

Exploration and Analysis of the Cusp Magnetic Bottle

—New Magnetic Confinement Device with Configurations as Magnetic Trap

Shuqin Tian

Qiandian Station of Shenyang Railway, Fushun Liaoning
Email: tsq234@21cn.com

Received: Jan. 4th, 2016; accepted: Jan. 26th, 2016; published: Jan. 29th, 2016

Copyright © 2016 by author and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

Abstract

The cusp magnetic bottle is a magnetic confinement device constituted by magnets on each vertex of the regular polyhedron. The internal magnetic field configuration is an ideal magnetic trap with the bottom magnetic induction intensity of zero, which could reach up to the limit value defined by the trap depth. The changing curve of magnetic induction intensity has indicated that, the magnetic induction intensity difference for cusp magnetic bottle of regular dodecahedron is over 20 times greater than that for softball seal coil of same volume and that the cusp magnetic bottle has a larger space to expand. The constraint theory of plasma by the cusp magnetic bottle is to rely on the magnetic trap and magnetic confinement theory indicates that, only magnetic trap configuration can truly achieve the stable confinement of plasma. Tokamak or magnetic mirror is to rely on the adhesion of particles of electricity on magnetic line of force. However, it has all kinds of macroscopic and microcosmic instabilities from both theoretically and practically. These instabilities would no long exist in the cusp magnetic bottle. From the constitution of cusp magnetic bottle, the materials, operation, structure, flexibility, expansibility and other aspects all indicate that the cusp magnetic bottle is far superior to traditional magnetic confinement devices.

Keywords

Cusp Magnetic Bottle, Magnetic Trap, Cusp Field, Magnetic Confinement

会切磁瓶探析

—磁场位形为磁阱的新型磁约束装置

田树勤

沈阳铁路局沈阳车务段前甸火车站，辽宁 抚顺

Email: tsq234@21cn.com

收稿日期：2016年1月4日；录用日期：2016年1月26日；发布日期：2016年1月29日

摘要

会切磁瓶是由布置在正多面体各顶点的磁体，构成的磁约束装置。其内部的磁场位形，是底部磁感应强度为零的理想磁阱，已达到了阱深定义的极限值。磁感应强度变化曲线显示，在相同容积下，正12面体会切磁瓶的磁感应强度落差，是全球缝线圈的磁感应强度落差的20多倍，且会切磁瓶还有着极大的可扩展性。会切磁瓶对等离子体的约束原理是依靠磁阱，磁约束理论表明，只有磁阱位形磁场，才能真正做到等离子体的稳定约束。而Tokamak或磁镜，是依靠磁力线对电粒子的粘连，理论和实践都表明，其存在着各种宏观和微观不稳定性。而在会切磁瓶中，这些不稳定性都将不复存在。从会切磁瓶的构成看，无论是材料、运行、扩展性等方面，会切磁瓶都有着传统磁约束装置不可比拟优势。

关键词

会切磁瓶，磁阱，会切场，磁约束

1. 引言

石油、煤等化石能源的日渐枯竭和其所带来的环境污染，严重危及着人类未来的发展与生存。目前认为，实现可控核聚变，是最终解决该危机的唯一选择。实际上，它的重大意义远不止此，它可使得世界各国为更多掌控有限的石油资源而引发的战争隐患，不复存在；它可为全人类的和平统一，提供可靠的物质保障；从而为人类制造具备完整生物链的巨大飞船，以牺牲几代甚至几十代人的时间代价，走向广袤的宇宙深空，提供巨大的财力和动力保障。

实现可控核聚变的关键，就是对等离子体的稳定约束。磁约束可控核聚变经历了几十年的发展历史，形成目前的开端系统和闭合系统两大类聚变装置。随着各种新技术的应用，新困难和新解决办法不断提出[1]-[3]，但从实验至工业应用的整个进程看，几十年来并没有实质上的突破性进展，仍停滞在实验探索阶段。究其原因，等离子体的长期稳定约束，仍是制约整个聚变工程的最大瓶颈，这也是长期以来，国际聚变界追求的目标和挑战极大的前沿课题。

磁约束的理论基础是电粒子绕磁力线的回旋运动，如同电粒子粘连在磁力线上，从而达到约束等离子体的目的。但理论和实验都表明，磁场中的等离子体会由强场区推向弱场区(漂移和槽纹不稳定性皆源于此理)。其实均匀磁场(如螺线管)中的等离子体，也会在其内部压强作用下，形成横越磁力线的扩散[4]。这也是各种磁约束实验装置，能量增益始终小于1的一个根本原因[5]。可见，强磁场或闭合磁力线，只能起到延缓等离子体扩散速度的作用，并不能达到等离子体的长期稳定约束。

理论表明，理想的磁约束位形，既不是单纯的追求高强度磁场，也不是追求闭合磁力线，而是使磁场与等离子体之间有一个明确的分界面，即等离子体中没有磁场，磁场中也没有等离子体，从而形成指向等离子体内部的磁压力，使等离子体保持稳定的压强。目前的主流观点认为，这样的理想磁场位形在自然界和实验室中不可能严格形成[4]。

磁阱是中心弱而周围强的磁场位形，理论表明，只要能够建立起具有一定容积、且深度足够的大磁

阱，再依据等离子的排磁性，上述理想的磁约束位形是可以实现的。可见，磁约束装置的关键，并不是寄期望于磁力线对电粒子的粘连，而是大磁阱位形的建立。目前深度最大的磁阱 - 阴阳线圈，因容积小而只能用做磁镜的端塞，不能安置聚变堆。所以说，设计和制造这种大磁阱的磁约束装置，是对现存磁约束装置的一次变革，也是实现可控核聚变的最可行方案。

2. 磁场位形回顾

2.1. 传统的磁约束装置

对于闭合系统的代表 Tokamak 装置，虽然采取了各种措施，如螺旋结构磁场位形等，但其内强外弱(指靠近和远离圆环中心)的磁场位形是不能改变的，漂移和气球模不稳定性总体上依然存在。目前最先进的超导 Tokamak 装置实验，其等离子体约束时间仍处于秒数量级。可见，无论理论和实验，依靠闭合磁力线对等离子体进行稳定约束，是不能成立的。

开端系统的代表磁镜，其等离子体压强主要是靠其排磁性维持，电粒子将会在其压强作用下，产生横越磁力线的扩散，所以也不能长期维持稳定性。约飞磁场是单导线电流磁场形成的极小 B 磁场位形，即磁阱，由于导线电流极限的存在(含超导体)，理论上难以做到大的磁阱深度，其只能对温等离子体的槽纹不稳定性起到抑制或改善作用[4]，其实验效果还不如 Tokamak 装置。

场反向位形，是依靠旋转等离子体来获得与外磁场方向相反的闭合磁场。因其磁阱位形及阱深较大(比较传统磁阱)而被普遍看好，被喻为磁约束装置的理想候选方案。但修正后的相对论指出，等离子体电流的箍缩效应(就是由等离子体电流形成的磁阱，所产生的作用效果)，并不能增加等离子体的内部压力[6]，即不能对聚变反应起到促进作用，再加上实验中的反场形成时间很短，技术复杂，实验效果更不理想[7]。

可控核聚变的几十年发展过程中，科学技术发生了换代式的进步。近些年，新崛起的中国，采用了当今最为先进的技术，几乎重复了早前国际上已做过的各种类型的磁约束实验，也未能取实质上的进展。由此可见，目前的磁约束聚变装置只是尽量延长等离子体的约束时间，皆属于准稳态装置。能做到长期稳定约束等离子体的，既不是依靠电粒子对磁力线的粘连，也不是依靠等离子体自身电流形成的磁阱，而是依靠独立于等离子体的外部装置所产生的磁阱[4]，这已为理论和实验所共识。

2.2. 会切场位形

将两个线圈中的电流互相反向，便得到最简单的会切场的位形，其磁力线分布如图 1，等离子体处于这种磁场位形中是稳定的。但一般认为，带电粒子将从会切面和线圈的两端逃出系统，所以不能充分约束高温等离子体[7]。基于这种原因，目前极少有人对这种磁场位形进行深入研究。但上述结论只是针对两个磁极的简单会切场，更多磁极的复杂会切场则未见到过理论和实验上的报导。

阱深被定义为 $(U_0 - U_a)/U_0$ ，其中比容 U 具有 $1/B$ 的平均的意义[4]，则阱深可整理为 $1 - B_0/B_a$ 。由于图 1 中心 O 处(磁阱底部)的 $B_0 = 0$ ，可知会切场的阱深始终为 1，是阱深的最大极限值。说明阱深这一物理量，并不能表现会切场对等离子体的约束能力。磁阱边界上最弱的磁感应强度(在磁场的会切处)与磁阱底部的磁感应强度之差-磁阱落差 $B_a - B_0$ ，才是更好体现磁阱深度大小或对等离子体约束能力的物理量。

无论约飞线圈还是全球缝线圈，抑或是阴阳线圈(近似两个全球缝线圈的组合，是目前镜比最大的装置)，其磁场位形都存在对称分布的伸出磁约束装置的会切面(参看图 4)，且与图 1 会切面的形成原理完全相同。实验表明，其确可很好地抑制磁镜咽喉区的电粒子逸出[4]。也就是说，只要磁阱落差足够大，电粒子在会切处的逃逸问题是完全可以被抑制的。磁场会切面与电粒子的逃逸，不存在直接的因果关系。

3. 大磁阱落差的磁场位形建立

3.1. 会切磁瓶的理论基础

数学上已证明，球壳内各处的引力场均为零[8]。就是说，与距离平方成反比的质点引力场强，在球壳内叠加后为零。而偶极子场在空间任意点的场强与距离立方成反比，则多个磁体的磁偶极子场在球壳内叠加后(同性磁极皆指向球壳中心)，必形成磁阱。这为大体积、大磁阱落差的磁场位形建立，提供了坚实的理论依据。

将图 1 中的线圈换成永磁体，其会切场位形的形成原理不变。将若干磁矩相同的磁体均匀同向地布置在球壳上，准确说是布置在正多面体(共 5 种，4, 6, 8, 12, 20)的各个顶点上，则构成了多磁极会切场装置(会切磁瓶)。在整个球壳内，将形成多处会切面和会切线，如图 2 中的磁力线会切。由正多面体空间分布的对称性可知，会切面处于正多面体各棱的中垂面上，其法向磁感应强度因相互抵消而为零，会切线处于正多面体各面的中心垂线上，其垂面上的磁感应强度亦为零。正多面体中心或外接圆的圆心，其磁感应强度为零。

根据场叠加原理，可以证明，在会切磁瓶中心 O 的等距离处，如图 2，会切部位的磁场是最弱的，且会切线上的磁感应强度弱于会切面，中心 O 至磁极连线(磁矩线)上的磁场最强。所以只要计算出磁矩线和会切线上的磁感应强度 B 沿径向的变化规律，而不必考虑切向或其它处 B 的大小，就可判断出会切磁瓶内磁场的分布规律。从而避开了极复杂的、需要计算机才能计算的磁阱磁场[4]。

3.2. 会切线和磁矩线上的磁感应强度分布规律

由于正多面体的对称性，使得正多面体内的磁矩线和会切线径向的磁感应强度计算变得简单了许多。应用场叠加原理，便可绘制出磁矩线和会切线上的磁感应强度 B 随半径 r 的 $B-r$ 变化曲线，由此便可得到会切磁瓶的磁阱落差。

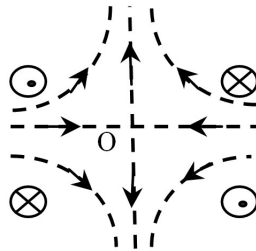


Figure 1. Cusped field configuration
图 1. 会切场位形

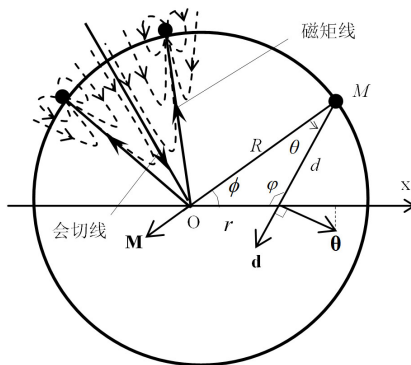


Figure 2. Cusped magnetic force line and solution of the magnetic strength
图 2. 会切磁力线及磁感应强度求解

磁矩为 M 的磁体，在空间任意点产生的磁感应强度为：

$$B(d) \approx \frac{\mu_0 M}{4\pi d^3} (2 \cos \theta \mathbf{d} + \sin \theta \boldsymbol{\theta}) \quad (1)$$

式(1)中： \mathbf{d} 、 $\boldsymbol{\theta}$ 为单位矢量， θ 为 \mathbf{d} 与 \mathbf{M} 两矢量(见图 2)间的夹角。

由式(2)得，图 2 中磁体 M 的磁场沿任一径向(图中为 x 轴向)的磁感应强度为(因切向磁场约束能力大于径向磁场，且忽略)：

$$B(d) \approx \frac{\mu_0 M}{4\pi d^3} (2 \cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi) \quad (2)$$

利用三角形的边、角关系，式(2)整理为(见附录)：

$$B(d) \approx \frac{\mu_0 M}{4\pi} \left[\frac{3rR \sin^2 \phi}{(R^2 + r^2 - 2rR \cos \phi)^{\frac{5}{2}}} - \frac{2 \cos \phi}{(R^2 + r^2 - 2rR \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} \right] \quad (3)$$

$$= \frac{\mu_0 M}{4\pi R^3} \left[\frac{3 \frac{r}{R} \sin^2 \phi}{\left(1 + \frac{r^2}{R^2} - \frac{2r}{R} \cos \phi\right)^{\frac{5}{2}}} - \frac{2 \cos \phi}{\left(1 + \frac{r^2}{R^2} - \frac{2r}{R} \cos \phi\right)^{\frac{3}{2}}} \right]$$

将磁体布置在正多面体的各顶点上，根据场叠加原理和式(3)，再结合各种正多面体的各部位之间所对应的顶角 ϕ (或称极角)，则可绘制出磁矩线和会切线上的 $B-r$ 变化曲线。

图 3 为五种正多面体的 $B-r$ 变化曲线(由于运算量大，曲线的绘制采用计算机编程)，其中虚线为各种多面体磁矩线上的 $B-r$ 变化曲线，各曲线大致重合(曲线最陡的是正 12 面体)。实线 S4、S6、S8、S12、S20 分别对应正 4、6、8、12、20 多面体会切线上的 $B-r$ 变化曲线。可见，磁矩线上的 B 与会切线上的 B 方向相反(参见图 2)，磁阱落差随正多面体的顶点数增加而增加(正 8 面体除外)，正 12 面体(顶点数 20，为最多)会切磁瓶的磁阱落差最大。

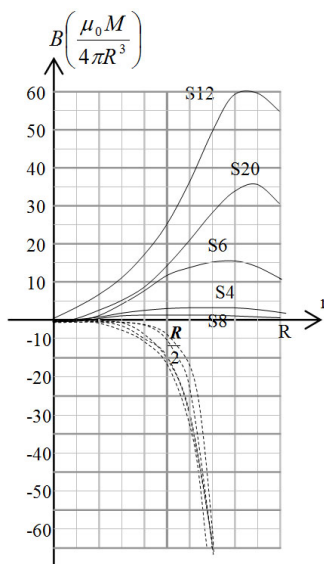


Figure 3. $B-r$ changing curve in cusp magnetic bottle

图 3. 会切磁瓶内的 $B-r$ 变化曲线

4. 会切磁瓶与传统磁约束装置的比较

4.1. 会切磁瓶与垒球缝线圈的比较

垒球缝线圈相当于 4 个磁体分别放置在正 4 面体的各顶点上, 如图 4。与正 4 面体会切磁瓶的区别是, 会切磁瓶指向中心 O 的磁极都是相同的, 而垒球缝线圈则是两个 S 磁极和两个 N 磁极指向中心 O, 如图 4 中线圈电流形成的磁极指向。伸出线圈的会切面垂直于两同性磁极间的棱, 棱中垂线(x 轴)上的 $B-r$ 变化曲线如图 5 中曲线 S (纵坐标为图 3 放大)。可见:

1) 在磁矩 M 和容积相同的情况下, 垒球缝线圈的磁阱落差小于正 4 面体(图 3 中 S4)会切磁瓶, 较正 12 面体(图 3 中 S12)会切磁瓶的磁阱落差相差近 20 倍之多。

2) 垒球缝线圈中的磁场存在两个磁感应强度 $B = 0$ 的点(在 $\pm R/2$ 处), 即存在两个反向的磁阱, 如图 4。阴阳线圈近似两个垒球缝线圈的组合, 有些类似于 6 面体(8 个顶点), 其磁阱落差的增加也是很有限的。还有约飞磁场, 其磁阱落差更逊于由其演变而来的垒球缝线圈。

4.2. 磁力线方程与场叠加原理

目前的磁约束理论基础, 基本上是在磁力线方程的基础上, 主要研究磁力线管的空间变化性质。对于由多磁力线管构成的会切场位形, 该理论已不能完全胜任。理由为:

1) 约飞磁场是在普通磁镜基础上, 叠加 n 极导线电流磁场产生的。以磁力线方程为基础的表达式表明[4], 极导线越多, 磁阱越深。但实验结果却表明, 四极场能产生比六极场更深的磁阱[9]。

2) 以磁力线方程为算法的计算机程序, 不能表现出垒球缝线圈的双磁阱结构。

3) 在会切磁瓶中, 会切线和会切面上的磁感应强度变化, 几乎无法用磁力线方程表述。

结合前文对会切磁瓶的论述, 说明对于会切场的研究, 必须使用理论上更为基础的场叠加原理。

5. 会切磁瓶的进一步分析

5.1. 会切磁瓶内等离子体的稳定性

抑制和控制 MHD (磁流体力学)不稳定性, 一直是磁约束聚变领域急待解决的问题[10] [11]。虽然磁阱实验在这方面是没有不成功的[9], 但由于标准磁镜的磁阱落差小, 其只能适用于等离子体温度不高时, 即温等离子体。并不是说只要存在磁阱, MHD 不稳定性就可完全消除了。

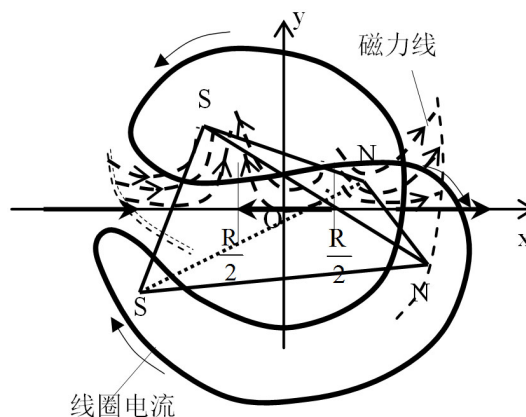


Figure 4. Magnetic field distribution in softball seal coil

图 4. 垒球缝线圈内的磁场分布

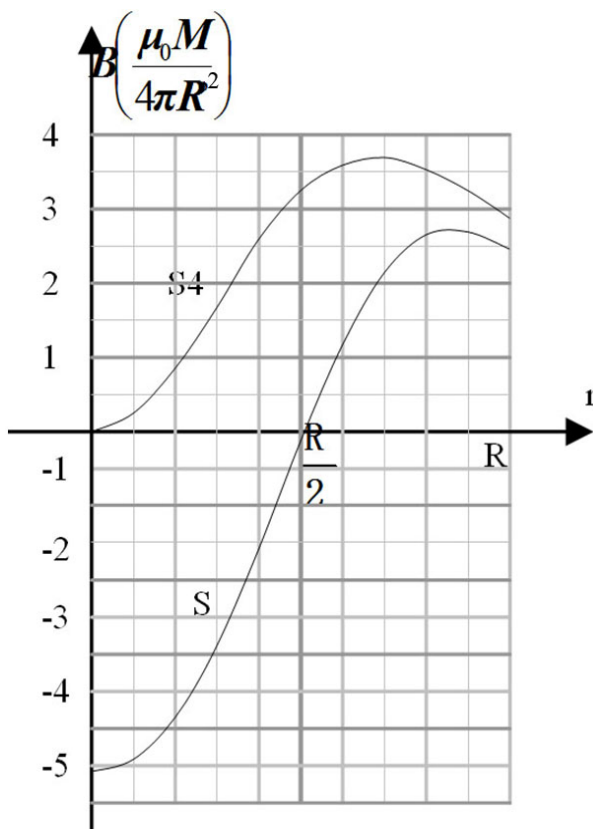


Figure 5. $B-r$ changing curve (S) in softball seal coil
图 5. 垒球缝线圈内的 $B-r$ 变化曲线 S

微观不稳定性的产生原因多种多样，种类繁多，但基本上是由于磁场的分布不均，捕获电粒子的速度分布偏离麦克斯韦分布，通过波和粒子之间的相互作用而激发。在引起宏观不稳定性的同时，都有可能产生各种模式的微观不稳定性。要针对性地分别解决这些不稳定性，将是个极复杂、也是极难实现技术问题。

由于在会切磁瓶内，磁力线曲率皆为好或正曲率，且曲率很大(见图 2)，电粒子极易被捕获。等离子体的电粒子在正曲率磁场的作用下，不断地被挤向中心，从而将磁力线向外排挤，最终使等离子体内不再存在磁场，等离子体的排磁性得以充分发挥，等离子体的电粒子速率分布完全符合麦克斯韦分布，即自然分布。可见，会切磁瓶在约束等离子体的过程中，是向着理想的磁场位形接近的。被约束的等离子体，不应存在目前所发现的各种不稳定性，这必将大大降低磁约束装置的技术难度和复杂性。

5.2. 会切磁瓶的进一步调整

在正多面体上建立起的会切磁瓶，其磁场分布绝对的对称。但各部位对等离子体的约束能力，并不均匀，尤其是会切线，磁场最弱，且平直，是等离子体约束的最薄弱部位。为了进一步提高磁约束效率，在实际应用中，需要改变会切线或会切面的这种平直特性。

由图 2 可判断出，若使组成会切磁瓶的各个磁体在外接球壳上均匀偏转某一角度(使磁矩线偏离中心)，则会切线或会切面将会变得弯曲，如此便可更大效率约束等离子体，使 β 值更加接近稳定约束的极限值 1。

其实，根据微观粒子的波动性本质，即使电粒子在初始时，平行于会切线向外运动，也会形成绕磁

力线的旋转，并在内弱外强的磁场作用下使电粒子返回。等离子体容易从磁镜两端的逃逸，是因为磁镜 z 轴上磁阱落差很小，而在磁镜两端安置全球缝或阴阳线圈后，磁阱落差加大，这才是抑制等离子体逃逸的根本原因或绝热不变量的形成原因。

一般 Tokamak β 值(远小于 1)和磁镜的 β 值(可达 2)，都是在非稳态情况下所测得的暂稳态值或峰值，应是由等离子体的排磁性形成，与会切磁瓶的稳态 β 值几乎没有可比性。

由于磁场的计算极其复杂，具体调整细节还需在实践中摸索。

5.3. 会切磁瓶的扩展

由于正多面体只有 5 种，或许满足不了未来聚变发电规模的需求。在正多面体各面、棱的中心再添加磁体，则根据场叠加原理，可获得更大的磁阱落差(可适当调整至中心的距离，或者使磁体极性反向)。还可以采用正五边形和正六边形构建的不完全正 32 面体(60 个顶点)的会切磁瓶，如足球或 C60 分子结构。可见，会切磁瓶的扩展空间极大，且技术难度的增加却很小。

由场叠加原理和图 3 可知，会切磁瓶的磁阱落差随着磁体数量的增加而增加。所以会切磁瓶完全可以舍弃超导线圈，而采用永磁体(目前永磁体 B 可高达 2T)进行构建，这将会大大降低聚变装置的建设和运行成本。可见，会切磁瓶是种极具潜力磁约束装置。

5.4. 会切磁瓶中的聚变堆包层第一壁

聚变装置面临的另一难题，就是聚变堆包层第一壁的材料选择，目前几乎没有理想的解决思路。由于会切磁瓶可稳定约束等离子体，不存在等离子体和器壁的隔离问题，所以可采用液体材料做为反应堆的第一壁。

采用液态金属做为第一壁，不但可大大减轻中子对反应室壁的破坏，还可将各种光辐射最大限度地反射回聚变堆，以保持聚变堆温度，从而降低聚变堆的初期加热功率。这也是实现会切磁瓶与环流器组合的前提(用环流器加热聚变堆，可实现温度的精确控制[6])，也可将环流器设计成燃料添加和废料排放的接口。

6. 总结

通过对传统磁约束装置的回顾，指出这些装置的可行性非常渺茫。由此提出了构建可稳定约束等离子体的全新磁约束装置 - 会切磁瓶。

会切磁瓶是多磁体磁约束装置，是由磁场的多处会切而形成的大型磁阱。对等离子体的约束原理，不同于传统的依靠电粒子对磁力线的粘连，而是靠正曲率磁力线将电粒子推向磁阱底部，而达到等离子体的长期稳定约束。

由于中心磁感应强度为零的会切场位形，其镜比、阱深已达极限值，这样的物理量已不宜继续使用。所以文中采用了更能表现磁阱约束能力的物理量-磁阱落差，进行各种磁阱的对比。其结果是，会切磁瓶的磁阱落差远远大于其它传统装置。

由于被会切磁瓶约束的等离子体内部几乎不存在磁场，理论上稳态 β 值接近极限 1，目前所认识到的各种宏观和微观上的不稳定性将不复存在。单从会切磁瓶的构成看，无论其材料、运行、结构、灵活性，扩展性等方面，会切磁瓶也都远优于传统的磁约束装置。

会切磁瓶突破了传统磁约束装置框架，初次提出便已显示出了它的巨大优越性。在今后的不断完善过程中，虽然不可避免地会遇到些新问题，但随着理论的深入和实践探索，会切磁瓶必会改变目前聚变界的现状，为早日实现聚变能的工业应用目标，发挥出巨大作用。

参考文献 (References)

- [1] Travers, J.M., Aumeunier, M.H., Joanny, M., *et al.* (2013) Imaging Challenges for ITER Plasma-Facing Component Protection. *Fusion Science and Technology*, **64**, 735-740.
- [2] Wang, W.X., Ethier, S., Ren, Y., *et al.* (2015) Distinct Turbulence Sources and Confinement Features in the Spherical Tokamak Plasma Regime. *Nuclear Fusion*, **55**, 122001. <http://dx.doi.org/10.1088/0029-5515/55/12/122001>
- [3] 沈勇, 董家齐, 石中兵, 等. 基于谱估计方法的等离子体湍流三波耦合数据处理算法[J]. 核聚变与等离子体物理, 2015, 35(3): 193-197.
- [4] 朱士尧. 核聚变原理[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1992.
- [5] Hurricane, O.A., Callahan, D.A., Casey, D.T., *et al.* (2014) Fuel Gain Exceeding Unity in an Inertially Confined Fusion Implosion. *Nature*, **506**, 343-348. <http://dx.doi.org/10.1038/nature13008>
- [6] 田树勤, 陈传华. 核聚变理论再探及聚变堆的自持燃烧[J]. 核科学与技术, 2015, 3(2): 29-35.
- [7] 石秉仁. 磁约束聚变: 原理与实践[M]. 北京: 原子能出版社, 1999.
- [8] 田树勤. 黑洞理论重探及宇宙模型重建[J]. 现代物理, 2014, 4(3): 37-49
- [9] (美)爱德华·泰勒, 著. 胥兵, 等, 译. 聚变, 第一卷·磁约束(上册) [M]. 北京: 原子能出版社, 1987.
- [10] 蒋海斌, 赵康, 何志雄, 等. HL-2A 装置中高能量捕获电子鱼骨模不稳定性研究[J]. 核聚变与等离子体物理, 2015, 35(1): 8-13
- [11] Xiao, J.S., Yang, Z.J., Zhuang, G., *et al.* (2014) Plasma Response to Supersonic Molecular Beam Injection in J-TEXT. *Plasma Science and Technology*, **16**, 17-20. <http://dx.doi.org/10.1088/1009-0630/16/1/04>

附录

正文中式(2)为:

$$B(d) \approx \frac{\mu_0 M}{4\pi d^3} (2 \cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi) \quad (\text{A})$$

式(A)中(参看图 2):

$$\begin{aligned} 2 \cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi &= 3 \cos \theta \cos \varphi - (\cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi) \\ &= 3 \cos \theta \cos \varphi - \cos(\theta + \varphi) \\ &= 3 \cos \theta \cos \varphi - \cos(180 - \phi) \\ &= 3 \cos \theta \cos \varphi + \cos \phi \end{aligned} \quad (\text{B})$$

由余弦定理得:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{d^2 + R^2 - r^2}{2Rd} = \frac{R^2 + r^2 - 2rR \cos \phi + R^2 - r^2}{2Rd} = \frac{R - r \cos \phi}{d} \\ \cos \varphi &= \frac{d^2 + r^2 - R^2}{2rd} = \frac{R^2 + r^2 - 2rR \cos \phi + r^2 - R^2}{2Rd} = \frac{r - R \cos \phi}{d} \end{aligned}$$

则:

$$\begin{aligned} \cos \theta \cos \varphi &= \frac{(R - r \cos \phi)(r - R \cos \phi)}{d^2} = \frac{Rr + rR \cos^2 \phi - R^2 \cos \phi - r^2 \cos \phi}{d^2} \\ &= \frac{Rr - rR \cos^2 \phi - \cos \phi (R^2 + r^2 - 2rR \cos \phi)}{d^2} \\ &= \frac{rR(1 - \cos^2 \phi) - d^2 \cos \phi}{d^2} = \frac{rR \sin^2 \phi}{d^2} - \cos \phi \end{aligned} \quad (\text{C})$$

将式 (C)代入式(B), 得:

$$3 \cos \theta \cos \varphi + \cos \phi = \frac{3rR \sin^2 \phi}{d^2} - 2 \cos \phi$$

即:

$$2 \cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi = \frac{3rR \sin^2 \phi}{d^2} - 2 \cos \phi \quad (\text{D})$$

将式(D)代入式(A), 则式(A)整理为

$$\begin{aligned} B(d) &= \frac{\mu_0 M}{4\pi d^3} \left(\frac{3rR \sin^2 \phi}{d^2} - 2 \cos \phi \right) = \frac{\mu_0 M}{4\pi} \left[\frac{3rR \sin^2 \phi}{(R^2 + r^2 - 2rR \cos \phi)^{\frac{5}{2}}} - \frac{2 \cos \phi}{(R^2 + r^2 - 2rR \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} \right] \\ &= \frac{\mu_0 M}{4\pi R^3} \left[\frac{3 \frac{r}{R} \sin^2 \phi}{\left(1 + \frac{r^2}{R^2} - \frac{2r}{R} \cos \phi\right)^{\frac{5}{2}}} - \frac{2 \cos \phi}{\left(1 + \frac{r^2}{R^2} - \frac{2r}{R} \cos \phi\right)^{\frac{3}{2}}} \right] \end{aligned} \quad (\text{E})$$