个数称为 Schmidt 秩。

3. 量子纯态纠缠

对于 $|\varphi\rangle_{AB} \in H_A \otimes H_B$ 若存在 $|\varphi\rangle_A \in H_A$，$|\varphi\rangle_B \in H_B$ 使得 $|\varphi\rangle_{AB} = |\varphi\rangle_A |\varphi\rangle_B$，则称量子纯态 $|\varphi\rangle_{AB}$ 是可分的，否则上纠缠的。

结合 Schmidt 分解定理，可以得到如下的结论：

定理 2 若 $|\varphi\rangle_{AB}$ 的 Schmidt 秩为 1，则 $|\varphi\rangle_{AB}$ 是可分纯态，否则为纠缠纯态。

由初等变换不改变矩阵的秩，在矩阵 M 的奇异值分解中，酉矩阵可以写成若干个初等矩阵之积，进一步可以得到：

推论 1 若矩阵 M 的秩为 1，则 $|\varphi\rangle_{AB}$ 是可分纯态，否则为纠缠纯态。

推论 2 矩阵 M 中，分块得到的列向量组 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 或行向量组 $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)$ 中得任意两个向量是线性相关的，$|\varphi\rangle_{AB}$ 是可分纯态，否则为纠缠纯态。

另一方面，对于密度矩阵 $\rho=|\varphi\rangle\langle\varphi|$，此时秩 $\rho=1$，所以：

$$\rho=|\varphi\rangle\langle\varphi|=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$$

推论 3 若向量组 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 中的两两线性相关时，且非零列向量 ξ_i 对应的矩阵 M 的秩为 1，则 ρ 是可分纯态，否则为纠缠纯态。

4. 量子混合态纠缠

假设一个量子系综中有系列的纯态 $|\varphi_i\rangle$ 且每个纯态对应的概率是 p_i $(p_i\ge 0)$，则它的密度矩阵为[1]

$$\rho=\sum_i p_i|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$$

其中 $tr\rho=\sum_i p_i=1$，当非零 p_i 的个数大于 1 时，ρ 是混合态，否则为纯态，即秩 $\rho=1$ 时为纯态。秩 $\rho>1$ 为混合态。另一方面，量子态为作用于 H 上的迹为 1 的正算子，其密度矩阵为迹为 1 的半正定矩阵，进一步可以证明 ρ 为 Hermidt 矩阵，其谱分解为 $\rho=\sum_i p_i|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$，$p_i$ 为 ρ 的特征值，$|\varphi_i\rangle$ 为对应于特征值 p_i 的特征向量。

对于复合系统 AB 的密度矩阵 ρ_{AB}，如果能写成 $\rho_{AB}=\sum_k p_k\rho_A^k\otimes\rho_B^k$，其中 $\sum_k p_k=1$，那么称 ρ_{AB} 是可分的离态，秩 $\rho>1$ 为可分离混合态，否则为纠缠态。可以看出对于 $\rho=\sum_i p_i|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$，每一个 $|\varphi_i\rangle$ 都是可分离纯态时，ρ_{AB} 是可分离态，但是，$|\varphi_i\rangle$ 有纠缠态时，则难以判断。例如 $|\varphi_i\rangle$ 为四个 bell 态，$\frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle\pm|00\rangle)$，$\frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle\pm|01\rangle)$，此时

$$|\varphi_1\rangle\langle\varphi_1|=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&0&1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&1\end{pmatrix};$$

$$|\varphi_2\rangle\langle\varphi_2|=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&0&-1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\-1&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$|\varphi_3\rangle\langle\varphi_3|=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&1&0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix};$$

$$|\varphi_4\rangle\langle\varphi_4|=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&-1&0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&-1&0\\0&-1&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}。$$

进一步计算得到

$$\rho_{AB}=\sum_i\frac{1}{4}|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|=\frac{1}{2}I_2\otimes\frac{1}{2}I_2。$$

量子纠缠是量子物理与经典物理的重要区别之一，1989 年，Werner 给出了量子纠缠严格的数学定义，本文结合矩阵理论的相关知识，对于两体复合系统的量子纠缠的探测性方法，给出了秩与相关性的判据，并举例说明。

参考文献

[1] Michael, A., Chuang, N.I.L., 赵千川. 量子计算与量子信息[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.

[2] Johnston, N., Kribs, D.W. and Teng, C.W. (2009) Operator Algebraic Formulation of the Stabilizer Formalism for Quantum Error Correction. *Acta Applicandae Mathematicae*, **108**, 687-696. https://doi.org/10.1007/s10440-008-9421-1

[3] Kribs, D.W., Laflamme, R., Poulin, D. and Lesosky, M. (2006) Operator Quantum Error Correction. *Quantum Information and Computation*, **6**, 382-399.

[4] 张成杰. 量子纠缠的判定与度量[D]: [博士学位论文]. 合肥: 中国科学技术大学, 2010.

[5] 郑玉鳞. 量子纠缠与量子导引的判据研究[D]: [博士学位论文]. 合肥: 中国科学技术大学, 2016.