Pure Mathematics 理论数学, 2013, 3, 176-180
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2013.33026 Published Online May 2013 (http://www.hanspub.org/journal/pm.html)

A Note on the Operator Space Projective Tensor Product of C*-Algebras

Jingxian Ji, Peixin Chen

School of Science, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing
Email: jijingxian@yeah.net, chenpx60@126.com

Received: Feb. 24th, 2013; revised: Mar. 11th, 2013; accepted: Mar. 24th, 2013

Abstract: For C*-algebras V and W, we discuss some properties of the Banach*-algebra $V\hat{\otimes}W$. Then, we prove that the operator space projective tensor product of C*-algebras preserves *-homomorphism and a universal property of Banach*-algebra $V\hat{\otimes}W$ will be given. At last, a characterization of the convergence property of dual space $\left(V\hat{\otimes}W\right)^*$ is also obtained.

Keywords: Operator Space; Projective Tensor Product; C*-Algebras

关于 C*-代数的算子空间投影张量积的一个注记

季井先[1]，陈培鑫[2]

南京理工大学理学院，南京
Email: jijingxian@yeah.net, chenpx60@126.com

收稿日期：2013 年 2 月 24 日；修回日期：2013 年 3 月 11 日；录用日期：2013 年 3 月 24 日

摘　要：对于 C*-代数V和W，我们讨论 Banach*-代数$V\hat{\otimes}W$的一些性质。接着我们证明 C*-代数的算子空间投影张量积保持*-同态映射并给出 Banach*-代数$V\hat{\otimes}W$的一个全局性性质。最后得到一个关于对偶空间$\left(V\hat{\otimes}W\right)^*$的收敛性质的刻画。

关键词：算子空间；投影张量积；C*-代数

1. 引言

给定一个 Hilbert 空间H，我们记$B(H)$为H上的所有有界线性算子构成的空间。一个具体的算子空间V就是某$B(H)$的一个闭子空间。对每个自然数$n\in\mathrm{N}$，矩阵空间$M_n(V)$上的算子范数由包含关系：$M_n(V)\subseteq M_n(B(H))=B(H^n)$所决定。在文[1]中 Ruan 给出了算子空间的公理化刻画。给定算子空间V和W，线性映射$\varphi:V\to W$，φ的完全有界范数$\|\varphi\|_{cb}$定义为：$\|\varphi\|_{cb}=\sup\left\{\|\varphi_n\|:n\in\mathrm{N}\right\}$，其中

$$\varphi_n:M_n(V)\to M_n(W):\left(v_{i,j}\right)\mapsto\left(\varphi\left(v_{i,j}\right)\right)。$$

如果$\|\varphi\|_{cb}<\infty$，则称φ为完全有界映射。令$CB(V,W)$记为V到W的完全有界映射全体构成的空间。

Blecher 和 Paulsen 在文[2]，Effors 和 Ruan 在文[3,4]分别独立的介绍了算子空间的算子空间投影张量积理论。Kumar 在文[5]中首先考虑了 C*-代数的算子空间投影张量积。给定 C*-代数V 和W，我们定义代数张量$V\otimes W$ 上的算子空间投影范数$\|\cdot\|_{\wedge}$：对于任意的元素$u\in V\otimes W$，

$$\|u\|_{\wedge}=\inf\left\{\|\alpha\|\|v\|\|w\|\|\beta\|:u=\alpha\left(v\otimes w\right)\beta\right\},$$

其中

$$\alpha\in M_{1,pq},v\in M_{p}\left(V\right),w\in M_{q}\left(W\right),\beta\in M_{pq,1},\quad p,q\text{ 任意。}$$

$V\otimes W$ 在该范数下的完备化空间我们记为$V\hat{\otimes}W$。我们知道 C*-代数的代数张量积存在许许多多 C*-范数，在文[5,6]中作者给出了$V\hat{\otimes}W$ 在*-运算：$v\otimes w\to v^{*}\otimes w^{*}$下只构成一个 Banach*-代数的证明并讨论了$V\hat{\otimes}W$ 的双边理想和中心等问题。虽然$V\hat{\otimes}W$ 不构成一个 C*-代数，但仍有许多良好的性质值得我们进一步研究。

在本文中，我们首先研究 Banach*-代数$V\hat{\otimes}W$ 的一些基础性质。命题 2.2 中我们证明作为 Banach*-代数$V\hat{\otimes}W$ 的子代数$V\hat{\otimes}I_{W},I_{V}\hat{\otimes}W$ 构成 C*-代数且映射$\varphi_{1}:V\to V\hat{\otimes}I_{W}:v\mapsto v\otimes I_{W}$是一个*-同构等距映射，其中$I_{W}$ 分别记为W 的单位元。在文[7]中作者论述了 C*-代数的 min 范数张量积是保持同态映射的，同理我们考虑 C*-代数的算子空间投影张量积。接着我们在定理 2.5 证明 C*-代数的算子空间投影张量积保持*-同态映射，也就是说若V,V',W,W' 都是 C*-代数，映射$\varphi:V\to V'$和$\phi:W\to W'$都是*-同态，则映射$\varphi\otimes\phi:V\otimes W\to V'\otimes W'$能够延拓成一个*-同态映射$\pi:V\hat{\otimes}W\to V'\hat{\otimes}W'$。然后我们在定理 2.7 中我们给出 Banach*-代数$V\hat{\otimes}W$ 的一个全局性性质：若V,V',W 都是 C*-代数，映射$\varphi:V\to W$ 和$\phi:V'\to W$ 是满足φ象中的元素和ϕ象中的元素相交换的*-同态，则一定存在唯一*-同态映射$\pi:V\hat{\otimes}V'\to W$ 使得$\pi\left(v_{1}\otimes v_{2}\right)=\varphi\left(v_{1}\right)\phi\left(v_{2}\right)$，其中$v_{1}\in V,v_{2}\in V'$。最后，在定理 2.8 中我们证明对于任意的元素$S\in\left(V\hat{\otimes}W\right)^{*}$，都存在一个网$\left(S_{n}\right)\in\left(V\hat{\otimes}W\right)^{*}$且满足$\|S_{n}\|\le 2\|S\|$，使得$S_{n}$弱*收敛到$S$。

2. C*-代数的算子空间投影张量积

C*-代数的算子空间投影张量积的定义在引言中已经给出，在此不再重述。另外本文所考虑的 C*-代数都是包含单位元的。

定理 2.1 给定 C*-代数V 和W，$V\hat{\otimes}W$ 在*-运算：$v\otimes w\to v^{*}\otimes w^{*}$下构成一个 Banach*-代数。

证：因为

$$\begin{aligned}&\left(V\hat{\otimes}W\right)\hat{\otimes}\left(V\hat{\otimes}W\right)\\&=\left(V\hat{\otimes}V\right)\hat{\otimes}\left(W\hat{\otimes}W\right)\\&\subset\left(V\otimes_{h}V\right)\hat{\otimes}\left(W\otimes_{h}W\right)\end{aligned}$$

并且映射$m_{V}:V\otimes_{h}V\to V,m_{W}:W\otimes_{h}W\to W$ 都是完全有界的(其中$V\otimes_{h}W$ 为C*-代数V 和W 的Haagerup张量积[8])。从而我们得到映射：

$$m_{V}\otimes m_{W}:\left(V\hat{\otimes}W\right)\hat{\otimes}\left(V\hat{\otimes}W\right)\to\left(V\hat{\otimes}W\right)$$

是完全有界的。特别的，$V\hat{\otimes}W$ 是一个 Banach 代数。

对于任意的元素$u\in V\otimes W$，u 都有分解：

$$u=\alpha\left(v\otimes w\right)\beta$$

其中

$$\alpha\in M_{1,pq},v\in M_p(V),w\in M_q(W),\beta\in M_{pq,1},$$

则$u^*=\beta^*\left(v^*\otimes w^*\right)\alpha^*$。从而根据算子空间投影范数定义得$\|u^*\|_\wedge\le\|\alpha\|\|v\|\|w\|\|\beta\|$，即$\|u^*\|_\wedge\le\|u\|_\wedge$。因为$u$的任意性，用$u^*$替换$u$即得$\|u\|_\wedge\le\|u^*\|_\wedge$。也就是$\|u\|_\wedge=\|u^*\|_\wedge$。

或证若$u\in V\hat{\otimes}W$，则由定义

$$\|u\|_\wedge=\inf\left\{\|\alpha\|\|v\|\|w\|\|\beta\|:u=\alpha(v\otimes w)\beta\right\},$$

其中

$$\alpha\in M_{1,pq},v\in M_p(V),w\in M_q(W),\beta\in M_{pq,1},\quad p,q\text{ 任意},$$

则对u的所有分解$u=\alpha(v\otimes w)\beta$，我们就得到了$u^*$的所有分解：$u^*=\beta^*\left(v^*\otimes w^*\right)\alpha^*$。从而

$$\begin{aligned}\|u^*\|_\wedge&=\inf\left\{\|\beta^*\|\|v^*\|\|w^*\|\|\alpha^*\|:u^*=\beta^*\left(v^*\otimes w^*\right)\alpha^*\right\}\\&=\inf\left\{\|\beta\|\|v\|\|w\|\|\alpha\|:u^*=\beta^*\left(v^*\otimes w^*\right)\alpha^*\right\}\\&=\|u\|_\wedge\end{aligned}。$$

命题 1 的部分证明来源于文[5]。下面我们介绍 Banach*-代数$V\hat{\otimes}W$的一些基础性质。

命题 2.2 给定 C*-代数V和W，I_v,I_W分别记为V和W的单位元。则我们有

1) $\|\cdot\|_\wedge$是一个交叉范数。即对于任意的$v\otimes w\in V\otimes W$，都有$\|v\otimes w\|_\wedge=\|v\|\|w\|$；

2) $V\hat{\otimes}I_W,I_V\hat{\otimes}W$在自然*-运算下构成 C*-代数；

3) 映射$\varphi_1:V\to V\hat{\otimes}I_W,v\mapsto v\otimes I_W$是一个*-同构等距映射。

对称的，映射$\varphi_2:W\to I_V\hat{\otimes}W,w\mapsto I_V\otimes w$也是一个*-同构等距映射。

证：1) 当V和W为算子空间时，由文[9]知$V\hat{\otimes}W$的范数$\|\cdot\|_\wedge$是一个交叉矩阵范数。也就说是对于任意的$v\in M_p(V),w\in M_q(W)$，$\|v\otimes w\|_\wedge=\|v\|\|w\|$。特别的，当$V$和$W$是 C*-代数时，$\|\cdot\|_\wedge$是一个交叉范数。

2) 对于任意的元素$u\in V\hat{\otimes}I_W$，u都可以表示成$u=v\otimes I_W$的形式，其中$v\in V$。从而$u^*=v^*\otimes I_W$。

$$\begin{aligned}\|u^*u\|_\wedge&=\left\|\left(v^*\otimes I_W\right)\left(v\otimes I_W\right)\right\|_\wedge=\left\|v^*v\otimes I_W\right\|_\wedge\\&=\left\|v^*v\right\|=\|v\|^2=\|u\|_\wedge^2\end{aligned}。$$

3) 对于任意的元素$v\in V$，我们有

$$\varphi_1\left(v^*\right)=v^*\otimes I_W=\left(v\otimes I_W\right)^*=\varphi_1(v)^*。$$

另外对任意的元素$v_1,v_2\in V$，

$$\varphi_1\left(v_1v_2\right)=v_1v_2\otimes I_W=\left(v_1\otimes I_W\right)\left(v_2\otimes I_W\right)=\varphi_1\left(v_1\right)\varphi_1\left(v_2\right)。$$

从而映射φ_1是一个*-同构映射。由文[7]我们知道任意一个从 C*-代数映到 Banach*-代数的*-同构映射都是范数增的，也就是象的范数大于等于原象的范数。从而

$$\left\|\varphi_1(v)\right\|_\wedge=\left\|v\otimes I_W\right\|_\wedge\ge\|v\|;$$

而$\left\|v\otimes I_W\right\|_\wedge\le\|v\|\|I_W\|=\|v\|$，则映射$\varphi_1$是一个等距映射。

引理 2.3 对于任意的 C*-代数V和W，若映射$\varphi:V\to W$是一个*-同态，则φ是一个完全压缩映射。

证：首先，显然 C*-代数之间的*-同态φ是一个压缩映射。又因为对每个自然数$n\in\mathrm{N}$，相应的映射$\varphi_n:M_n(V)\to M_n(W)$仍然是一个*-同态，从而$\varphi$就是一个完全压缩映射。

引理 2.4 若V,V',W,W'都是 C*-代数，映射$\varphi:V\to V'$和$\phi:W\to W'$都是*-同态，则映射

$\varphi\otimes\phi:V\otimes W\to V'\otimes W'$ 也是一个*-同态。

证：对于任意的元素 $u\in V\otimes W$，假定 u 有分解：$u=\alpha(v\otimes w)\beta$，其中

$$\alpha\in M_{1,pq},v\in M_p(V),w\in M_q(W),\beta\in M_{pq,1}。$$

则

$$\begin{aligned}\varphi\otimes\phi(u^*)&=\varphi\otimes\phi\left(\beta^*\left(v^*\otimes w^*\right)\alpha^*\right)=\beta^*\left[\varphi_p\left(v^*\right)\otimes\phi_q\left(w^*\right)\right]\alpha^*=\beta^*\left[\varphi_p(v)^*\otimes\phi_q(w)^*\right]\alpha^*\\&=\left(\alpha\left[\varphi_p(v)\otimes\phi_q(w)\right]\beta\right)^*=\left[\varphi\otimes\phi(u)\right]^*\end{aligned}。$$

对于基础张量 $v_1\otimes w_1,v_2\otimes w_2\in V\otimes W$，我们有

$$\begin{aligned}&\varphi\otimes\phi\left[(v_1\otimes w_1)(v_2\otimes w_2)\right]=\varphi\otimes\phi(v_1v_2\otimes w_1w_2)=\varphi(v_1v_2)\otimes\phi(w_1w_2)\\&=\varphi(v_1)\varphi(v_2)\otimes\phi(w_1)\phi(w_2)=\left[\varphi(v_1)\otimes\phi(w_1)\right]\left[\varphi(v_2)\otimes\phi(w_2)\right]=\left[\varphi\otimes\phi(v_1\otimes w_1)\right]\left[\varphi\otimes\phi(v_2\otimes w_2)\right]\end{aligned}$$

综上，映射 $\varphi\otimes\phi:V\otimes W\to V'\otimes W'$ 也是一个*-同态。

上述命题的题设若改成 V,V',W,W' 都是*-代数是仍然成立的。由文[10]我们知道算子空间的投影张量积是保持完全压缩映射和完全商映射的。另外在文[7]中作者论述了 C*-代数的 min 范数张量积是保持同态映射的，同理我们考虑 C*-代数的算子空间投影张量积，下面证明 C*-代数的算子空间投影张量积是保持*-同态映射的。

定理 2.5 若 V,V',W,W' 都是 C*-代数，映射 $\varphi:V\to V'$ 和 $\phi:W\to W'$ 都是*-同态，则映射 $\varphi\otimes\phi:V\otimes W\to V'\otimes W'$ 能够延拓成一个*-同态映射 $\pi:V\hat{\otimes}W\to V'\hat{\otimes}W'$。

证：由引理 4 我们已经知道映射

$$\varphi\otimes\phi:V\otimes W\to V'\otimes W'$$

是一个*-同态，从而我们只需要再证 $\varphi\otimes\phi$ 在 $\|\cdot\|_\wedge$ 下是连续的即可。对于任意的元素 $u\in V\otimes W$，假定 u 有分解：$u=\alpha(v\otimes w)\beta$，其中 $\alpha\in M_{1,pq},v\in M_p(V),w\in M_q(W),\beta\in M_{pq,1}$，则

$$\|\varphi\otimes\phi(u)\|_\wedge=\left\|\alpha\left[\varphi_p(v)\otimes\phi_q(w)\right]\beta\right\|_\wedge\le\|\alpha\|\|\varphi_p(v)\|\|\phi_q(w)\|\|\beta\|\le\|\alpha\|\|v\|\|w\|\|\beta\|。$$

上面第二个不等号我们用到了引理 2.3 的结论。又因为 $\|u\|_\wedge=\inf\left\{\|\alpha\|\|v\|\|w\|\|\beta\|:u=\alpha(v\otimes w)\beta\right\}$，从而 $\|\varphi\otimes\phi(u)\|_\wedge\le\|u\|_\wedge$。即 $\varphi\otimes\phi$ 在 $\|\cdot\|_\wedge$ 下是连续的，从而可以延拓到 $V\hat{\otimes}W$。

下面定理 2.7 我们给出 $V\hat{\otimes}W$ 的一个全局性性质。下述引理可以参考文[11]。

引理 2.6 若 V,V',W 都是*-代数，映射 $\varphi:V\to W$ 和 $\phi:V'\to W$ 是满足 φ 象中的元素和 ϕ 象中的元素相交换的*-同态。则存在唯一*-同态 $\pi:V\otimes V'\to W$ 使得 $\pi(v_1\otimes v_2)=\varphi(v_1)\phi(v_2)$，其中 $v_1\in V,v_2\in V'$。

证：因为映射

$$V\otimes V'\to W:(v_1,v_2)\mapsto\varphi(v_1)\phi(v_2)$$

是一个双线性的，从而可以诱导出一个线性映射 $\pi:V\otimes V'\to W$，容易验证该映射就是满足要求的*-同态映射。

定理 2.7 若 V,V',W 都是 C*-代数，映射 $\varphi:V\to W$ 和 $\phi:V'\to W$ 是满足 φ 象中的元素和 ϕ 象中的元素相交换的*-同态。则存在唯一*-同态 $\pi:V\hat{\otimes}V'\to W$ 使得 $\pi(v_1\otimes v_2)=\varphi(v_1)\phi(v_2)$，其中 $v_1\in V,v_2\in V'$。

证：唯一性显然。另外由引理 2.6 知存在一个*-同态映射 $\pi:V\otimes V'\to W$ 使得

$$\pi(v_1\otimes v_2)=\varphi(v_1)\phi(v_2)，其中 v_1\in V,v_2\in V'。$$

又因为任意一个 Banach*-代数映到 C*-代数的*-同态都是范数不增的，从而对于任意的元素 $u\in V\otimes W$，$\|\pi(u)\|\le\|u\|_\wedge$。即 π 在 $\|\cdot\|_\wedge$ 下是连续的，从而 π 可以延拓到 $V\hat{\otimes}V'$。

下面我们给出 Banach*-代数$V\hat{\otimes}W$的对偶空间$\left(V\hat{\otimes}W\right)^*$中的元素的一个逼近性质。

定理 2.8 给定 C*-代数V和W，对于任意的元素$S\in\left(V\hat{\otimes}W\right)^*$，都存在一个网$\left(S_n\right)\in\left(V\hat{\otimes}W\right)^*$且满足$\|S_n\|\le 2\|S\|$，使得$S_n$弱*收敛到$S$。

证：首先我们有完全等距关系：

$$\left(V\hat{\otimes}W\right)^*\cong CB\left(V,W^*\right)。$$

假定$\lambda:\left(V\hat{\otimes}W\right)^*\to CB\left(V,W^*\right)$，$s\in\left(V\hat{\otimes}W\right)^*$，则$\left[\lambda(s)(v)\right](w)=\langle s,v\otimes w\rangle$并且$\|s\|=\|\lambda(s)\|_{cb}$。

对于任意的元素$S\in\left(V\hat{\otimes}W\right)^*$，就存在相应的$\lambda(S)=T\in CB\left(V,W^*\right)$。由文[6]中的命题 1 知，存在一个网$\left(T_n\right)\in CB\left(V,W^*\right)$，使得$\|T_n\|_{cb}\le 2\|T\|_{cb}$和$\lim_n\|T_n(v)-T(v)\|=0$，对所有$v\in V$。从而$\left(T_n\right)$就决定了一个网$\left(S_n\right)\in\left(V\hat{\otimes}W\right)^*$，另外

$$\|S_n\|=\|T_n\|_{cb}\le 2\|T\|_{cb}=2\|S\|。$$

又因为$\lim_n\|T_n(v)-T(v)\|=0$，则

$$\begin{aligned}&\left\|\left[T_n(v)\right](w)-\left[T(v)\right](w)\right\|\\&=\left\|\langle S_n,v\otimes w\rangle-\langle S,v\otimes w\rangle\right\|\to 0\end{aligned},$$

对任意的$v\in V,w\in W$都成立。即S_n弱*收敛到S。

3. 致谢

本文的写作过程中我们得到了 Ruan 教授的支持和鼓励。另外 Ruan 教授在讨论班中给予了我们许多无私帮助并提出了一些宝贵的意见，在此由衷的表示感谢。

参考文献 (References)

[1] Z. J. Ruan. Subspaces of C*-algebras. Journal of Functional Analysis, 1988, 76: 217-230.
[2] D. P. Blecher, V. I. Paulsen. Tensor product of operator spaces. Journal of Functional Analysis, 1991, 99: 262-292.
[3] E. G. Effros, Z. J. Ruan. On approximation properties for operator spaces. International Journal of Mathematics, 1990, 1(2): 163-187.
[4] E. G. Effros, Z. J. Ruan. Self duality for the Haagerup tensor product and Hilbert space factorization. Journal of Functional Analysis, 1991, 100(2): 257-284.
[5] A. Kumar. Operator space projective tensor product of C*-algebras. Mathematische Zeitschrift, 2001, 237: 211-217.
[6] R. Jain, A. Kumar. Operator space tensor products of C*-algebras. Mathematische Zeitschrift, 2008, 260: 805-811.
[7] M. Takesaki. Theory of operator algebras I. Berlin: Springer Verlag, 1979.
[8] S. D. Allen, A. M. Sinclair and R. R. Smith. The ideal structure of the Haagerup tensor product of C*-algebras. Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, 1993, 1993(422): 111-148.
[9] E. G. Effros, Z. J. Ruan. Operator spaces. London: Mathematical Society Monographs, New Series 23; New York: The Clarenon Press; Oxford: Oxford University Press, 2000.
[10] E. G. Effros, Z.-J. Ruan. A new approach to operator space. Canadian Mathematical Bulletin, 1991, 34(3): 329-337.
[11] G. J. Murphy. C*-algebras and operator theory. Waltham: Academic Press, 1990.