Pure Mathematics 理论数学, 2012, 2, 207-215
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2012.24032 Published Online October 2012 (http://www.hanspub.org/journal/pm.html)

Questions of Concept on Infinite and Theory of Real Number

——Two Fundamental Questions in Mathematical Foundations

Junyun Cao[1], Kai Cao[2]

[1]School of Mathematics and Information Engineering, Henan Polytechnic University, Jiaozuo
[2]School of Electrical Engineering and Automation, Henan Polytechnic University, Jiaozuo
Email: cjy@hpu.edu.cn, caokai.pds@gmail.com

Received: Aug. 15th, 2012; revised: Aug. 28th, 2012; accepted: Sep. 8th, 2012

Abstract: The point of view of “infinite aggregate is finished object” on “actual infinity” must be eliminated. The meaning of infinite to use is has not the end. The infinity meant constant is the false infinity which have not exist in real world. The set of natural number is an ideal set which is a limit quality set and could not be end to constitute by mankind. The meaning of infinite decimal to use is the simple writing of infinite sequence. The ideal real numbers are all the limit of Cantor’s fundamental sequence. The calculation of addition, subtraction, multiplication, division is the limit property calculation.

Keywords: Infinite; Infinite Aggregate; Infinite Decimal; Ideal Real Number; Omnipotent Approximation Real Number

无穷的概念与实数理论问题

——数学基础中的两个基本问题

曹俊云 [1]，曹 凯 [2]

[1]河南理工大学数信学院，焦作
[2]河南理工大学电气学院，焦作
Email: cjy@hpu.edu.cn, caokai.pds@gmail.com

收稿日期：2012 年 8 月 15 日；修回日期：2012 年 8 月 28 日；录用日期：2012 年 9 月 8 日

摘 要：“无穷集合是完成了的事物”的实无穷观点必须取消；无穷的实用意义是“无有穷尽、无有终了的”。常量性无穷大是不存在的假无穷。自然数集合是一个极限性质的、不能被人构造完毕的理想集合。无尽小数的实用意义是无穷数列的简写。所有理想实数都是康托尔基本数列的极限。理想实数的加、减、乘、除运算是极限性质的运算。

关键词：无穷；无穷集合；无尽小数；理想实数；全能近似实数

1. 引言

从芝诺(Zeno)到现在，涉及无穷的悖论、难题多得不可胜数。文献[1]中讲到：“实无穷论者认为，无穷(在数学中表现为无穷集)是一个现实的、完成的、存在着的整体，是可以认识的。潜无穷论者否定实无穷，认为无穷并不是已完成的而是就其发展来说是无穷的，无穷只是潜在的”[1]。康托尔认为“数学理论必须肯定实无穷”，但这样建立起来的实数理论与集合论、非标准分析都有问题。本文从具体实践出发，讨论一下无穷的正确概念与实无穷观点违背实践的情况。由此出发改善了实数理论与集合论，提出了实数的四则运算法则。

2. 无穷二字的原有概念及其初步应用

“无有穷尽”简称为无穷或无尽，它是反映数量研究中一种现象、一种事实的成语。例如，根据自然数的继数公理，自然数集合中元素个数是无有穷尽的，所以自然数集合是无穷集合；无尽小数 0.333⋯的位数是“无有穷尽”的，所以这个数叫做无尽小数；数列 0.3, 0.33, 0.333, ⋯中的项数是“无有穷尽”的，所以这个数列叫做无穷数列。从上述无穷(或无尽)二字的意义与应用来看，应当知道：无穷与有穷的本质区别是：无穷不能当作定数；无穷是无有终了，无有最后元素的意思；无穷不是现实存在着的完成了的事物，“实无穷”的观点不能成立。

3. 真假无穷大的概念及其应用

定义 3.1(变量性的无穷大) 若对任何一个足够大的区分界限 M，总有自然数 N 存在，使得 $n>N$ 时，$a_n>M\left(a_n<-M,\ \left|a_n\right|>M\right)$ 成立，则称数列 $\{a_n\}$ 为变量性的无穷大。它是绝对值无限变大(无有穷尽地变大)的无穷数列，是定义域在自然数集合上的变数。

公理 3.1(理想无穷大) 定义 3.1 中的数列没有通常意义的极限，但为研究问题方便起见，可以使用符号 $+\infty$ ($-\infty,\infty$)表示其极限；此时，称这种符号为非正常理想实数，并称其为理想正无穷大(理想负无穷大，理想无穷大)；同时称这种意义下的极限为相应数列的非正常极限。记作

$$\lim_{n\to+\infty} a_n=+\infty\left(\lim_{n\to+\infty} a_n=-\infty,\ \lim_{n\to+\infty} a_n=\infty\right)$$

在这里，理想正无穷大、理想负无穷大和理想无穷大，也可以叫做常量性无穷大。但在现实世界中找不到它们的现实原型，它们都缺乏实践性，故也可以称这种无穷大为假无穷大；它们都不能作为正常的理想实数。又由于涉及这种无穷大的形式逻辑研究中，常常遇到无法解决的问题，所以又有恶无穷大的名称。

需要强调的是，一些学者认为：“自然数无限变大之前，必须有无穷大自然数存在”，这种说法是错误的。事实上，自然数集合中的有限自然数就可以无限增大，完全不需要无穷大自然数。恩格斯也曾指出：“无限纯粹是由有限组成的，这已经是矛盾，可是事情就是这样”(参看《反杜林论》)。提出“自然数无限变大之前，必须有无穷大自然数存在”的学者，是自觉或不自觉的受到“实无穷”观点的影响，他们没有认识到“常量性无穷大的不存在性”，也没有认识到“无穷集合的不能构造完毕的理想性(参看下一节)”。

常量性无穷大与变量性无穷大之间存在着相互依赖的对立统一关系。符号“∞”在数学分析中的使用，有两种意义：一个意义是：作为极限值使用时，它是常量性无穷大、理想无穷大，是一个假无穷；另一个意义是：在不定式中的研究与计算时，这个符号应当被看作是一个无穷数列，是动态性的、变量性的无穷大，是真正存在着的无穷大；也可简称为动态性的真无穷大。这个动态性的真无穷数列中的数，只能取有限数。

关于无穷大的这种性质、意义与使用方法，就是“简明哲学辞典”所说的“概念应当是可更改的，可修改的，灵活的，变动的，否则它就不能正确地反映现实”[2]的辩证逻辑方法。这个意义与方法也是形式主义者无法理解的意义与方法。例如，虽然可以说数列 $\{n\}$、$\{2n+1\}$、$\{2^n\}$ 的极限都是 $+\infty$，但又可以认为这三个 $+\infty$ 是不同的，并且可以研究他们的比值。当研究他们的比值时，就需要从原来的数列(即变量性无穷大)着手进行不定式 ∞/∞ 的计算。

在这里，还可以看出：常量性无穷大的研究中，常常需要使用取极限之前的变量性无穷大；常量性无穷大不是现实存在着的、完成了的实无穷，它是变量性质的无穷大(一种数列或一种变数)的非正常极限。

4. 无穷集合的基本概念

定义 4.1(自然数的标准序列) 将自然数按照从小到大的顺序排列，得到的序列

$$0,1,2,3,\cdots,11,\cdots,n,n+1,\cdots \tag{1}$$

叫做自然数的标准序列。

定义 4.2(全能近似自然数集合序列) 根据式(1)，可以提出以集合为元素的如下无穷序列

$$\{0\},\{0,1\},\{0,1,2\},\cdots,\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\},\cdots \tag{2}$$

其中，含有足够多自然数的集合叫做足够大自然数集合；序列(2)叫做全能近似自然数集合序列。

公理 4.1(理想自然数集合) 全能近似自然数集合序列(2)有且只有一个理想性质的极限集合，这个集合叫做理想自然数集合。理想自然数集合可以表示为

$$\{0,1,2,3,\cdots,9,10,11,\cdots,99,100,101,\cdots\} \tag{3}$$

这个集合是使用极限思想构造的；但它又是不能构造完毕的理想集合。依照习惯，可以用符号 N 表示这个集合。

显然，理想自然数集合是元素个数无限增加着的、具有动态性质的、且无上界的、人们不能写完其所有元素的、不能被人们构造完毕的理想集合。

定义 4.3(有穷集合) 可以用自然数表示其元素个数的集合，叫做有穷集合。

定义 4.4(无穷集合) 使用序列极限公理方法给出理想集合的元素个数，是这个序列中各个集合元素个数序列的极限；若这个极限是非正常理想实数 $+\infty$，则称这个理想集合的元素个数为理想无穷大，并称具有这种性质的集合为无穷集合。

根据这个定义，理想自然数集合是一个无穷集合。由于无穷集合的元素个数是非正常理想实数 $+\infty$，它与有穷集合之间有许多不同的性质(例如无穷集合可以与其真子集对等)，所以我们又称无穷集合为一类非正常集合。

类似的，有理数集合与实数集合也都是有穷集合序列的极限性质的理想集合；它们也都是元素个数是非正常理想实数 $+\infty$ 的无穷集合；但它们的元素个数不仅是不相等的，而且还可以根据蕴含性去比较它们所含元素的多少；也可以根据构造过程去比较它们的元素个数增长率。最后，应当指出：在不承认“无穷集合是完成的总体”的情况下，无穷基数是不能提出的基数，因此，$2^{\aleph_0}$ 等于 $\aleph_1$ 的连续统假设的大难题就不存在了。这里只是无穷集合概念的简短叙述，详细论述参看文献[3]。

5. 无实践意义的无穷次操作和无穷次运算问题

由于自觉或不自觉的“实无穷”观点的影响，造成了一些难题与悖论。前文已经谈到：不使用实无穷、坚持无穷是无有终了的观点，可以消除连续统假设的大难题，下文再讨论一种无穷次操作和一种无穷次运算的问题。

5.1. 无穷次分割问题

芝诺(Zeno)两分法悖论说的是：“由于运动的物体在到达目的地前必须到达其半路上的点，若假设空间无限可分则有限距离包括无穷多点，于是运动的物体需要在有限时间内经过无限多点，这是不可能的。”这个悖论可以表示为“一个人想要从 A 点走到 B 点是永远不可能的”，芝诺争辩道：“一个人从 A 点走到 B 点，要先走完路程的 $1/2$，再走完剩下总路程的 $1/2$，再走完剩下的 $1/2$ $\cdots$ 如此循环下去，由于有无穷多个分点，所以，永远不能到终点[4]。”

事实上，根据无穷的无有穷尽的性质，有无穷多分点的、有限空间的无限次二等分工作是不可能被完成的理想状况，有实无穷多分点的有穷空间实际上是不存在的；实际上，当距离足够短时，不用再分，一步就到达了终点，芝诺的“永远不能到终点”的论断是无根据的、不正确的。

5.2. 无穷次加法运算问题

无穷项相加是一种无法进行的运算；现行教科书中的无穷级数和表示的不是无穷项相加的结果，而是有穷

项相加的序列的极限。例如，无穷级数和

$$0.3+0.03+0.003+\cdots$$

就是一个无法进行的运算。但是它的前 n 项和

$$0.3+0.03+\cdots+\overbrace{0.00\cdots03}^{n+1位}=0.3\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\cdots+\frac{1}{10^{n-1}}\right)=0.3\left(\frac{1-\dfrac{1}{10^n}}{1-\dfrac{1}{10}}\right)$$

的序列有极限，这个极限是 $1/3$。

有人认为：无尽循环小数 $0.\dot{3}=0.333\cdots$ 是一个符号，它代表无穷级数和

$$0.3+0.03+0.003+\cdots,$$

所以成立等式 $0.\dot{3}=0.333\cdots=\dfrac{1}{3}$。但是，认真推敲起来，这种说法是不对的，因为：无穷级数和 $0.3+0.03+0.003+\cdots$ 就是一个无法进行的运算。正确的做法应当是：把无尽循环小数 $0.\dot{3}=0.333\cdots$ 看作是无穷数列 0.3, 0.33, 0.333, $\cdots$ 的简写。由于这个数列的极限是 $1/3$，所以应当有极限表达式：$\lim 0.\dot{3}=\dfrac{1}{3}$。

还需要指出：关于等式 $0.\dot{3}=0.333\cdots=\dfrac{1}{3}$，可以说：文献[5]80 页的例 3 中给出了证明，但这个证明是有问题的证明。首先将他们的证明叙述如下：第一步，先设

$$x=0.\dot{3}=0.333\cdots \tag{1}$$

然后两端乘以 10，得：

$$10x=3+0.333\cdots \tag{2}$$

再将(2)式改写为：

$$10x=3+x \tag{3}$$

合并同类项，最后得[5]：

$$9x=3,\ x=\frac{1}{3} \tag{4}$$

这个证明的错误，在于没有认真对待无穷的概念。从无穷是“无有穷尽”、“无有终了”的事实出发，无尽小数 $0.333\cdots$ 的位数是“无有穷尽”的，无尽小数 $0.333\cdots$ 不能被看作定数，上述代数方程的解法与作为定数的结果都不能成立。其次，从无穷作为定数的实无穷观点出发，(2)式中的 $0.333\cdots$ 的位数比(1)中的 $0.333\cdots$ 的位数少一位，所以(3)式右端的 x 小于左端 $10x$ 中的 x；因此，(4)式是得不到的。应当是 $9x$ 小于 3，而不是等于 3；(4)式的结果是错误的。总之，无论从哪一种无穷观点出发，这个证明都是不能成立的。

6. 无尽小数的问题

6.1. 无尽循环小数的收敛定理

在 5.2 节已经指出：无尽循环小数 $0.\dot{3}=0.333\cdots$ 被看作是无穷数列 0.3, 0.33, 0.333, $\cdots$ 的简写时，它的极限是 $1/3$。一般来讲，有以下收敛定理。

定理 6.1(无尽循环小数的极限) 所有无尽循环小数作为无穷数列简写时，它们的极限都是一个分数或整数；反之，每一个分数或整数都是一个被看作是无穷数列时的无尽循环小数的极限。

关于定理的前段，有一个重要的特例。这个特例是：无尽循环小数 $0.\dot{q}_1q_2\cdots\dot{q}_l$ 的极限是分数或整数 $\dfrac{q_1q_2\cdots q_l}{\underbrace{99\cdots9}_{l个9}}$。

其中当循环节是只有一位 9 的情况，其极限是整数 $9/9=1$ 。

定理的证明：对于定理的前段，首先证明循环节只有两位的无尽循环小数 $0.\dot{q}_1\dot{q}_2$ ，的情形是正确的。事实上，这个无尽循环小数表示的数列的通项表达式为：

$$a_n=\begin{cases}0.\underbrace{q_1q_2\cdots q_1q_2}_{2m\text{个数}}=q_1q_2\left(\dfrac{1}{10^{2\times1}}+\dfrac{1}{10^{2\times2}}+\cdots+\dfrac{1}{10^{2\times m}}\right),\quad \text{当}n=2m\text{时}\\ 0.\underbrace{q_1q_2\cdots q_1q_2q_1}_{2m+1\text{个数}}=q_1q_2\left(\dfrac{1}{10^{2\times1}}+\dfrac{1}{10^{2\times2}}+\cdots\dfrac{1}{10^{2\times m}}\right)+q_1\times\dfrac{1}{10^{2m+1}},\quad \text{当}n=2m+1\text{时}\end{cases}$$

当 $n\to+\infty$ 时，有 $m\to+\infty$ ，上式括号内极限为 $1/99$ ； $1/10^{2\times m+1}$ 的极限为 0，于是 a_n 的极限为 $q_1q_2/99$ ，定理前段的特例成立。

当循环节的位数是 l 时，证明方法类似，不同的仅仅是 a_n 的表达式有 $n=lm,n=lm+1,\cdots n=lm+l-1$ 等 l 种情形。当无尽循环小数的循环节是从小数点后第 p 位开始时，由于乘上 10^{p-1} 就变成前边讨论的情况，所以只要把这样的分数或整数乘上 $1/10^{p-1}$ ，再加前边的有尽位小数化成的分数就可以了。当无尽循环小数有整数位时，其极限是整数再加这样得出的分数或整数。总之，任何情况下的无尽循环小数的极限都是分数或整数。

关于定理后段，首先，由于整数 1 等于无尽循环小数 $0.\dot{9}$ 的极限，可知：任何整数可表示为无尽循环小数的极限。再由 0.1 可表为无尽循环小数 $0.0\dot{9}$ 的极限，及 0.44 可表为无尽循环小数 $0.43\dot{9}$ 的极限，可知：任何有尽小数可表示为无尽循环小数的极限。最后，对于分数，由于它是两个整数的商，对这个商进行除法运算时的余数的种数不超过分母表示的数字。例如分数 $1/7$ ，对它所表示的除法进行运算时，每一步的余数不外 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 等七个数字之内。在进行除法运算时，如果遇到余数是 0 的情形，就是除尽了，这时分数可表为有尽小数，如上所述，它可以表示为无尽循环小数的极限；如果永远除不尽，由于余数始终不是 0，而余数的不同情形又是有限的，所以，无限制地除下去，必然出现余数循环的现象，这时分数可表示为循环节位数小于分母的无尽循环小数的极限。例如，1/7 第一次除是 7 去除 1 得 1 余数为 3(这是形象说法，实际是得 0.1，余数为 0.3)，第二次除，是 7 去除 3，得 4，余数为 2，第三次除，…第六次除，是 7 去除 5 得 7 余数为 1，再除又是 7 去除 1，循环了，其结果是 $1/7$ 可表为无尽循环小数 $0.\dot{1}4285\dot{7}$ (循环节有六位)的极限。

6.2. 对无尽小数的应有认识与错误认识

6.2.1. 对无尽小数的应有认识

上一小节把无尽循环小数作为无穷数列的简写时得到了它的收敛定理；一般说来，我们应当提出如下的公理。

公理 6.1(无尽小数实用意义的公理) 无尽小数 $0.a_1a_2a_3\cdots$ 的实用意义都应当是无穷数列 $0.a_1,0.a_1a_2,0.a_1a_2a_3,\cdots$ 的简写。无尽小数是一个随着数列项数变化而变化的变数，而不是一个定数。

显然，每一个无尽小数(包括无尽不循环小数)都可以根据它的无尽小数表达式写出它的无穷数列(这种数列都是下文中提出的康托尔基本数列，根据公理 7.1，它们都有极限)的表达式。这种无穷数列表达式有好处。例如，把无尽小数 $0.\dot{3}=0.333\cdots$ 看作无穷数列 0.3, 0.33, 0.333, …的简写时，可以知道：这个数列的极限是 $1/3$ (根据定理 6.1，或参看 5.2 节的证明)，而且这个数列的第 n 项是分数 $1/3$ 的准确到 $1/10^n$ 的近似值；但人们无法写出无穷多个 3，即无法写出 $1/3$ 的绝对准十进小数表达式。再如，把无尽不循环小数 1.414213…看作无穷数列 1.4, 1.41, 1.414, …(这个数列是满足条件： p_n 为自然数；且 $\left(\dfrac{p_n}{10^n}\right)^2<2$ ， $\left(\dfrac{p_n+1}{10^n}\right)^2>2$ 的无穷数列 $\left\{\dfrac{p_n}{10^n}\right\}$)的简写时，可以知道它的极限是 $\sqrt{2}$ (参看下一节法则 7.1 中的例子)，而且从这个数列中能够得出 $\sqrt{2}$ 的准确到任意小误差界的要求下的近似值。特别是：这个数列的第 n 项是 $\sqrt{2}$ 的准确到 $1/10^n$ 的近似值；但人们无法写出 $\sqrt{2}$ 的绝对准十进小数表达式。

6.2.2. 对无尽小数的错误认识

对无尽小数的上一小节的认识，不需要引用实无穷的错误概念。然而，现行实数理论不是这样做的。现在的学者认为："建立实数理论必须使用实无穷"，在完成的实无穷观点下，他们认为：无尽小数 $0.333\cdots$ 的位数就是完成的实无穷；"无穷啦，无尽小数 $0.333\cdots$ 就等于1/3了"。但事实上，实无穷观点是违背实践的，无穷多个 3 是写不出来的；在实践中，人们只能使用有尽小数近似表达三分之一。关于等式成立的证明，在 5.2 节已经作了批判。

6.3. 实数三分律的反例问题

前文 6.2.1 节已经指出无尽小数的应有意义是无穷数列的简写，由此可知：把 $3.14159\cdots$ 中的小数位数看作可以写完的定数是不正确的；因此，等式 $\pi = 3.14159\cdots$ 也是不正确的。事实上，对于在"完成的实无穷"意义下，把 $\pi = 3.14159\cdots$ 中的 $3.14159\cdots$ 看作定数的作法，存在着 Brouwer 提出的一个"实无穷观点下"无法解决的三分律反例问题。这个反例的构成如下：首先将这个无尽小数展开式 $3.14159\cdots$ 中的每一个连续 100 个 0 叫做一个"百零排"，并提出以下三种命题：

1) 这个展开式中没有"百零排"；
2) 这个展开式中有奇数多个"百零排"；
3) 这个展开式中有偶数多个"百零排"。

然后，根据在"实无穷观点下"可以使用排中律与矛盾律的道理，可以说：没有或有"百零排"两种情况"有且只有"一种情况出现；其中，在有"百零排"出现的情况下，再次使用排中律与矛盾律，就可以说，2)、3)"有且只有"一种情况出现。总起来讲，使用两次排中律与矛盾律，应当得到，1)、2)、3)"有且只有"一种情况出现。在 1)出现时，令实数 $\hat{\pi}$ 等于 π；在 2)出现时，令实数 $\hat{\pi}$ 小于 π；在 3)出现时，令实数 $\hat{\pi}$ 大于 π。最后令 $Q = \hat{\pi} - \pi$，那么这个实数 Q 究竟是等于、小于或大于 0 的哪一种情况呢？这就是 Brouwer 提出的一个"实无穷观点下"无法解决的三分律反例问题。文献[6]认为，在实无穷意义下，应用两次排中律可以判断这个实数 Q 是大于、小于或等于 0 的问题，但同时又从实际情况指出，究竟这个实数 Q 是大于、小于或等于 0 呢？这是一个无法回答的问题，因此，徐利治先生最后又讲到："看来，这还是一个不易解决的难题"，"希望对布劳维尔(Brouwer)反例感兴趣的读者继续研究下去"[6]。这说明：从实无穷观点上看，无法真正解决这个反例提出的难题。

对于这个反例，如果使用我们改进后的"尊重无穷是无有穷尽"的无理数理论，那么这个反例与难题就不存在了。事实上，按照"无穷是无有穷尽"的意见，无尽不循环小数 $3.14159\cdots$ 是一个数列，它不是一个常数，而是一个变数。这时，因为 $3.14159\cdots$ 中的小数总位数是一个处于动态的"无限增大着"的变数，1)、2)、3)都是不可判定的、不能被提出的命题。又由于排中律对不可判断问题不能使用，那么这个实数 Q 也就无法提出来了，这个反例与难题自然也就不存在了。

7. 实数理论问题与改革简述

前文 6.2.1 节中已经谈到无尽小数的应有意义是无穷数列的简写；它们都是定义在自然数集合上的变数，而不是定数。本节谈谈康托尔实数理论中的问题及其改革。

这里，首先介绍一下我们还要用到的康托尔实数理论中的下述两个定义。

定义 7.1 若数列 $\{a_n\}$ 的每一项都是有理数，且对任意小误差界 ε 都有自然数 N 存在，使得当 $n, m > N$ 时，$|a_n - a_m| < \varepsilon$ 总成立，则称数列 $\{a_n\}$ 为康托尔基本数列[7]。

例如，上述表示无尽循环小数 $0.333\cdots$ 的数列 $0.3, 0.33, 0.333, \cdots$ 就是一个康托尔基本数列。

定义 7.2 对任意小误差界 ε 都有自然数 N 存在，使得当 $n > N$ 时，总成立 $|a_n - b_n| < \varepsilon$ 的两个康托尔基本数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 叫做相互等价(或称全能近似相等)的康托尔基本数列。

例如，每一项都取$1/3$的数列，与上述$0.333\cdots$所表示的数列是相互等价的康托尔基本数列；若进行 1 被 3 除法运算时每次都取过剩近似值，所得到的无穷数列 0.4, 0.34, 0.334, 0.3334, $\cdots$与$0.333\cdots$表示的无穷数列之间也是相互等价的康托尔基本数列。

康托尔实数理论中存在的问题，在于他提出了如下的不恰当的实数定义。

康托尔的实数定义：“把彼此等价的基本数列归为一类，每一类称为一个实数。记号$\alpha=[a_n]$表示与$\{a_n\}$等价的基本数列类构成的实数是α，$\{a_n\}$叫做实数α的一个代表。凡和任一有理数α组成的常数列等价的类称为有理数”[7]。

根据这个定义，表示$0.\dot{3}=0.33\cdots$的康托尔基本数列 0.3, 0.33, 0.333, $\cdots$，和与其等价的且每一项都取$1/3$的数列应当看作同一个实数$1/3$。但这个实数定义却是：把等价与相等两个概念混淆了，把变数与常数混淆了的、不恰当的实数定义。

为了消除这个不恰当的实数定义，笔者提出了如下的公理、定义与法则。

公理 7.1(实数公理) 每一个以有理数为项的、康托尔基本数列都存在一个唯一的理想实数为其极限，而且等价(也称全能近似相等)的基本数列的极限相同。反之，每一个理想实数都存在着以它为极限的康托尔基本数列及其惟一的无尽小数表达式。

定义 7.3(全能近似实数) 收敛于理想实数的数列叫做理想实数的全能近似值序列，简称为这个理想实数的全能近似实数；这个数列中每一项都是针对某一误差界的、理想实数的近似值；也可以称它为理想实数的近似实数。如果理想实数α的全能近似实数$\{a_n\}$具有性质：对一切自然数n都有$a_n>\alpha(a_n<\alpha)$成立，那么我们约定将这个全能近似实数$\{a_n\}$表示为$\alpha^+(\alpha^-)$。

定义 7.4(全能近似相等关系) 若两个数字表达式之间具有关系：1) 在任意误差界之下都能近似相等；2) 但不能绝对准相等，则称二者之间全能近似相等(用符号~表示)。

在这个定义下，收敛数列与它的极限值是全能近似相等的；定义 7.2 中的等价数列是全能近似相等的。根据上述定义有表达式$\{1/2^n\}=0^+$、$\{1/2^n\}\sim 0$、$0.\dot{3}=(1/3)^-$、$0.\dot{3}\sim 1/3$。

由这两个定义可知，每一个理想实数都有许多全能近似实数与其全能近似相等。与非标准分析类似，也可以称每一个理想实数与它的全能近似实数的全体为一个“单包(monad)”。

例如，无穷数列$\{1/2^n\}$、$\{(-1)^n 1/2^n\}$、$\{1/n\}$、$\{-1/10^n\}$，都属于 0 的“单包”，它们都是无穷小。但在我们这里，这些无穷小都是数列，都是变数而不是常数，这是与非标准分析所不同的地方。

定义 7.5(无理数的定义) 若康托尔基本数列的极限不是有理数(即分数或整数)，则称它的极限为无理数。

理想实数包括有理数与无理数两部分。理想实数可以简称为实数，但与现行实数理论不同，理想实数(简称为实数)中不包括无尽小数。无尽小数都是它的极限的全能近似实数。

法则 7.1(无理数判定法则) 若能证明某一康托尔基本数列的极限不是有理数，那么就称这个基本数列的极限为无理数，并可以选择一个适当符号表示这个无理数。

例如，对 2 开方时，每一步都取“不足近似值”，则可以得到无尽小数表达式$1.414\cdots$所表示的无穷数列；而每一步都取过剩近似值，则可得到无穷数列 2, 1.5, 1.42, 1.415, $\cdots$；这两个无穷数列都是康托尔基本数列，并相互等价。同时，可以证明它们的极限不是分数也不是整数，根据公理 7.1 与法则 7.1，应当认为它们的极限是同一无理数，并选择符号$\sqrt{2}$表示这个理想实数。

定理 7.1 无尽不循环小数的极限是无理数。

证：由于无尽不循环小数的极限不能表示为整数或分数(根据定理 6.1 的后段，整数或分数都能表示为无尽循环小数的极限)，根据法则 7.1，它的极限是无理数。

定理 7.2 如果$\{a_n\}\sim\{a_n'\},\{b_n\}\sim\{b_n'\}$，则必有$\{a_n\pm b_n\}\sim\{a_n'\pm b_n'\}$，$\{a_n\cdot b_n\}\sim\{a_n'\cdot b_n'\}$。又若$b_n\neq 0, b_n'\neq 0, \{b_n\}\neq 0, \{b_n'\}\neq 0$，则$\{a_n/b_n\}\sim\{a_n'/b_n'\}$[7]。

这个定理的证明可参看文献[7]333 页；根据这个定理与公理 7.1 可提出如下法则。

法则 7.2(理想实数的加、减、乘、除法则) 设$\{a_n\}$、$\{b_n\}$分别是理想实数α、β的康托尔基本数列，则称极限$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)$、$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)$、$\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n)$、$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n/b_n)$分别是理想实数$\alpha$、$\beta$的和、差、积、商，并分别记作：$\alpha+\beta$、$\alpha-\beta$、$\alpha\beta$、$\alpha/\beta\ (\beta\neq 0)$。

例如，$\sqrt{2}=\lim 1.414213562\cdots$、$1/3=\lim 0.333\cdots$，依照法则 7.2，可以得到

$$\begin{aligned}\sqrt{2}-1/3&=\lim 1.414\cdots-\lim 0.333\cdots\\&=\lim\{1.4-0.3, 1.41-9.33, 1.414-0.333, 1.4142-0.3333, \cdots\}\\&=\lim\{1.1, 1.08, 1.081, 1.0809, \cdots\}\\&=\lim 1.08088\cdots\end{aligned}$$

或写作：$\sqrt{2}-1/3\sim\{1.4-0.3, 1.41-0.33, 1.414-0.333, \cdots\}\sim 1.08088\cdots$。其中，符号$1.08088\cdots$是根据无尽小数的意义写出的无尽小数表达式，可以证明这个无尽小数的极限不是有理数(因为无理数减去有理数不可能等于有理数)。再根据定理 6.1，这个无尽小数不是无尽循环小数而是无尽不循环小数。这个例题也说明：当无理数是根据康托尔基本数列提出时，可以根据提出它的康托尔基本数列得出无尽不循环小数。这个例题还说明：实数的四则运算是其无尽小数(收敛的无穷数列)的四则运算的极限。

审查现行实数理论，可以发现：它们没有这样好的四则运算法则。康托尔说：“无理数的建立必须以这样或那样的实无穷为基础”，从现行实数理论来讲，的确如此；但是，现在我们不使用实无穷观点，建立了更好的实数理论。从这个实数理论出发，可以更好地证明柯西收敛原理与实数的完备性定理、区间套定理(参看文献[3]第一章)。

8. 结论与展望

“无穷集合是完成了的事物”的实无穷观点违背实践，必须取消；应当坚持的是“无穷是无有终了、无有穷尽”的观点。在这个观点下，无尽小数表达式应当是一种无穷数列的简写；无尽小数都是其极限(理想实数)的全能近似实数。本文不仅消除了连续统假设的大难题，消除了实数理论的三分律反例，而且提出了现行实数理论中没有的实数的四则运算法则。

改革后的实数可以形象的看作是一个太极图式的实数结构。每一个实数都有它的理想实数，近似实数与全能近似实数(无穷数列)三部分构成。例如$\sqrt{2}$，就有理想的$\sqrt{2}$与它的近似实数 1.4, 1.41, 1.414, $\cdots$及其全能近似实数(无穷数列)构成。理想实数与近似实数位于太极图的两边，全能近似实数是联系二者的桥梁。将全能近似实数取极限得理想实数；将全能近似实数进行分割，其分割处的值(即数列中的项)是其近似实数，理想实数与其近似实数之间具有相互依赖的关系。如果要问理想实数$\sqrt{2}$究竟多大呢，就可以用它的全能近似实数(无穷数列)中的数 1.4, 1.414 或其它数进行近似刻画，而其精确值则是其全能近似实数(无穷数列)的极限。使用这种相互依赖的关系就可以解决“$\sqrt{2}$到底是什么”的困惑问题。

在不能使用实无穷的观点下，常量性无穷大是不存在的假无穷。无穷集合是一种极限性质的、不能构造完毕的理想性质的非正常集合；在这个观点下就可以消除第三次数学危机(参看文献[3]第一章)。在不能使用实无穷的观点下，非标准分析应当是一种不能提出的分析；“非标准分析取代现行数学分析”的观点不能成立。但现行数学分析也需要在新的实数理论下进行改革：与实数、无穷集合问题类似，对于函数、导数、积分、积分变换也需要提出近似、理想、全能近似三个相互依赖的术语。这样改革的数学分析，不仅彻底消除了第二次数学危机，而且可以很好地解决发散积分、δ函数与数学物理方程中的问题，详细论述请参看文献[3]。

参考文献 (References)

[1] 王宪钧, 著. 数理逻辑引论[M]. 北京: 北京大学出版社, 1998: 301-304.

[2] [苏]罗森塔尔, 尤金, 编, 中共中央马、恩、列、斯著作编译局, 译. 简明哲学辞典[M]. 北京: 人民出版社, 1973: 672.
[3] 曹俊云, 杨健辉, 著. 全能近似分析数学理论基础及其应用[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2009: 36-38, 42-49.
[4] 百度网站. 芝诺悖论[URL]. http://baike.baidu.com/view/9383.htm#2
[5] 余元希, 田万海, 毛宏德, 编. 初等代数研究(上册)[M]. 北京: 高等教育出版社, 1988: 80.
[6] 徐利治. 自然数列的二重性与双相无限性及其对数学发展的影响[A]. 徐利治. 论数学方法学[C]. 济南: 山东出版社, 2003: 490-501.
[7] 华东师范大学数学系, 编. 数学分析(上册)[M]. 北京: 高等教育出版社, 1980: 328-333.