Pure Mathematics 理论数学, 2013, 3, 112-119
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2013.32018 Published Online March 2013 (http://www.hanspub.org/journal/pm.html)

Orthodox Super rpp Semigroups*

Xia Wu, Xiaojiang Guo, Xiaowei Qiu

Department of Mathematics, Jiangxi Normal University, Nanchang
Email: wuxia19870501@163.com

Received: Dec. 8th, 2012; revised: Jan. 12th, 2013; accepted: Jan. 24th, 2013

Abstract: The aim of this paper is to study orthodox super rpp semigroups. Some new properties and characterizations of such semigroups are obtained. Also, idempotent-separating congruencies on orthodox super rpp semigroups are described. As an application, some properties of left C-rpp semigroups and right C-rpp semigroups are given.

Keywords: Super rpp Semigroup; OS-rpp Semigroup; C-rpp Semigroup; (l)-Principal Factor

纯正超 rpp 半群*

吴　瑕，郭小江，邱小伟

江西师范大学数学与信息科学学院，南昌
Email: wuxia19870501@163.com

收稿日期：2012 年 12 月 8 日；修回日期：2013 年 1 月 12 日；录用日期：2013 年 1 月 24 日

摘　要：本文研究纯正超 rpp 半群，得到了这类半群的若干新性质和特征，并且给出了纯正超 rpp 半群上的幂等元分离同余的刻画。此外，还给出了左 C-rpp 半群和右 C-rpp 半群的等价刻画。

关键词：超 rpp 半群；OS-rpp 半群；C-rpp 半群同余；(l)-主因子

1. 引言

半群 S 称为 rpp 半群，如果 S 的每个右主理想 aS^1 作为 S^1-系是投射的。对偶地，定义 lpp 半群。Fountain[1]指出，半群为 rpp 的，当且仅当它的每个 L^*-类含有幂等元。如[2]，称 S 为富足的(abundant)，如果 S 既为 rpp 半群，又为 lpp 半群。众所周知，正则半群是富足半群。

完全正则半群(completely regular semigroups)在半群理论中具有非常重要的地位。关于完全正则半群的研究，参见专著[3]。作为完全正则半群在 rpp 半群理论中的推广，郭聿琦，K. P. Shum，朱聘瑜[4]定义了强 rpp 半群。所谓的强 rpp 半群是 rpp 半群，并满足条件：对任意的 $a \in S$ 都存在唯一的幂等元 $a^{\Diamond}$ 满足 $a^{\Diamond} L^* a$ 且 $a^{\Diamond} a = a$。最早被研究的强 rpp 半群类是 C-rpp 半群，即幂等元在中心的 rpp 半群。Fountain[1]指出，rpp 半群为 C-rpp 半群当且仅当它为左消幺半群的半格。作为左 C-rpp 半群的对偶，郭聿琦[5]研究了右 C-rpp 半群。其后，K. P. Shum，任学民[6]，郭小江，任琛琛，K. P. Shum[7]对右 C-rpp 半群作了较为深入的研究。事实上，还有多种强 rpp 半群被研究(参见[8-10])。

本文将继续研究强 rpp 半群，主要研究纯正超 rpp 半群上的几类特殊同余及纯正超 rpp 半群的性质和特征，此外，还给出了左 C-rpp 半群和右 C-rpp 半群的一些新刻画。

*基金项目：国家自然科学基金(10961014)；江西省自然科学基金(2014BAB201009)；江西省教育厅科研项目助资(GJJ11388)。

2. 若干准备

为简便，我们将采用文献[2,11,12]的术语和符号。下面结果将多次用到。

引理 2.1[2] 令 S 为半群，且 $a,b\in S$，则下列各款等价：

1) $aL^{*}b$；

2) 对于任意的 $x,y\in S^{1},ax=ay$ 当且仅当 $bx=by$。

引理 2.2[11] 令 S 为半群，且 $a,e=e^{2}\in S$，则下列各款等价：

1) $aL^{*}e$；

2) $a=ae$ 且对于任意的 $x,y\in S^{1}$，若 $ax=ay$ 则 $ex=ey$。

众所周知，$L\subseteq L^{*}$ 是 S 上的右同余，$\Re^{*}$ 是 S 上的左同余。一般地，L 且 $\Re\subseteq\Re^{*}$。但当 a,b 都为正则元，$aL^{*}\left(\Re^{*}\right)b$ 当且仅当 $aL\left(\Re\right)b$。特别地，若 S 是正则半群，则 $L=L^{*}$，$\Re=\Re^{*}$。为简便，用 $E\left(S\right)$ 记为半群 S 的幂等元集。

为研究 rpp 半群，郭聿琦，K. P. Shum，朱聘瑜[4]定义了如下关系，通常称为格林(σ)-关系：

$$aL^{(l)}b\Leftrightarrow Kera_{l}=Kerb_{l},\ i.e.\ L^{(l)}=L^{*};$$

$$a\Re^{(l)}b\Leftrightarrow \operatorname{Im}a_{l}=\operatorname{Im}b_{l},\ i.e.\ \Re^{(l)}=\Re;$$

$$H^{(l)}=L^{(l)}\bigcap\Re^{(l)};$$

$$D^{(l)}=L^{(l)}\vee\Re^{(l)};$$

$$aJ^{(l)}b\Leftrightarrow J^{(l)}\left(a\right)=J^{(l)}\left(b\right)$$

其中 a_{l} 为由 a 确定的内左平移，$\operatorname{Im}a_{l}$ 为 a_{l} 的像集，$Kera_{l}$ 为 a_{l} 的核(kernel)，$J^{(l)}\left(a\right)$ 为被 $L^{(l)}$-渗透的含 a 的最小理想。

引理 2.3[13] 令 S 为强 rpp 半群，且 $a,b\in S$，则

1) 若 $aD^{(l)}b$，则 $\left(ab\right)^{\lozenge}=\left(a^{\lozenge}b^{\lozenge}\right)^{\lozenge}$；

2) 若 a 是 S 的正则元，则 a 是完全正则的，即存在幂等元 e，使得 aHe。

设 S 为强 rpp 半群。对任意的 $a,b\in S$，定义

$$a\bar{\Re}b\Leftrightarrow a^{\lozenge}\Re b^{\lozenge}$$

$$\bar{H}=\bar{\Re}\bigcap L^{(l)}$$

易知，$\bar{\Re}\subseteq D^{(l)}$。等价地，$a\bar{H}b$ 当且仅当 $a^{\lozenge}=b^{\lozenge}$。由此，$a\bar{H}a^{\lozenge}$。郭小江，郭聿琦，K. P. Shum[14]指出，$D^{(l)}=\bar{\Re}\circ L^{(l)}$，而且 $\bar{\Re}$ 一般不是左同余。称强 rpp 半群 S 为超 rpp 半群(super rpp semigroup)，如果 $\bar{\Re}$ 是 S 上的左同余。

引理 2.4[14] 令 S 为强 rpp 半群，则以下各款等价：

1) S 是超 rpp 半群；

2) 对任意的 $a\in S$，$J^{(l)}\left(a\right)=Sa^{\lozenge}S$；

3) $J^{(l)}\big|_{E(S)\times E(S)}=J\big|_{E(S)\times E(S)}$；

4) $J^{(l)}=D^{(l)}$；

5) $D^{(l)}$ 是 S 上的半格同余。

如[14]，称半群 S 为纯正超 rpp 半群，简称 OS-rpp 半群，如果 S 为超 rpp 半群，且 $E(S)$ 为带(band)。不难验证，OS-rpp 半群的所有正则元构成纯正半群(orthodox semigroup)，再由引理 2.3，知 OS-rpp 半群的所有正则元构成纯正群(orthogroup)。

现令 S 为 OS-rpp 半群，$a\in S$。记 $E\left(e\right)$ 为含 e 的带 $E\left(S\right)$ 的 D-类，不难知道，$E\left(e\right)$ 为矩形带(rectangular band)。规定 $a\eta b \Leftrightarrow$ 存在 $e,f\in E\left(b^{\lozenge}\right)$, 使得 $a=ebf$ 。

显然，η 是 S 上的等价关系。

引理 2.5[14] 令 S 为 OS-rpp 半群，则

1) η 是 S 上的同余，且保持 L^{*} -关系；

2) S/η 是 C-rpp 半群，即幂等元在其中心的 rpp 半群；

3) $\bar{H}\cap\eta=1_S$ (S 上的恒等关系)。

3. 同余

这一节，我们将考虑 OS-rpp 半群上的几种特殊同余。

引理 3.1 令 S 为 OS-rpp 半群，且 $a,b\in S$ ，则

$a\eta b$ 当且仅当存在 $a^{\lozenge}\in E\left(b^{\lozenge}\right)$ 使得 $a=a^{\lozenge}ba^{\lozenge}$ 。

证明 仅需证必要性。为此，设 $a\eta b$ ，则有 $e,f\in E\left(b^{\lozenge}\right)$ 使得 $a=ebf$ ，易知 $ea=a$ ，再由 $aL^{(l)}a^{\lozenge}$ ，知 $a^{\lozenge}=ea^{\lozenge}$ ，于是 $E\left(a^{\lozenge}\right)\subseteq E(e)=E\left(b^{\lozenge}\right)$；类似地， $E\left(b^{\lozenge}\right)\subseteq E\left(a^{\lozenge}\right)$ ，从而 $E\left(b^{\lozenge}\right)=E\left(a^{\lozenge}\right)$ ，显然， $a^{\lozenge}\in E\left(b^{\lozenge}\right)$ ，而且

$$a=a^{\lozenge}aa^{\lozenge}=a^{\lozenge}ebfa^{\lozenge}=a^{\lozenge}eb^{\lozenge}\circ b\circ b^{\lozenge}fa^{\lozenge}=a^{\lozenge}b^{\lozenge}\circ b\circ b^{\lozenge}a^{\lozenge}=a^{\lozenge}ba^{\lozenge}$$

引理 3.2 令 S 为强 rpp 半群，且 $e,f\in E(S)$ 。若 $E(S)$ 为带，则 $eD^{S}f$ 当且仅当 $eD^{E(S)}f$ 。

证明 显然， $D^{E(S)}\subseteq D^{S}$ 。反之，若 $eD^{S}f$ ，则存在 $a\in S$ 使得 $eLa\Re f$ ，易知， a 是正则的，再由引理 2.3 知， a 是完全正则的，即存在 $g\in E(S)$ 满足 aHg ，从而 $eLg\Re f$ ，即有 $eD^{E(S)}f$ 。因此， $eD^{S}f$ 当且仅当 $eD^{E(S)}f$ 。

半群 S 上的同余 ρ 称为幂等元纯的，如果对于任意的 $a\in S$ ，若 $a\rho$ 是幂等元，则 a 是幂等元。

定理 3.3 令 S 为 OS-rpp 半群，则

1) η 是幂等元纯的；

2) $D^{(l)}=\bar{H}\circ\eta$ ；

3) η 是 S 上最小的 C-rpp 半群同余。

证明

1) 设 $a\eta\in E(S/\eta)$ ，那么 $(a\eta)(a\eta)=a^{2}\eta=a\eta$ ，于是 $a=a^{\lozenge}a^{2}a^{\lozenge}=a^{2}\in E(S)$ ，即 η 是幂等元纯的；

2) 注意到，若 $a\eta b$ ，则存在 $a^{\lozenge}\in E\left(b^{\lozenge}\right)$, 使得 $a=a^{\lozenge}ba^{\lozenge}$ ，显然 $a^{\lozenge}Db^{\lozenge}$, 进而 $aL^{(l)}a^{\lozenge}Db^{\lozenge}L^{(l)}b$ ，于是 $aD^{(l)}b$ ，从而 $\eta\subseteq D^{(l)}$ ，而 $\bar{H}\subseteq D^{(l)}$ ，因此 $\bar{H}\circ\eta\subseteq D^{(l)}$ 。

反之，若 $(a,b)\in D^{(l)}$ ，则 $a^{\lozenge}D^{(l)}aD^{(l)}bD^{(l)}b^{\lozenge}$ 。由引理 2.3 及 $E(S)$是带，知

$$\left(a^{\lozenge}ba^{\lozenge}\right)^{\lozenge}=\left(\left(a^{\lozenge}b\right)^{\lozenge}a^{\lozenge}\right)^{\lozenge}=\left(a^{\lozenge}b\right)^{\lozenge}a^{\lozenge}=\left(a^{\lozenge}b^{\lozenge}\right)^{\lozenge}a^{\lozenge}=a^{\lozenge}b^{\lozenge}a^{\lozenge}=a^{\lozenge}$$

即 $a\bar{H}a^{\lozenge}ba^{\lozenge}$ 。现只需证， $a^{\lozenge}ba^{\lozenge}\eta b$ 。考虑到， $D^{(l)}$ 是 S 上的半格同余，而 $a^{\lozenge}D^{(l)}b^{\lozenge}$ ，于是

$$\left(a^{\lozenge}ba^{\lozenge}\right)^{\lozenge}D^{(l)}a^{\lozenge}ba^{\lozenge}D^{(l)}b^{\lozenge}bb^{\lozenge}=bL^{(l)}b^{\lozenge}$$

再据引理 3.2，有 $\left(a^{\lozenge}ba^{\lozenge}\right)^{\lozenge}D^{(l)}b^{\lozenge}$ ，即 $\left(a^{\lozenge}ba^{\lozenge}\right)^{\lozenge}\in E\left(b^{\lozenge}\right)$ 。事实上，由上面的证明，知 $a^{\lozenge}ba^{\lozenge}=a^{\lozenge}\circ b\circ a^{\lozenge}=\left(a^{\lozenge}ba^{\lozenge}\right)^{\lozenge}\circ b\circ\left(a^{\lozenge}ba^{\lozenge}\right)^{\lozenge}$ ，从而 $a^{\lozenge}ba^{\lozenge}\eta b$ ，即 $a\bar{H}\circ\eta b$ ，故 $D^{(l)}\subseteq\bar{H}\circ\eta$ 。综上， $D^{(l)}=\bar{H}\circ\eta$ 。

3) 设 ρ 是 S 上的 C-rpp 半群同余，那么 S/ρ 是 C-rpp 半群。令 $a,b\in S$ ，且 $(a,b)\in\eta$ ，则由引理 3.1，知存在 $a^{\lozenge}\in E\left(b^{\lozenge}\right)$ 使得 $a=a^{\lozenge}ba^{\lozenge}$ 。由 $a^{\lozenge}\in E\left(b^{\lozenge}\right)$ ，知 $E\left(a^{\lozenge}\right)\subseteq E\left(b^{\lozenge}\right)$ ；同理， $E\left(b^{\lozenge}\right)\subseteq E\left(a^{\lozenge}\right)$ 于是 $E\left(a^{\lozenge}\right)=E\left(b^{\lozenge}\right)$ 。注意到， S/ρ 是 C-rpp 半群，则 $a^{\lozenge}\rho$ ， $b^{\lozenge}\rho$ 在 S/ρ 的中心中，从而

$$\begin{aligned} a\rho &= \left(a^{\lozenge}ba^{\lozenge}\right)\rho = \left(a^{\lozenge}b^{\lozenge}bb^{\lozenge}a^{\lozenge}\right)\rho = \left(a^{\lozenge}\rho\right)\left(b^{\lozenge}\rho\right)\left(b\rho\right)\left(b^{\lozenge}\rho\right)\left(a^{\lozenge}\rho\right) \\ &= \left(b\rho\right)\left(b^{\lozenge}\rho\right)\left(a^{\lozenge}\rho\right)\left(a^{\lozenge}\rho\right)\left(b^{\lozenge}\rho\right) = \left(bb^{\lozenge}a^{\lozenge}a^{\lozenge}b^{\lozenge}\right)\rho = \left(bb^{\lozenge}\right)\rho = b\rho \end{aligned},$$

即$(a,b)\in\rho$。因此$\eta\subseteq\rho$。所以，η为S上最小 C-rpp 半群同余。

半群S上的同余ρ称为幂等元分离的，如果对于任意的$e,f\in E(S)$，若$(e,f)\in\rho$，则$e=f$。幂等元分离同余在半群研究中有非常重要的作用，特别是在正则半群的结构研究中尤为重要。众所周知，对于纯正半群来说，同余ρ为幂等元分离的当且仅当ρ包含于H中。自然会问，对于纯正超 rpp 半群S，是否有S上的同余ρ为幂等元分离的当且仅当$\rho\subseteq\bar{H}$？现在我们不知道，这个问题是否有肯定回答。

定理 3.4 设S为 OS-rpp 半群，则关系

$$\mu=\left\{(a,b)\in S\times S:\left(\forall x\in E(S)\right)xaL^{*}xb,ax\bar{\mathfrak{R}}bx\right\}$$

为S上含于$\bar{H}$的最大幂等元分离同余。

证明 考虑到L^{*}和$\bar{\mathfrak{R}}$为等价关系，不难知道，μ是S上的等价关系。

令$a,b,c\in S$，且$(a,b)\in\mu$，则对于任意的$x\in E(S)$，都有$xaL^{*}xb,\ ax\bar{\mathfrak{R}}bx$。因为$L^{*}$是右同余，$\bar{\mathfrak{R}}$是左同余，所以

$$xcaL^{*}(xc)^{\lozenge}aL^{*}(xc)^{\lozenge}bL^{*}xcb$$

且$cax\bar{\mathfrak{R}}cbx$，从而$(ca,cb)\in\mu$；类似地，$(ac,bc)\in\mu$。所以μ是S上的同余。

设$(e,f)\in\mu\cap E(S)\times E(S)$，则对于任意的 $x\in E(S)$，都有$xeL^{*}xf,\ ex\bar{\mathfrak{R}}fx$，特别地，取$x=e$，则$eL^{*}ef$，$e\bar{\mathfrak{R}}fe$，进而$eLef$，$e\mathfrak{R}fe$，从而$e=eef=ef=efe$，由此，$eLfe$，故$eHfe$，这样$e=fe$；取$x=f$，则有$feL^{*}f$，$ef\bar{\mathfrak{R}}f$，进而$feLf$，$ef\mathfrak{R}f$，从而$f=ffe=fe=e$。故$\mu$为幂等元分离同余。

现证，$\mu\subseteq\bar{H}$。设$(a,b)\in\mu$，则$a=a^{\lozenge}aL^{*}a^{\lozenge}b$，$a=aa^{\lozenge}\bar{\mathfrak{R}}ba^{\lozenge}$；类似地，$bL^{*}b^{\lozenge}a$，$b\bar{\mathfrak{R}}ab^{\lozenge}$，再据$L^{*}$为$S$上的右同余，$\bar{\mathfrak{R}}$是$S$上的左同余，有

$$aL^{*}a^{\lozenge}bL^{*}ab,\ bL^{*}b^{\lozenge}aL^{*}ba,\ b\bar{\mathfrak{R}}ab^{\lozenge}\bar{\mathfrak{R}}ab。$$

于是$(a,b)\in L^{*}\circ\bar{\mathfrak{R}}=D^{(l)}$。

下证，$aL^{*}ba$。事实上，对任意的$x,y\in S^{1}$，若$ax=ay$，则$bax=bay$；反之，若$bax=bay$，则$b^{\lozenge}ax=b^{\lozenge}ay$。另一方面，我们有$a^{\lozenge}L^{*}aD^{(l)}bL^{*}b^{\lozenge}$，但每个$D^{(l)}$-类最多包含一个正则$D$-类([8]，Lemma 2.5)，则有$a^{\lozenge}Db^{\lozenge}$，从而由引理 3.2，知在带$E(S)$中，$a^{\lozenge}Db^{\lozenge}$，进而$a^{\lozenge}=a^{\lozenge}b^{\lozenge}a^{\lozenge}$，从而

$$ax=a^{\lozenge}ax=a^{\lozenge}b^{\lozenge}a^{\lozenge}ax=a^{\lozenge}b^{\lozenge}ax=a^{\lozenge}b^{\lozenge}ay=a^{\lozenge}ay=ay$$

因此，$aL^{*}ba$，从而$aL^{*}baL^{*}b$。事实上，$a^{\lozenge}=a^{\lozenge}b^{\lozenge}a^{\lozenge}$蕴涵着$a^{\lozenge}\mathfrak{R}a^{\lozenge}b^{\lozenge}$，再据引理 2.3，有$a^{\lozenge}\mathfrak{R}a^{\lozenge}b^{\lozenge}=\left(a^{\lozenge}b^{\lozenge}\right)^{\lozenge}=(ab)^{\lozenge}$，从而$a\bar{\mathfrak{R}}ab$，故$a\bar{\mathfrak{R}}ab\bar{\mathfrak{R}}b$。现在$a\bar{H}b$，于是$\mu\subseteq\bar{H}$。

最后，证明：μ是包含于$\bar{H}$中的最大幂等元分离同余。设ρ是S上含于$\bar{H}$的幂等元分离同余。若$(a,b)\in\rho$，则对于任意的$x\in E(S)$，都有

$$(xa,xb),(ax,bx)\in\rho$$

于是$(xa,xb)\in\bar{H}\subseteq L^{*}$，$(ax,bx)\in\bar{H}\subseteq\bar{\mathfrak{R}}$，从而，$(a,b)\in\mu$，故$\rho\subseteq\mu$。

综上所述，μ是S上的包含于$\bar{H}$最大幂等元分离同余。

半群S上的同余ρ称为左消幺半群同余，如果S/ρ是左消幺半群。左消幺半群是最简单的 rpp 半群，也是 rpp 半群的重要组件，因此研究 rpp 半群上的左消幺半群同余是有重要意义的。

定理 3.5 令S为 OS-rpp 半群，则关系

$$\sigma=\left\{(a,b)\in S\times S:\left(\exists e\in E(S)\right)eae=ebe\right\}$$

为 S 上的最小左消去同余。

证明 显然，σ 满足反身性和对称性。令 $a,b,c\in S$，且 $(a,b),(b,c)\in\sigma$，则存在 $e,f\in E(S)$ 使得 $eae=ebe$，$fbf=fcf$。注意到，η 为 C-rpp 半群同余，所以 $e\eta,f\eta$ 在 S/η 的中心。由此，我们有

$$\begin{aligned}e\eta\circ a\eta\circ f\eta&=e\eta\circ a\eta\circ e\eta\circ f\eta=(eae)\eta\circ f\eta=(ebe)\eta\circ f\eta=e\eta\circ b\eta\circ e\eta\circ f\eta\\&=e\eta\circ b\eta\circ f\eta=e\eta\circ f\eta\circ b\eta\circ f\eta=e\eta\circ f\eta\circ c\eta\circ f\eta=e\eta\circ c\eta\circ f\eta\end{aligned}$$

于是 $eaf=(eaf)^{\lozenge}ecf(eaf)^{\lozenge}$，进而 $f(eaf)^{\lozenge}e\circ a\circ f(eaf)^{\lozenge}e=f(eaf)^{\lozenge}e\circ c\circ f(eaf)^{\lozenge}e$，这说明，$\sigma$ 是传递的。从而 σ 是等价关系。

现证，σ 是相容的。为此，设 $x,y,u,v\in S$，且 $(x,y),(u,v)\in\sigma$，则存在 $g,h\in E(S)$ 使得 $gxg=gyg,huh=hvh$。由于 $g\eta,h\eta$ 在 S/η 的中心，有

$$\begin{aligned}(gxuh)\eta&=g\eta\circ x\eta\circ u\eta\circ h\eta=g\eta\circ x\eta\circ g\eta\circ h\eta\circ u\eta\circ h\eta=(gxg)\eta\circ(huh)\eta\\&=g\eta\circ x\eta\circ g\eta\circ h\eta\circ u\eta\circ h\eta=(gxg)\eta\circ(huh)\eta=(gyvh)\eta\end{aligned},$$

这样，$gxuh=(gxuh)^{\lozenge}gyvh(gxuh)^{\lozenge}$，于是 $h(gxuh)^{\lozenge}g\circ xu\circ h(gxuh)^{\lozenge}=h(gxuh)^{\lozenge}g\circ yv\circ h(gxuh)^{\lozenge}$，从而 $(xu,yv)\in\sigma$，故 σ 是相容的，即 σ 是 S 上的同余。

若 $(ax,ay)\in\sigma$，则有 $\kappa\in E(S)$ 使得 $kaxk=kayk$，于是 $(ka)^{\lozenge}xk=(ka)^{\lozenge}yk$，进而 $k(ka)^{\lozenge}\circ x\circ k(ka)^{\lozenge}=k(ka)^{\lozenge}\circ y\circ k(ka)^{\lozenge}$，从而 $(x,y)\in\sigma$，这意味着，S/σ 是左消半群，而 S/σ 有幂等元，易知，S/σ 是左消幺半群，即 σ 是左消幺半群同余。

设 ρ 为 S 上左消半群同余。若 $(x,y)\in\sigma$，则有 $l\in E(S)$ 使 $lxl=lyl$。注意到，$l\rho$ 是 S/ρ 的恒等元，所以 $x\rho=(lxl)\rho=(lyl)\rho=y\rho$，因此 $\sigma\subseteq\rho$，故 σ 为 S 上的最小左消去同余。

4. 性质和特征

令 S 为半群，$a\in S$。记 $I^{(l)}(a)=\left\{x\in J^{(l)}(a):(x,a)\notin J^{(l)}\right\}$。不难验证，$I^{(l)}(a)$ 是 $J^{(l)}(a)$ 的理想。称 Rees 商半群 $J^{(l)}(a)/I^{(l)}(a)$ 为由 a 确定的 S 的 (l)-主因子。事实上，$J^{(l)}(a)/I^{(l)}(a)$ 是半群 $\left(J_a^{(l)}\cup\{0\},*\right)$，其运算定义如下：

$$x*y=\begin{cases}xy & \text{如果 } x,y,xy\in J_a^{(l)}\\ 0 & \text{否则,}\end{cases}$$

其中 xy 为 x 和 y 在 S 中的积。

引理 4.1 令 S 为 rpp 半群，$a\in S$，则 (l)-主因子 $J^{(l)}(a)/I^{(l)}(a)$ 为 rpp 半群。

证明 仅需证明，$J^{(l)}(a)/I^{(l)}(a)=\left(J_a^{(l)}\cup\{0\},*\right)$ 的非零元素 x 是否与某幂等元有 L^* 关系。显然，$x\in J_a^{(l)}$，即 $xJ^{(l)}a$。由于 S 是 rpp 半群，存在 $x^*\in E(S)$ 满足 xL^*x^*，且可能 $x^*\neq 0$（否则，$x=xx^*\notin J_a^{(l)}$ 矛盾）。于是，$x^*L^*xJ^{(l)}a$。由 $L^*=L^{(l)}\subseteq J^{(l)}$，知 $x^*\in J_a^{(l)}$，现易知，在半群 $J^{(l)}(a)/I^{(l)}(a)$ 中，xL^*x^*。从而 (l)-主因子 $J^{(l)}(a)/I^{(l)}(a)$ 为 rpp 半群。

令 S 为半群。在集合 $S^0=S\cup\{0\}$ 上，定义运算：

$$x\circ y=\begin{cases}xy & \text{如果 } x,y\in S;\\ 0 & \text{否则}\end{cases}$$

其中 xy 为 x 和 y 在 S 中的积。易知，$(S^0,\circ)$ 为以 0 为零元的半群。我们称之为半群 S 附加零元。如[9]，称(左零带；右零带)矩形带和左消幺半群的直积为(左零左消板；右零左消板)左消板(left cancellative plank)。

引理 4.2[10] 设 S 为强 rpp 半群，则下列各款等价：

1) S 是 OS-rpp 半群；

2) S 上的关系：

$$\pi=\left\{(a,b)\in S\times S \middle| \left(a^{\Diamond},b^{\Diamond}\right)\in D^{E(S)}\right\}$$

是半格同余；

3) S 是左消板的半格。

定理 4.3 令 S 为超 rpp 半群，则 S 为 $OS-rpp$ 半群当且仅当

1) S 的每个 (l)-主因子为左消板或左消板附加零元；

2) 对任意的 $e,f\in E(S)$，$(ef)^{\Diamond}e\in E(S)$ 且 $(ef)^{\Diamond}eR(ef)^{\Diamond}$。

证明 设 S 为 OS-rpp 半群，那么 $J^{(l)}=D^{(l)}$ 是 S 上的半格同余。据引理 4.2，可以假设 S 为左消板 $P_{\alpha}(\alpha\in Y)$ 的半格。显然，对于任意的 $\alpha\in Y$，P_{α} 的所有幂等元在 S 的同一个 D-类。另一方面，由 S 为左消板 $P_{\alpha}(\alpha\in Y)$ 的半格，知 S 的任一 J-类包含在某个 P_{α}，因此 $D\subseteq U_{\alpha\in Y}P_{\alpha}\times P_{\alpha}$。

下证，$D^{(l)}=U_{\alpha\in Y}P_{\alpha}\times P_{\alpha}$。事实上，对任意的 $(a,b)\in D^{(l)}$，由 $a^{\Diamond}D^{(l)}aD^{(l)}bD^{(l)}b^{\Diamond}$，知 $a^{\Diamond}D^{S}b^{\Diamond}$，再由引理 3.2，知 $a^{\Diamond}D^{E(S)}b^{\Diamond}$，当然，$a^{\Diamond}Db^{\Diamond}$，于是存在 $\alpha\in Y$ 使得 $a^{\Diamond},b^{\Diamond}\in P_{\alpha}$。注意到，所有 P_{β} 都是 rpp 半群，再据[8]，Lemma 6.4，有 $a,b\in P_{\alpha}$，从而 $(a,b)\in P_{\alpha}\times P_{\alpha}$，进而 $D^{(l)}\subseteq U_{\alpha\in Y}P_{\alpha}\times P_{\alpha}$。反过来，若 $(a,b)\in U_{\alpha\in Y}P_{\alpha}\times P_{\alpha}$，据[8]，Lemma 6.4，有 $a^{\Diamond},b^{\Diamond}\in P_{\alpha}$，由前面的证明，我们有 $a^{\Diamond}Db^{\Diamond}$，显然 $a^{\Diamond}D^{S}b^{\Diamond}$，故 $aD^{(l)}b$。故 $D^{(l)}=U_{\alpha\in Y}P_{\alpha}\times P_{\alpha}$。这样，S 的任一 $J^{(l)}$-类恰好为某个 P_{α}。

对任意的 $a\in S$，由 a 来确定的 S 的 (l)-主因子 $J^{(l)}(a)/I^{(l)}(a)=J_{a}^{(l)}\cup\{0\}$ 或 J_{a}^{*}，而上面的证明告知，$J_{a}^{(l)}$ 为某个 P_{α}，从而 $J^{(l)}(a)/I^{(l)}(a)$ 为 P_{α}^{0} 或 P_{α}。这意味着条件(1)成立。令 $e,f\in E(S)$，则 $ef\in E(S)$。显然 $(ef)^{\Diamond}=ef$，由于 $E(S)$ 是带，易知 $efe\mathfrak{R}ef$，从而 $(ef)^{\Diamond}e\mathfrak{R}(ef)^{\Diamond}$。

为证充分性，仅需证明：当条件(1)和(2)满足时，$E(S)$为带。令 $e,f\in E(S)$，由条件(2)，知 $(ef)^{\Diamond}e$ 为幂等元，且包含于 $J_{ef}^{(l)}$。另一方面，由 $eff=ef$，知 $(ef)^{\Diamond}f=(ef)^{\Diamond}$，于是 $f(ef)^{\Diamond}L(ef)^{\Diamond}$，且 $f(ef)^{\Diamond}$ 为幂等元。注意到 $(ef)^{\Diamond}e,f(ef)^{\Diamond}\in E\left(J_{ef}^{(l)}\right)$，再由条件(1)，$ef=(ef)^{\Diamond}e\circ f(ef)^{\Diamond}$ 为 S 的幂等元，从而 $E(S)$ 为带。

定理 4.4 强 rpp 半群 S 为 OS-rpp 半群当且仅当关系 $\nu=\left\{(a,b)\in S\times S: a=a^{\Diamond}ba^{\Diamond}\ \&\ b=b^{\Diamond}ab^{\Diamond}\right\}$ 是 S 上幂等元纯的 C-rpp 半群同余，且保持 $L^{(l)}$-类。

证明 由于引理 3.1 和 2.5，仅需证充分性。现设 ν 是 S 上幂等元纯的 C-rpp 半群同余，且保持 $L^{(l)}$-类。先证，$E(S)$ 为带。对任意的 $e,f\in E(S)$，由 ν 是 C-rpp 半群同余，知 $(ef)\nu(fe)$，于是 $ef=(ef)^{\Diamond}fe(ef)^{\Diamond}$。另一方面，我们有 $ef=ef\circ f$，于是 $(ef)^{\Diamond}=(ef)^{\Diamond}f$，进而 $ef=(ef)^{\Diamond}fe(ef)^{\Diamond}=(ef)^{\Diamond}e(ef)^{\Diamond}=e(ef)=e(ef)^{\Diamond}e(ef)^{\Diamond}$。

由引理 2.3，知 $(ef)^{\Diamond}=\left(e(ef)^{\Diamond}e(ef)^{\Diamond}\right)^{\Diamond}=\left(e(ef)^{\Diamond}\right)^{\Diamond}\left(e(ef)^{\Diamond}\right)^{\Diamond}=\left(e(ef)^{\Diamond}\right)^{\Diamond}$ 进而

$$e(ef)^{\Diamond}=ee(ef)^{\Diamond}=e\left(e(ef)^{\Diamond}\right)^{\Diamond}e(ef)^{\Diamond}=e(ef)^{\Diamond}e(ef)^{\Diamond}\in E(S)$$

于是 $e(ef)^{\Diamond}=\left(e(ef)^{\Diamond}\right)^{\Diamond}$，再由等式(1)，$(ef)^{\Diamond}=e(ef)^{\Diamond}$，从而 $ef=e(ef)^{\Diamond}e(ef)^{\Diamond}=(ef)^{\Diamond}(ef)^{\Diamond}=(ef)^{\Diamond}\in E(S)$, 故 $E(S)$ 是带。

现证，$\nu\subseteq D^{(l)}$。事实上，若 $a\nu b$，则 $a^{\Diamond}\nu L^{(l)}a\nu=b\nu L^{(l)}b^{\Diamond}\nu$，但 S/ν 的每个 $L^{(l)}$-类仅有一个幂等元，于是 $a^{\Diamond}\nu=b^{\Diamond}\nu$，从而 $a^{\Diamond}=a^{\Diamond}b^{\Diamond}a^{\Diamond}$，$b^{\Diamond}=b^{\Diamond}a^{\Diamond}b^{\Diamond}$，这样 $a^{\Diamond}D^{E(S)}b^{\Diamond}$，因此 $aD^{(l)}b$，故 $\nu\subseteq D^{(l)}$。

再证，$D^{(l)}$ 是 S 上的同余。设 $a,b,c\in S$ 且 $(a,b)\in D^{(l)}$，由[8]，Lemma 2.5，知 $a^{\Diamond}Db^{\Diamond}$，再由引理 3.2，知 $a^{\Diamond}D^{E(S)}b^{\Diamond}$，于是 $\left(a^{\Diamond},b^{\Diamond}\right)\in\nu$，但 ν 是同余，$\left(a^{\Diamond}c,b^{\Diamond}c\right)\in\nu\subseteq D^{(l)}$，即 $a^{\Diamond}cD^{(l)}b^{\Diamond}c$。于是 $acL^{(l)}a^{\Diamond}cD^{(l)}b^{\Diamond}cL^{(l)}bc$，因此 $acD^{(l)}bc$，即 $D^{(l)}$ 是 S 上的右同余。

另一方面，由 $\left(a^{\Diamond},b^{\Diamond}\right)\in\nu$ 及 ν 是同余，知 $\left(a,b^{\Diamond}a\right),\left(b,a^{\Diamond}b\right)\in\nu$，进而

$$\left(c^{\Diamond}a,c^{\Diamond}b^{\Diamond}a\right),\left(c^{\Diamond}b,c^{\Diamond}a^{\Diamond}b\right)\in\nu,$$

又由 ν 是 C-rpp 半群同余，知

$$\left(c^{\Diamond}a,b^{\Diamond}ac^{\Diamond}\right)\in\nu\subseteq D^{(l)},\left(c^{\Diamond}b,ba^{\Diamond}c^{\Diamond}\right)\in\nu\subseteq D^{(l)}$$

由引理 2.3，知

$$b^{\Diamond}ac^{\Diamond}L^{(l)}bac^{\Diamond}L^{(l)}\left(ba\right)^{\Diamond}c^{\Diamond}=\left(ba^{\Diamond}\right)^{\Diamond}c^{\Diamond}=\left(b^{\Diamond}a^{\Diamond}\right)^{\Diamond}=b^{\Diamond}a^{\Diamond}c^{\Diamond}L^{(l)}ba^{\Diamond}c^{\Diamond}，$$

从而 $c^{\Diamond}aD^{(l)}c^{\Diamond}b$。注意到，$\left(a,b^{\Diamond}a\right),\left(b,a^{\Diamond}b\right)\in\nu$，进而 $\left(ca,cb^{\Diamond}a\right),\left(cb,ca^{\Diamond}b\right)\in\nu$。考虑到，$\left(a,b\right)\in D^{(l)}$ 及 $\left(a,b^{\Diamond}a\right),\left(b,a^{\Diamond}b\right)\in\nu\subseteq D^{(l)}$，我们有 $\left(b^{\Diamond}a,a^{\Diamond}b\right)\in D^{(l)}$，而上面已证：$D^{(l)}$ 是 S 上的右同余，故 $\left(b^{\Diamond}ac^{\Diamond},a^{\Diamond}bc^{\Diamond}\right)\in D^{(l)}$。因为 ν 是 C-rpp 半群同余，所以

$$\left(b^{\Diamond}ac^{\Diamond},c^{\Diamond}b^{\Diamond}a\right),\left(a^{\Diamond}bc^{\Diamond},c^{\Diamond}a^{\Diamond}b\right)\in\nu\subseteq D^{(l)}，$$

因此 $\left(c^{\Diamond}b^{\Diamond}a,c^{\Diamond}a^{\Diamond}b\right)\in D^{(l)}$。这样，

$$ca^{\Diamond}bL^{(l)}c^{\Diamond}a^{\Diamond}bD^{(l)}c^{\Diamond}b^{\Diamond}aL^{(l)}cb^{\Diamond}a,$$

即 $ca^{\Diamond}bD^{(l)}cb^{\Diamond}a$。故 $caD^{(l)}cb$。因此 $D^{(l)}$ 是 S 上的左同余。

最后，证明：$D^{(l)}$ 是 S 上的半格同余。对任意的 $a\in S$，由 $E\left(S\right)$ 是带及引理 2.3，知

$$aD^{(l)}a^{\Diamond}=a^{\Diamond}a^{\Diamond}=\left(a^{\Diamond}a^{\Diamond}\right)^{\Diamond}=\left(aa\right)^{\Diamond}D^{(l)}a^{2}。$$

由于 ν 是 C-rpp 半群同余，对任意的 $a,b\in S$，总有

$$\left(a^{\Diamond}b,ba^{\Diamond}\right),\left(a^{\Diamond}b^{\Diamond},b^{\Diamond}a^{\Diamond}\right)\in\nu\subseteq D^{(l)}。$$

从而

$$abL^{(l)}a^{\Diamond}bD^{(l)}ba^{\Diamond}L^{(l)}b^{\Diamond}a^{\Diamond}D^{(l)}a^{\Diamond}b^{\Diamond}L^{(l)}ab^{\Diamond}D^{(l)}b^{\Diamond}aL^{(l)}ba，$$

即 $abD^{(l)}ba$。故 $D^{(l)}$ 是 S 上的半格同余，即 S 是超 rpp 半群。

综上所述，S 是 OS-rpp 半群。

5. 左 C-rpp 半群和右 C-rpp 半群

本节我们将给出左 C-rpp 半群和右 C-rpp 半群的一些刻画。

强 rpp 半群 S 称为左 C-rpp 半群，如果 L^{*} 是 S 上的半格同余。[4]中，郭聿琦，K. P. Shum，朱聘瑜指出，rpp 半群为左 C-rpp 半群当且仅当它同构于左零左消板的半格。郭小江，郭聿琦，K. P. Shum[4]证明了：半群为左 C-rpp 半群当且仅当它是 OS-rpp 半群，且其幂等元带为左正则带。

基于上面的讨论，运用定理 4.3，我们可以证明：

定理 5.1 令 S 为超 rpp 半群，则 S 为左 C-rpp 半群半群当且仅当

1) S 的每个 $\left(l\right)$-主因子为左零左消板或左零左消板附加零元；

2) 对任意的 $e,f\in E\left(S\right)$，$\left(ef\right)^{\Diamond}e\in E\left(S\right)$ 且 $\left(ef\right)^{\Diamond}e\mathfrak{R}\left(ef\right)^{\Diamond}$。

证明(必要性)设 S 为左 C-rpp 半群。可以假设 S 是左零左消板 $L_{\alpha}\left(\alpha\in Y\right)$ 的半格。类似于定理 4.3 的证明，S 的 $\left(l\right)$-主因子为 L_{α} 或 L_{α}^{0}，于是条件(1)成立。条件(2)可由定理 4.3 直接得到。

(充分性)设定理的条件满足。由定理 4.3，知 S 为 OS-rpp 半群。而条件(1)蕴含 S 的每个 $D^{(l)}$-类为左零左消板，从而其幂等元组成左零带，进而 $E\left(S\right)$ 是左零带的半格，这意味着，$E\left(S\right)$ 是左正则带，故 S 为左 C-rpp 半群。

引理 5.2[15] 令 S 是强 rpp 半群且其幂等元集 $E\left(S\right)$ 构成左正则带，则 S 是左 C-rpp 半群当且仅当关系

$$\tau = \left\{ (x, y) \in S \times S : \left(\exists e \in E\left(y^{\lozenge} \right) \right) x = ey \right\}$$

是 S 上的 C-rpp 半群同余，且保持 $L^{(l)}$ -类。

利用引理 5.2，类似于定理 4.4 的证明，我们可以证明如下的关于左 C-rpp 半群的特征定理，这里省略其详细证明。

定理 5.3 强 rpp 半群 S 为左 C-rpp 半群当且仅当的关系

$$\tau' = \left\{ (a, b) \in S \times S : a = a^{\lozenge} b \ \& \ b = b^{\lozenge} a \right\}$$

是 S 上幂等元纯的 C-rpp 半群同余，且保持 $L^{(l)}$ -类。

强 rpp 半群 S 称为右 C-rpp 半群，如果(1)对于任意的 $e \in E(S), Se \subseteq Se$；2) $D^{(l)}$ 是 S 上的半格同余。郭小江，郭聿琦，K. P. Shum[14]证明了：半群为右 C-rpp 半群当且仅当它是 OS-rpp 半群，且其幂等元带为右正则带。

类似定理 5.1，我们可以证明：

定理 5.4 令 S 为超 rpp 半群，则 S 为右 C-rpp 半群当且仅当

1) S 的每个 (l) -主因子为右零左消板或右零左消板附加零元；

2) 对任意的 $e, f \in E(S), (ef)^{\lozenge} e \in E(S)$ 且 $(ef)^{\lozenge} e \Re (ef)^{\lozenge}$。

事实上，我们有

引理 5.5[7] 令 S 是强 rpp 半群且其幂等元集 $E(S)$ 构成带，则 S 是右 C-rpp 半群当且仅当关系

$$\xi = \left\{ (x, y) \in S \times S : \left(\exists f \in E\left(y^{\lozenge} \right) \right) x = yf \right\}$$

是 S 上的 C-rpp 半群同余，且保持 $L^{(l)}$ -类。

类似于定理 4.4，下面定理成立。这里我们省略详细证明。

定理 5.6 强 rpp 半群 S 为右 C-rpp 半群当且仅当关系

$$\xi' = \left\{ (a, b) \in S \times S : a = ba^{\lozenge} \ \& \ b = ab^{\lozenge} \right\}$$

是 S 上幂等元纯的 C-rpp 半群同余，且保持 $L^{(l)}$ -类。

6. 结论

对照纯正半群，本文建立纯正超 rpp 半群的新性质和刻画。利用这些性质，我们很容易获得纯正完全正则半群的相关性质(为显然推论，此处不列出)，而事实上并没看到这些性质的文字记载。同时，也得到了左 C-rpp 半群和右 C-rpp 半群的一些新刻画，丰富了这两种半群已有的结果。

参考文献 (References)

[1] J. B. Fountain. Right pp semigroup with central idempotents. Semigroup Forum, 1976, 13: 229-237.
[2] J. B. Fountain. Abundant semigroups. Proceedings of the London Mathematical Society, 1982, 44(3): 103-129.
[3] M. Petrich, N. R. Reilly. Completely regular semigroups. Hoboken: John Wiley&Sons, INC., 1999.
[4] Y. Q. Guo, K. P. Shum and P.Y. Zhu. The structure of left C-rpp semigroups. Semigroup Forum, 1995, 50(1): 9-23.
[5] Y. Q. Guo. The right dual of left C-rpp semigroups. Chinese Science Bulletin, 1997, 42: 1599-1603.
[6] K. P. Shum, X. M. Ren. The structure of right C-rpp semigroups. Semigroup Forum, 2004. 68(2): 280-292.
[7] X. J. Guo, C. C. Ren and K. P. Shum. Dual wreath product structure of right C-rpp semigroup. Algebra Colloquium, 2007, 2: 285-294.
[8] X. J. Guo, Y. B. Jun and M. Zhao. Pseudo-C-rpp semigroups. Acta Mathematica Sinica (English Series), 2010, 26(4): 629-646.
[9] X. J. Guo, K. P. Shum and Y. Q. Guo. Perfect rpp semigroups. Communications in Algebra, 2001, 29(6): 2447-2460.
[10] Y. He, Y. Q. Guo and K. P. Shum. The construction of orthodox super rpp semigroups. Science in China (Series A), 2004, 17: 552-565.
[11] J. B. Fountain. Adequate semigroups. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 1979, 22(2): 113-125.
[12] J. M. Howie. An introduction to semigroup theory. London: Academic Press, 1976.
[13] X. J. Guo, Y. Q. Guo and K. P. Shum. Rees matrix theorem for $D^{(l)}$ -simple strongly rpp semigroups. Asian-European Journal of Mathematics, 2008, 1: 215-223.
[14] X. J. Guo, Y. Q. Guo and K. P. Shum. Super rpp semigroup. Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 2010, 41(4): 505-533.
[15] X. J. Guo, M. Zhao and K. P. Shum. Wreath product structure of left C-rpp semigroups. Algebra Colloquium, 2008, 15(1): 101-108.

