Pure Mathematics 理论数学, 2012, 2, 169-176
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2012.24027 Published Online October 2012 (http://www.hanspub.org/journal/pm.html)

Strong Consistency of Wavelet Estimation in a Semiparametric Regression Model under PA Sequence Errors*

Jia Li[1], Yongming Li[2#]

[1]Department of Mathematics, Nanchang University, Nanchang
[2]Department of Mathematics, Shangrao Normal University, Shangrao
Email: shanghaojiashupian@163.com, [#]lym1019@163.com

Received: Aug. 6th, 2012; revised: Aug. 21st, 2012; accepted: Sep. 6th, 2012

Abstract: Consider a semiparametric regression model with PA sequence errors. In this paper, we study the strong consistency of the wavelet estimators for parameter component β and non-parameter component $g(t)$ under suitable conditions.

Keywords: Semiparametric Regression Model; Wavelet Estimation; PA Sequences; Strong Consistency

PA 误差下的半参数回归模型小波估计的强相合性*

李　佳[1]，李永明[2#]

[1]南昌大学理学院，南昌
[2]上饶师范学院数学系，上饶
Email: shanghaojiashupian@163.com, [#]lym1019@163.com

收稿日期：2012 年 8 月 6 日；修回日期：2012 年 8 月 21 日；录用日期：2012 年 9 月 6 日

摘　要：本文讨论了误差为正相协(PA)序列的半参数回归模型，在适当的条件下，利用小波估计方法研究了参数分量 β 和非参数分量 $g(t)$ 的小波估计量的强相合性。

关键词：半参数回归模型；小波估计；PA 序列；强相合

1. 引言

由于在不少实际问题中，半参数回归模型更接近于真实，因而引起了广泛的注意，并取得了相当深入的研究结果。用小波核估计研究半参数回归模型，已经得到了一系列研究成果，见文献[1-8]。本文考虑半参数回归模型

$$y_i^{(n)} = X_i^{(n)T}\beta + g\left(t_i^{(n)}\right) + \varepsilon_i^{(n)}, 1 \le i \le n, \tag{1.1}$$

其中 $\beta \in R^d$ 为未知参数，$g(t)$ 为[0, 1]上的未知 Borel 函数，$X_i^{(n)}$ 为 R^d 上的随机设计，$\left\{t_i^{(n)}\right\}$ 为[0, 1]上的常数序列，随机误差 $\left\{\varepsilon_i^{(n)}, i \le n\right\}$ 为 PA 序列。采用文献[2]的假定：

$$x_{ir}^{(n)} = f_r\left(t_i^{(n)}\right) + \eta_{ir}^{(n)}, 1 \le i \le n, 1 \le r \le d, \tag{1.2}$$

*基金项目：国家自然科学基金项目资助(11061029)。
#通讯作者。

其中 $f_r(\cdot)$ 为定义在[0, 1]上的未知函数，且 $\overline{\eta}_i^{(n)}=\left(\eta_{i1}^{(n)},\eta_{i2}^{(n)},\cdots,\eta_{id}^{(n)}\right)^T$ 独立同分布，又 $\left\{\eta_{ir}^{(n)}\right\}$ 与 $\left\{\varepsilon_i^{(n)}\right\}$ 相互独立及 $E\overline{\eta}_i^{(n)}=0,\ \mathrm{Var}\overline{\eta}_i^{(n)}=\boldsymbol{V}$，其中 $\boldsymbol{V}=\left(V_{ij}\right)$ 为 d 阶正定矩阵，$j=1,2,\cdots,d$。我们将采用小波核估计方法研究上述模型中误差为 PA 序列时的参数及非参数小波估计量的强相合性。

下面先介绍 β 和 $g(t)$ 的估计。设有一个给定的刻度函数 $\phi(x)\in S_l$ (阶为 l 的 Schwartz 空间)，相伴 $L^2(R)$ 的多尺度分析为 $\{V_m\}$，其再生核为

$$E_m(t,s)=2^m E_0\left(2^m t,2^m s\right)=2^m\sum_{k\in Z}\phi\left(2^m t-k\right)\phi\left(2^m s-k\right),$$

其中 Z 为整数。记 $A_i=\left[s_{i-1},s_i\right]$ 是[0, 1]上的分割且 $t_i\in A_i,\ 1\le i\le n$，先假定 β 已知，定义 $g(\cdot)$ 的估计为

$$\hat{g}_0(t,\beta)=\sum_{i=1}^n\left(y_i^{(n)}-X_i^{(n)T}\beta\right)\int_{A_i}E_m(t,s)\mathrm{d}s,$$

求解极值问 $\min\limits_{\beta}\left\{\sum_{i=1}^n\left(y_i^{(n)}-X_i^{(n)T}\beta-\hat{g}_0\left(t_i^{(n)},\beta\right)\right)^2\right\}$，记其解 $\hat{\beta}_n$，然后定义 $g(\cdot)$ 的线性小波估计为：

$$\hat{g}_n(t)=\hat{g}_0\left(t,\hat{\beta}_n\right)=\sum_{i=1}^n\left(y_i^{(n)}-X_i^{(n)T}\hat{\beta}_n\right)\int_{A_i}E_m(t,s)\mathrm{d}s; \tag{1.3}$$

令 $X=\left(X_{ir}^{(n)}\right)_{n\times d}$, $Y=\left(y_1^{(n)},\cdots,y_n^{(n)}\right)^T$, $\varepsilon=\left(\varepsilon_1^{(n)},\cdots,\varepsilon_n^{(n)}\right)^T$, $g=\left(g\left(t_1^{(n)}\right),\cdots,g\left(t_n^{(n)}\right)\right)^T$,
$S=\left(S_{ij}\right)_{n\times n}$, $S_{ij}=\int_{A_j}E_m\left(t_i^{(n)},s\right)\mathrm{d}s,\ \tilde{X}=(I-S)X,\ \tilde{Y}=(I-S)Y$, 则易得

$$\hat{\beta}_n=\left(\tilde{X}^T\tilde{X}\right)^{-1}\tilde{X}^T\tilde{Y},\hat{g}_n=S\left(Y-X\hat{\beta}_n\right),$$

其中 $\hat{g}_n=\left(\hat{g}(t_1),\cdots,\hat{g}(t_n)\right)$ 为 g 的估计。再令

$$\tau_m=\begin{cases}2^{-m\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)},\dfrac{1}{2}<\alpha<\dfrac{3}{2}\\ \dfrac{\sqrt{m}}{2^m},\alpha=\dfrac{3}{2}\\ 2^{-m},\alpha>\dfrac{3}{2}\end{cases},$$

协方差结构为 $\mu(n)=\sum_{j=n}^{\infty}\mathrm{cov}\left(\varepsilon_1^{(n)},\varepsilon_{j+1}^{(n)}\right)$。

下面我们给出本文的基本假设和主要引理：

(A1) $g(\cdot),\ f_r(\cdot)\in H^{\alpha}$ (阶为 α 的 Sobolev 空间)，$\alpha>\dfrac{1}{2},\ 1\le r\le d$；

(A2) $g(\cdot),\ f_r(\cdot)$ 满足 γ 阶 Lipschitz 条件，$\gamma>0,1\le r\le d$；

(A3) $\phi(\cdot)\in S_l$ (阶为 l 的 Schwartz 空间，$(l\ge\alpha)$，ϕ 满足 1 阶 Lipschitz 条件且具有紧支撑，当 $\xi\to 0$ 时，$\left|\hat{\phi}(\xi)-1\right|=O(\xi)$，其中 $\hat{\phi}$ 为 ϕ 的 Fourier 变换。

(A4) $\max\limits_{1\le i\le n}\left(s_i-s_{i-1}\right)=O\left(n^{-1}\right)$，且 $2^m=O\left(n^{1-\mu}\right)$。其中 $\mu\in\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{r},1\right),r>2$。

引理 1.1[7] 若条件(A3)成立，则有

(i) $\left|E_0(t,s)\right|\le\dfrac{C_k}{\left(1+|t-s|^k\right)},\ \left|E_m(t,s)\right|\le\dfrac{2^m C_k}{\left(1+2^m|t-s|^k\right)}$ ($k\in N,C_k$ 是只与 k 有关的实数)；

(ii) $\sup_{0\le s\le 1}\left|E_m(t,s)\right| = O\left(2^m\right)$；

(iii) $\sup_{0\le t\le 1}\int_0^1\left|E_m(t,s)\right|\mathrm{d}s \le C$。

引理 1.2[9] 设 $\{T_n, n\ge 1\}$ 为随机序列，且 $\sum_{n=1}^{\infty} E\left|T_n\right|^q < \infty\left(q>0\right)$，则 $T_n \to 0\ \ a.s.,\ n\to\infty$。

引理 1.3[10] 设 $\left\{\xi_j; j\ge 1\right\}$ 是平稳 PA 随机变量序列，具有零均值和有限二阶矩，$\sup_{j\ge 1} E\left(\xi_j^2\right)<\infty$，对某个 $r>2,\ \delta>0,\ \sup_{j\ge 1} E\left|\xi_j\right|^{r+\delta}<\infty,\ \mu(n) = O\left(n^{-\frac{(r-2)(r+\delta)}{2\delta}}\right)$，其中 $\mu(n) = \sum_{j=n}^{\infty}\operatorname{cov}\left(\xi_1, \xi_{j+1}\right)$。又设 $\left\{a_j, j\in N\right\}$ 是一实数列，$a := \sup\left|a_j\right| < \infty$，则 $E\left|\sum_{j=1}^{n} a_j\xi_j\right|^r \le Ca^r n^{\frac{r}{2}}$。

引理 1.4 设 $\left\{\varepsilon_i^{(n)}, i\ge 1\right\}$ 是 PA 序列。$\sup_i E\left|\varepsilon_i^{(n)}\right|^q < \infty\left(q>2\right)$，且设 $\exists\mu\in\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{q}, 1\right)$，使 $\sup_i\int_{A_i}\left|E_m(t,s)\right|\mathrm{d}s = O\left(n^{-\mu}\right)$。则有 $\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^{(n)}\int_{A_i}E_m(t,s)\mathrm{d}s \to 0\ \ a.s., n\to\infty$。

证明 当 $q>2$ 时，由引理 1.3 得

$$E\left|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^{(n)}\int_{A_i}E_m(t,s)\mathrm{d}s\right|^q \le C\left(\sup_i\int_{A_i}E_m(t,s)\mathrm{d}s\right)^q n^{\frac{q}{2}} \le Cn^{-\mu q}n^{\frac{q}{2}} = Cn^{\left(\frac{1}{2}-\mu\right)q}$$

从而 $\sum_{n=1}^{\infty}E\left|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^{(n)}\int_{A_i}E_m(t,s)\mathrm{d}s\right|^q < \infty$，故由引理 1.2 即证得结果。

引理 1.5[11] 设 $\left\{X_i, i\ge 1\right\}$ 是概率空间 (Ω, ϑ, P) 上随机序列，若 $\exists p\in(0,1]$ 使 $\sum_{n=1}^{\infty}E\left|X_n\right|^p < \infty$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}X_n a.s.$ 收敛。

2. 主要结果及证明

本节中 C 表示任意常数，即使在同一式子中也可能不同。

定理 2.1 若条件(A1)-(A4)成立，$\left\{\varepsilon_i^{(n)}, i\ge 1\right\}$ 具有零均值和有限二阶矩的 PA 序列，且 $\sup E\left|\varepsilon_i^{(n)}\right|^q < \infty\ (q>2),\ E\left|\eta_{1j}\right|^{\frac{3}{2}+\delta} < \infty\ (\delta>0, j=1,2,\cdots,d)$，$\mu(n) = O\left(n^{-\frac{(r-2)(r+\delta)}{2\delta}}\right)$，其中 $r>2$，设 $\exists\mu\in\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{q}, 1\right)$，使 $\sup_i\int_{A_i}\left|E_m(t,s)\right|\mathrm{d}s = O\left(n^{-\mu}\right)$，则 $\hat{\beta}_n \to \beta\ \ a.s., n\to\infty$。

定理 2.2 在定理 2.1 的条件下，有 $\hat{g}_n(t) \to g(t)\ \ a.s., n\to\infty$。

注 2.1 由于自 Esary Proschan 和 Walk 于 1967 年在文献[12]中提出 PA 序列相依性概念以来，已有许多学者对 PA 序列的极限性质，如中心极限定理，强大数律及完全收敛性等，以及在密度估计、分布函数估计和非参数回归函数估计的大样本性质进行了一定的研究，这里就不一一用文献列出。但在 PA 相依样本下研究半参数回归模型中小波估计量的统计估计问题比较少见。而 PA 相依概念在可靠性理论、渗透理论和多元统计分析等等重要领域中有广泛的应用，因此本文讨论误差为 PA 序列的半参数回归模型估计的强相合性是有意义的。

注 2.2 文献[6]研究了误差为鞅差序列情形下小波估计的强相合性，本文在误差为正相伴(PA)序列的情形研究了小波估计的强相合性。正相伴(PA)与鞅差随机变量序列都是非独立随机变量的重要情形。由于本文对误差序列矩条件的要求与文献[6]是相同的。但由于正相协(PA)序列与鞅差序列的相依结构有本质的差异，因此我们的定理条件中增加了对误差序列的协方差结构的要求，且证明方法和所用的主要引理与文献[6]是有一定差别的，

所以本文的结果不仅仅是文献[6]的结果在 PA 序列下的一般性推广，而且具有本质的差异性。

定理 2.1 的证明 令 $\tilde{\varepsilon}=(I-S)\varepsilon,\tilde{g}=(I-S)g$，则

$$\hat{\beta}_n-\beta=\left(n^{-1}\tilde{X}^T\tilde{X}\right)^{-1}\left(n^{-1}\tilde{X}^T\tilde{g}+n^{-1}\tilde{X}^T\tilde{\varepsilon}\right). \tag{2.1}$$

首先证明 $n^{-1}\tilde{X}^T\tilde{X}$ 的第 (i,j) 元素

$$\frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n}\tilde{X}_{hi}\tilde{X}_{hj}\to V_{ij}\quad a.s.,n\to\infty. \tag{2.2}$$

事实上，由于 $f_r(\cdot)$ 满足 γ 阶 Lipschitz 条件，故

$$\sup_i\left|\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{A_k}E_m(t,s)\mathrm{d}s\right)f_j(t_k)-\int_0^1E_m(t,s)f_j(s)\mathrm{d}s\right|=\sup_i\left|\sum_{k=1}^{n}\int_{A_k}E_m(t,s)\mathrm{d}s\left(f_j(t_k)-f_j(s)\right)\mathrm{d}s\right|=O\left(n^{-\gamma}\right). \tag{2.3}$$

由文献[1]中定理 3.2 的证明知

$$\sup_t\left|f_j(t)-\int_0^1E_m(t,s)f_j(s)\mathrm{d}s\right|=O(\tau_m). \tag{2.4}$$

由(2.3)，(2.4)式可得

$$\sup_i\left|f_j(t)-\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{A_k}E_m(t,s)\mathrm{d}s\right)f_j(t_k)\right|=O\left(n^{-\gamma}\right)+O(\tau_m). \tag{2.5}$$

$$\sup_i\left|g(t_i)-\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{A_k}E_m(t,s)\mathrm{d}s\right)g(t_k)\right|=O\left(n^{-\gamma}\right)+O(\tau_m). \tag{2.6}$$

又由于 $n^{-1}\tilde{X}^T\tilde{X}$ 的第 (i,j) 元素

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n}\tilde{X}_{hi}\tilde{X}_{hj}=&\frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n}\left(f_i(t_h)-\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{A_k}E_m(t_h,s)\mathrm{d}sf_i(t_k)\right)+\eta_{hi}-\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{A_k}E_m(t_h,s)\mathrm{d}s\right)\eta_{ki}\right)\\&\times\left(f_i(t_h)-\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{A_k}E_m(t_h,s)\mathrm{d}sf_i(t_k)\right)+\eta_{hj}-\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{A_k}E_m(t_h,s)\mathrm{d}s\right)\eta_{kj}\right)\\=&\frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n}\left(f_i(t_h)-\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{A_k}E_m(t_h,s)\mathrm{d}sf_i(t_k)\right)\right)\left(\eta_{hj}-\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{A_k}E_m(t_h,s)\mathrm{d}s\right)\eta_{kj}\right)\\&+\frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n}\left(f_i(t_h)-\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{A_k}E_m(t_h,s)\mathrm{d}sf_j(t_k)\right)\right)\left(\eta_{hi}-\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{A_k}E_m(t_h,s)\mathrm{d}s\right)\eta_{ki}\right)\\&+\frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n}\left(f_i(t_h)-\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{A_k}E_m(t_h,s)\mathrm{d}sf_i(t_k)\right)\right)\left(f_j(t_h)-\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{A_k}E_m(t_h,s)\mathrm{d}s\right)f_j(t_k)\right)\\&+\frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n}\left(\eta_{hi}-\sum_{k=1}^{n}\left(\left(\int_{A_k}E_m(t_h,s)\mathrm{d}s\right)\eta_{ki}\right)\right)\left(\eta_{hj}-\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{A_k}E_m(t_h,s)\mathrm{d}s\right)\eta_{kj}\right)\\=:&U_1+U_2+U_3+U_4.\end{aligned} \tag{2.7}$$

由文献[7]引理 4(i)的(2.4)式易知

$$\sup_t\left|\sum_{k=1}^{n}\eta_{kj}\int_{A_k}E_m(t,s)\mathrm{d}s\right|=o(1),\qquad a.s. \tag{2.8}$$

由(2.5)式和(2.8)式，利用强大数定理知

$$|U_1| \le \max_{1\le h\le n}\left|f_i(t_h)-\sum_{k=1}^{n}\int_{A_k}E_m(t_h,s)\mathrm{d}s f_i(t_k)\right|\times\left(\frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n}|\eta_{hj}|+\sup_h\left|\sum_{h=1}^{n}\eta_{kj}\int_{A_k}E_m(t_h,s)\mathrm{d}s\right|\right) \tag{2.9}$$

$$=O\left(n^{-\gamma}\right)+O\left(\tau_m\right).a.s.$$

$$|U_2| = O\left(n^{-\gamma}\right)+O\left(\tau_m\right).a.s. \tag{2.10}$$

由(2.5)式和(2.8)式及(1.3)式分别可得

$$U_3 = O\left(n^{-2\gamma}\right)+O\left(\tau_m^2\right).a.s. \quad |U_4| = V_{ij}+o(1). \tag{2.11}$$

由(2.7)，(2.9)~(2.11)式得 $\frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n}\tilde{X}_{hi}\tilde{X}_{hj}\to V_{ij}\quad a.s.,\quad n\to\infty$ 。即(2.2)式得证。其次证明 $n^{-1}\tilde{X}^T\tilde{g}$ 的第 i 元素

$$n^{-1}\tilde{X}_{hi}\tilde{g}_h = O(n^{-\gamma})+O\left(\tau^m\right)\to 0\ \ a.s., n\to\infty. \tag{2.12}$$

显然

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n}\tilde{X}_{hi}\tilde{g} &= \frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n}\left(X_{hi}-\sum_{k=1}^{n}S_{hk}X_{ki}\right)\left(g(t_h)-\sum_{r=1}^{n}S_{hr}g(t_r)\right)\\ &=\frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n}\left(\eta_{hi}-\sum_{k=1}^{n}S_{hk}\eta_{ki}\right)\left(g(t_h)-\sum_{r=1}^{n}S_{hr}g(t_r)\right)\\ &\quad+\frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n}\left(f_i(t_h)-\sum_{k=1}^{n}S_{hk}f(t_r)\right)\left(g(t_h)-\sum_{r=1}^{n}S_{hr}g(t_r)\right)\\ &= J_1+J_2.\end{aligned} \tag{2.13}$$

由于

$$|J_1| \le \left(\max_{1\le h\le n}\left|g(t_h)-\sum_{r=1}^{n}S_{hr}g(t_r)\right|\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n}|\eta_{hi}|+\max_{1\le h\le n}\left|\sum_{k=1}^{n}S_{hk}\eta_{ki}\right|\right), \tag{2.14}$$

所以由强大数定理及(2.8)和(2.6)式，可得

$$|J_1| = O\left(n^{-\gamma}\right)+O\left(\tau_m\right). \tag{2.15}$$

又由(2.5)和(2.6)式易得

$$J_2 = O\left(n^{-2\gamma}\right)+O\left(\tau_m^2\right). \tag{2.16}$$

故由(2.13)，(2.15)，(2.16)式即得(2.12)式成立。

最后证明

$$n^{-1}\tilde{X}^T\tilde{\varepsilon}\to 0.\ \ a.s., n\to\infty. \tag{2.17}$$

事实上(为方便起见，记 $\varepsilon_i^{(n)}=\varepsilon_i$ 以下同)， $n^{-1}\tilde{X}^T\tilde{\varepsilon}$ 的第 i 元素

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n}\tilde{X}_{hi}\tilde{\varepsilon}_h &= \frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n}\left(X_{hi}-\sum_{k=1}^{n}S_{hk}X_{ki}\right)\left(\varepsilon_h-\sum_{r=1}^{n}S_{hr}\varepsilon_r\right)\\ &=\frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n}\left(\eta_{hi}-\sum_{k=1}^{n}S_{hk}\eta_{ki}\right)\left(\varepsilon_h-\sum_{r=1}^{n}S_{hr}\varepsilon_r\right)\\ &\quad+\frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n}\left(f_i(t_h)-\sum_{k=1}^{n}S_{hk}f_i(t_k)\right)\left(\varepsilon_h-\sum_{r=1}^{n}S_{hr}\varepsilon_r\right)\\ &= T_1+T_2.\end{aligned} \tag{2.18}$$

令 $$\varepsilon_{ni}=\varepsilon_i I\left(\left|\varepsilon_i\right|\le n^{\frac{1}{q}}\right),\tilde{\eta}_{ni}=\varepsilon_i I\left(\left|\varepsilon_i\right|>n^{\frac{1}{q}}\right),\ y_{ni}=\varepsilon_{ni}-E\varepsilon_{ni},\ z_{ni}=\tilde{\eta}_{ni}-E\tilde{\eta}_{ni},$$

则 $$y_{ni}+z_{ni}=\varepsilon_{ni}-E\varepsilon_{ni}+\tilde{\eta}_{ni}-E\tilde{\eta}_{ni}=\varepsilon_i.$$

$$\begin{aligned}T_1&=\frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n}\left(\eta_{hi}-\sum_{k=1}^{n}S_{hk}\eta_{ki}\right)\varepsilon_h-\frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n}\left(\eta_{hi}-\sum_{k=1}^{n}S_{hk}\eta_{ki}\right)\left(\sum_{r=1}^{n}S_{hr}\varepsilon_r\right)\\&=:T_1^{(1)}+T_1^{(2)}.\end{aligned}\tag{2.19}$$

由定理的已知条件及(2.8)式易得

$$T_1^{(1)}\to 0\quad a.s.,\ n\to\infty.\tag{2.20}$$

由(2.8)式、引理 1.4 及大数定理易得

$$\left|T_1^{(2)}\right|\le o(1)\frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n}\left|\eta_{hi}\right|+o^2(1)\to 0\quad a.s.,\quad n\to\infty.\tag{2.21}$$

由(2.19)~(2.21)式知

$$T_1\to 0\ \ a.s.,\ n\to\infty.\tag{2.22}$$

令 $a_{hi}=f_i(t_h)-\sum_{k=1}^{n}S_{hk}f_i(t_k)$，则

$$\sup_i a_{hi}=O\left(n^{-\gamma}\right)+O\left(\tau_m\right).\tag{2.23}$$

$$\begin{aligned}T_2&=\frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n}a_{hi}\left(\varepsilon_h-\sum_{r=1}^{n}S_{hr}\varepsilon_r\right)=\frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n}a_{hi}y_{nh}+\frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n}a_{hi}z_{nh}-\frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n}a_{hi}\sum_{r=1}^{n}S_{hr}\varepsilon_r\\&=:T_2^{(1)}+T_2^{(2)}+T_2^{(3)}.\end{aligned}\tag{2.24}$$

因为$\{y_{nh}\}$仍为 PA 随机变量序列，所以由引理 1.3 和条件(A4)可知，当$\alpha>\frac{3}{2}$时，有

$$\begin{aligned}E\left|T_2^{(1)}\right|^r&=E\left|\frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n}a_{hi}y_{nh}\right|^r\le Cn^{-r}\left(O\left(n^{-\gamma}\right)+O\left(\tau_m\right)\right)^r n^{\frac{r}{2}}\le Cn^{-r}\left(n^{-\gamma r}+\tau_m^r\right)n^{\frac{r}{2}}\\&=C\left(n^{-\frac{r}{2}}n^{-\gamma r}+n^{-\frac{r}{2}}\tau_m^r\right)=Cn^{-\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)r}+Cn^{\left(\mu-\frac{3}{2}\right)r}=T_{21}^{(1)}+T_{22}^{(1)}.\end{aligned}$$

又由条件 A4 可知，当$r>2,\ \gamma>\frac{1}{r}-\frac{1}{2}$时，有$\sum_{n=1}^{\infty}T_{21}^{(1)}<\infty,\sum_{n=1}^{\infty}T_{22}^{(1)}<\infty$。即$\sum_{n=1}^{\infty}E\left|T_2^{(1)}\right|^r<\infty$。

所以由引理 1.2 可知

$$T_2^{(1)}\to 0\ \ a.s.,\ n\to\infty.\tag{2.25}$$

令 $\xi_i=\varepsilon_i I\left(\left|\varepsilon_i\right|>i^{\frac{1}{q}}\right),\zeta_i=\left|\xi_i\right|+E\left|\xi_i\right|,S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{\zeta_i}{i^{\rho}}$当$\rho>\frac{1}{p},p\in(0,1]$时，由$\sup_i E\left|\varepsilon_i\right|^p<\infty$, 可知$\sup_i E\left|\zeta_i\right|^p<\infty$, 所以

$$\sum_{i=1}^{\infty}E\left|\frac{\zeta_i}{i^{\rho}}\right|^p=\sum_{i=1}^{\infty}i^{-\rho p}E\left|\zeta_i\right|^p\le\sup_i E\left|\zeta_i\right|^p\sum_{i=1}^{\infty}i^{-\rho p}\le C\sum_{i=1}^{\infty}i^{-\rho p}<\infty.\tag{2.26}$$

由引理 1.5 可知$\sum_{i=1}^{n}\frac{\zeta_i}{i^{\rho}}.a.s.$收敛。从而，当$\frac{1}{p}<\rho<\min(1+\gamma,2-\mu)$时，有

$$T_2^{(2)} \le C\frac{1}{n}\left(n^{-\gamma}+\tau_m\right)\sum_{h=1}^{n}\zeta_h \le Cn^{(-1+\rho)}\left(n^{-\gamma}+\tau_m\right)\sum_{h=1}^{n}\frac{\zeta_h}{h^{\rho}} \to 0 \ \ a.s., \ \ n\to\infty\,. \tag{2.27}$$

由引理 1.4 及(2.23)式易得

$$T_2^{(3)} = \frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n}a_{hi}\sum_{r=1}^{n}S_{hr}\varepsilon_r \to 0 \ \ a.s. \tag{2.28}$$

故由(2.24)，(2.25)和(2.27)，(2.28)知

$$T_2 \to 0 \ \ a.s., \ \ n\to\infty. \tag{2.29}$$

由(2.18)，(2.19)，(2.22)，(2.29)式知(2.17)成立。综合(2.1)，(2.2)，(2.12)和(2.17)式定理得证。

定理 2.2 的证明 记 $\hat{\beta}_{ni}$ 表示 $\hat{\beta}_n$ 的第 i 个分量，β_i 表示 β 的第 i 个分量

$$\begin{aligned}
\sup_t\left|\hat{g}_n(t)-g(t)\right| &\le \sup_t\left|\hat{g}_0(t,\beta)-g(t)\right| + \sup_t\left|\sum_{j=1}^{n}X_i^T\left(\beta-\hat{\beta}_n\right)\int_{A_j}E_m(t,s)\mathrm{d}s\right| \\
&\le \sup_t\left|\sum_{j=1}^{n}g\left(t_j\right)\int_{A_j}E_m(t,s)\mathrm{d}s-g(t)\right| + \sup_t\left|\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j\int_{A_j}E_m(t,s)\mathrm{d}s\right| \\
&\quad + \sum_{j=1}^{d}\left(\left|\hat{\beta}_{nj}-\beta_j\right|\sup_t\left|\sum_{i=1}^{n}X_{ij}\int_{A_i}E_m(t,s)\mathrm{d}s\right|\right) \\
&\le \sup_t\left|\sum_{j=1}^{n}g\left(t_j\right)\int_{A_j}E_m(t,s)\mathrm{d}s-g(t)\right| + \sup_t\left|\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j\int_{A_j}E_m(t,s)\mathrm{d}s\right| \\
&\quad + \sum_{j=1}^{d}\left(\left|\hat{\beta}_{nj}-\beta_j\right|\sup_t\left|\sum_{i=1}^{n}f_j\left(t_i\right)\int_{A_i}E_m(t,s)\mathrm{d}s\right|\right) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{d}\left(\left|\hat{\beta}_{nj}-\beta_j\right|\sup_t\left|\sum_{i=1}^{n}\eta_{ij}\int_{A_i}E_m(t,s)\mathrm{d}s\right|\right) \\
&= K_1+K_2+K_3+K_4
\end{aligned} \tag{2.30}$$

由于对于 $g(t)$ 有类似于(2.5)式的结论，故

$$K_1 \to 0 \ a.s., n\to\infty. \tag{2.31}$$

由引理 1.4 知

$$K_2 \to 0 \ a.s., n\to\infty. \tag{2.32}$$

由引理 1.1 及定理 2.1，得

$$K_3 \le d\cdot\max_j\sup_t\left|f_j(t)\right|\cdot\sup_t\int_0^1\left|E_m(t.s)\right|\mathrm{d}s\cdot\max_j\left|\hat{\beta}_{nj}-\beta_j\right| \to 0 \ \ a.s., \ \ n\to\infty. \tag{2.33}$$

由(2.8)式及定理 2.1 得

$$K_4 \to 0 \ \ a.s., \ \ n\to\infty. \tag{2.34}$$

故由(2.30)~(2.34)式知定理得证。

参考文献 (References)

[1] A. Atoniadas, G. Gregoire and I. W. Mckeahue. Wavelet methods for curve estimation. Journal of American Statistical Association, 1994, 89(428): 1340-1353.

[2] P. Speckman. Kemel smoothing in partial linear models. Journal of the Royal Statistical Society B, 1988, 50(3): 413-436.
[3] C. D. Wei, Y. M. Li. Berry Esseen bounds for wavelet estimator in semiparametric regression model with linear process errors. Journal of Inequalities and Applications, 2012: 44.
[4] 柴根象，徐克军. 半参数回归模型的线性小波光滑[J]. 应用概率统计, 1999, 15(1): 97-105.
[5] 胡宏昌，孙海燕. 半参数回归模型小波估计的稳定地依分布收敛性[J]. 武汉大学学报(理学版), 2003, 49(5): 571-574.
[6] 胡宏昌，胡迪鹤. 半参数回归模型小波估计的强相合性[J]. 数学学报, 2006, 49(6): 1417-1424.
[7] 钱伟民，柴根象. 半参数回归模型小波估计的强逼近[J]. 中国科学(A 辑), 1999, 29(3): 1233-1240.
[8] 薛留根. 半参数回归模型中小波估计的随机加权逼近速度[J]. 应用数学学报, 2003, 26(1): 11-25.
[9] W. F. Stout. Almost sure convergence. New York: Academic Press, 1974.
[10] 杨善朝，黎玉芳. PA 样本回归权函数估计的一致渐近正态性[J]. 应用概率统计, 2005, 21(2): 150-160.
[11] 查婷婷. 一类混合随机序列的概率极限定理[D]. 安徽大学, 2007.
[12] J. D. Esary, F. Proschan and D. W. Walkup. Associated of random variables with applications. The Annals of Mathematical Statistics, 1967, 38(5): 1466-1474.

