Pure Mathematics 理论数学, 2013, 3, 277-281
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2013.34042 Published Online July 2013 (http://www.hanspub.org/journal/pm.html)

Fixed Point Theorem in Real Analysis and Its Application*

Dan Wang, Yan Liu, Jia An, Kang Yang, Anmin Mao

School of Mathematical Sciences, Qufu Normal University, Qufu
Email: maoam@163.com

Received: May 6th, 2013; revised: May 27th, 2013; accepted: Jun. 5th, 2013

Abstract: We present a result which is used to check the existence and uniqueness of fixed points of a real function. We also give a multiplicity of fixed points and a method of how to divide the interval into several parts, in which only one fixed point exists. Furthermore, we get all the fixed points via iteration method.

Keywords: Fixed Point; Existence and Uniqueness; Iteration Method

实分析中的不动点定理及其应用*

王　丹，刘　岩，安　家，杨　康，毛安民

曲阜师范大学数学科学学院，曲阜
Email: maoam@163.com

收稿日期：2013 年 5 月 6 日；修回日期：2013 年 5 月 27 日；录用日期：2013 年 6 月 5 日

摘　要：本文给出一种判断不动点存在唯一性的结论，同时给出一个关于多个不动点的存在性定理，最后给出一种区间的分法，使得在每个小区间上相应函数存在唯一的不动点，进而确定出不动点的个数，并用迭代的方法求出不动点。

关键词：不动点；存在唯一性；迭代

1. 引言

已知函数 $f(x)$，使方程 $f(x)=x$ 成立的 x 叫做函数 $f(x)$ 的不动点。不动点是数学分析[1]中有趣的内容，同时在非线性分析领域[2]也有广泛的应用。本文将给出不动点定理的存在唯一定理，及多个不动点存在性的定理，并确定在给定区间上不动点的个数。

引理 1.1 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可导，若 $x_0\in[a,b]$ 使得 $f(x_0)\neq 0$，则存在，使得 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap[a,b]$ 上存在反函数。

证明：应用数学分析知识，容易证得结论成立。过程略。

引理 1.2 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且存在不动点。若对 $\forall x\in(a,b)$，有 $f'(x)\neq 1$，则 f 在 $[a,b]$ 上存在唯一的不动点。

证明：采用反证法，即证明如果至少存在两个不动点，则与 f 在 (a,b) 中不存在导数为 1 的点相矛盾。设 x_1，x_2 为 f 的任意两个不动点，不妨设 $x_1<x_2$。

*资助信息：本文得到了曲阜师范大学“国家级大学生创新创业训练计划项目”(编号：201210446003)的资助。

方法一：

1) 当$\left(f'(x_1)-1\right)\left(f'(x_2)-1\right)<0$时，由达布定理得，必存在一个导数值为 1 的点。

2) 当$\left(f'(x_1)-1\right)\left(f'(x_2)-1\right)=0$时，显然存在导数值等于 1 的点。

3) 当$\left(f'(x_1)-1\right)\left(f'(x_2)-1\right)>0$时，即$f'(x_1)>1$且$f'(x_2)>1$，或$f'(x_1)<1$且$f'(x_2)<1$，

情形之一：设$f'(x_1)>1$且$f'(x_2)>1$。

令$F(x)=f(x)-x$，则$F'(x_1)=f'(x_1)-1>0$。故存在一个很小的$\delta_1>0$，使得

$$x\in(x_1,x_1+\delta_1)\text{时，}\ F(x)>0\text{，即}\ f(x)>x\text{。}$$

同理可证存在一个很小的$\delta_2>0$，使得

$$x\in(x_2-\delta,x_2)\text{时，}\ f(x)<x\text{。}\tag{1}$$

下证存在$x_0\in(x_1,x_2)$使得$f'(x_0)<1$。若否，则对$\forall x\in(x_1,x_2)$，有$f'(x)\geq 1$，即$F'(x)\geq 0$，知$F(x)\geq F(x_1)=0$，即$f(x)\geq x$，与上面(1)式矛盾。故存在$x_0\in(x_1,x_2)$使得$f'(x_0)<1$，应用达布定理，知必存在$x\in(x_1,x_0)$使得$f'(x)=1$。与已知假设矛盾。

情形之二：设$f'(x_1)<1$且$f'(x_2)<1$。类似情形之一的证明，同样可得矛盾。

引理 1.3 设$f\in C[a,b]$，$f:[a,b]\to[m,n]$，且$[a,b]\subset[m,n]$，在端点处存在邻域$U_+(a),U_-(b)$，使f在邻域内可导。若满足条件$f(a)\geq a, f(b)\leq b$或$f(a)\leq a, f(b)\geq b$，则$f(x)$必有不动点，若$\left(f'(a)-1\right)\left(f'(b)-1\right)<0$，则可以通过构造新的函数$G(x)=mF(x)+x$把不动点迭代出来，称$m$为压缩系数，满足

$$m\leq\frac{\inf\{b-x_i,x_i-a\}}{|M|+|N|}\text{，}\ M=\sup_{x\in[a,b]}f(x),N=\inf_{x\in[a,b]}f(x)$$

其中，x_i为$f(x)$的不可导点和导数值为零的点。设

$$F(x)=\begin{cases}f(x)-x, & f(a)\geq a, f(b)\leq b\\ -f(x)+x, & f(a)\leq a, f(b)\geq b\end{cases}$$

引理 1.4 设$f(x)$是定义在$[a,b]$上的连续可导函数，且$\left(f(a)-a\right)\left(f(b)-b\right)>0$，记$A=\{x\mid f'(x)=1\}$，若$A=\Phi$或$A\neq\Phi$对$\forall x\in A$，$f(x)\neq x$，且$\left(f(a)-a\right)\left(f(x)-x\right)>0$，则在$[a,b]$中不存在不动点。

证明：若$A=\Phi$，令$g(x)=f(x)-x$，故$g'(x)\neq 0$，$x\in[a,b]$。$g(x)$单调，又$g(a)g(b)>0$，不妨设$g(a)>0$，故$g(x)$在$[a,b]$上恒大于零。故不存在不动点。

若$A\neq\Phi$，由$g(a)g(b)>0$，不妨设$g(a)>0$。反证若在$[a,b]$中至少存在一个不动点，记为ξ_1，则$g'(\xi_1)\neq 0$，且$g'(\xi_1)\neq 0$。不妨设$g'(\xi_1)<0$，则$\exists x_0\in U^+(\xi_1,\delta)$，$g(x_0)<0$，又因为$g(b)>0$，所以$\exists\xi\in(x_0,b)$，使得$g(\xi)=0$。记$\xi_2=\inf\{x\mid g(x)=0,\xi_1<x<b\}$，则$\exists\eta\in(x_0,\xi_2)$，使得$g'(\eta)>0$，(若否，对$\forall x\in(x_0,\xi)$，$g'(x)<0$，因为$g(x_0)<0$，所以$g(\xi_2)<0$，矛盾。故存在$\eta\in(x_0,\xi_2)\cap[a,b]$，使得$g'(\eta)>0$)。因为$g'(x)$在$[a,b]$上连续。所以$\exists\eta_0\in(\xi_1,\eta)$，使得$g'(\eta_0)=0$，$g(\eta_0)=0$，矛盾。故在$[a,b]$中不存在不动点。

2. 主要定理及证明

定理 2.1 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续可导，$f([a,b])\subset[a,b]$，$f(a)\neq a$，$f(b)\neq b$，记$A=\{x\mid f'(x)=1,x\in[a,b]\}$，且对$\forall x\in A$，$f(x)\neq x$。则$f$在$[a,b]$上有有限个不动点。

证明：由定理条件：$f(x)$在$[a,b]$上连续可导，$f([a,b])\subset[a,b]$，$f(a)\neq a$，$f(b)\neq b$，可知$[a,b]$上$f(x)$至少存在一个不动点(可令$F(x)=f(x)-x$，通过连续函数的介值定理立刻可知F有零点，即为$f(x)$的不动点)。令$g(x)=f(x)-x$，$N_g=\{x\mid x\in(a,b),g'(x)=0\}$。则$A=N_g$。对$\forall x\in N_g$，即$x\in A$，$g(x)=f(x)-x\neq 0$，所以$0\notin g(N_g)$，又$g(a)=f(a)-a\neq 0$，$g(b)=f(b)-b\neq 0$，所以$0\notin g(N_g)\cup\{g(a),g(b)\}$。

由 $g(x)$ 定义知，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 内的零点即为 $f(x)$ 的不动点。故只需证 $g(x)=0$ 在 $[a,b]$ 内有有限个解。若不然，假设 $g(x)=0$ 在 $[a,b]$ 内有无穷个解，则它们在 $[a,b]$ 内必有聚点，设为 x_0，显然 $g(x_0)=0$。由于 $g(a),g(b)$ 均不为零，故 $x_0\in(a,b)$。由于 $g(x_0)=0\notin g(N_g)$，所以 $x_0\notin N_g$，$g'(x_0)\neq 0$。则由引理 1 知 $\exists\delta>0$，使得在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 上存在的 $g(x)$ 反函数，即在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内 $g(x)$ 不存在异于 x_0 的零点。这与 x_0 是聚点矛盾。

综上所述 $g(x)=0$ 在 $[a,b]$ 内只有有限个零点，所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上只有有限个不动点。

定义 2.1(不动点的存在唯一区间)若 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的连续可导函数：

1) 满足边值条件 $(f(a)-a)(f(b)-b)<0$；

2) 在区间 (a,b) 中不存在导数为 1 的点。

则在 (a,b) 上只存在唯一一个不动点。称 (a,b) 为不动点的存在唯一区间。

定理 2.2 若函数 $f(x)$ 满足定理 2.1 的条件，则能够给出区间的分法，使得在每个小区间为不动点的存在唯一区间，并将定理 2.1 确定的有限个不动点在对应区间上一一迭代出来。

证明：由定理 2.1 可知，在 $[a,b]$ 上存在有限个不动点。以下 A 如定理 2.1 中定义。

若 A 为空集，则 $f(x)$ 存在唯一的不动点。

若 A 为非空集，现给出以一种不动点的存在唯一区间的分法。确定出不动点的个数。

设 $B=A\cup\{a,b\}$，$B_1=\{x\,|\,(f(a)-a)(f(x)-x)<0,x\in B\text{且}x>a\}$，取 $x_1=\inf B_1$，$\bar{B}_0=\{x\,|\,(f(a)-a)(f(x)-x)>0,x\in B\text{且}a\le x<x_1\}$，取 $\bar{x}_0=\sup\bar{B}_0$，由 $\bar{x}_0,x_1$ 的取法可知，在 $(\bar{x}_0,x_1)$ 内不存在使 $g(x)$ 导数为零的点。(容易验证 $(\bar{x}_0,x_1)$ 为不动点的存在唯一区间)，记 $C_1=A-(a,x_1)$。

若 C_1 为空集或 $g(x_j)g(b)>0,x_j\in C_1\neq\Phi$，(任意 x_j)则由引理 1.4 可知在 (x_1,b) 中不存在不动点。所以 (x_1,b) 中没有不动点的存在唯一区间，则区间的选取结束。故只有区间 $(\bar{x}_0,x_1)$ 为不动点的存在唯一区间。因此在 $[a,b]$ 上存在一个不动点。

若 C_1 不为空集且 $g(x_j)g(b)<0,\text{对}\forall x_j\in C_1$，(存在 x_j,不是任意)，
取 $B_2=\{x\,|\,(f(x_1)-x_1)(f(x)-x)<0,x\in B\text{且}x>x_1\}$，$x_2=\inf B_2$，
$\bar{B}_1=\{x\,|\,(f(x_1)-x_1)(f(x)-x)>0,x\in B\text{且}x_1\le x<x_2\}$，$\bar{x}_1=\sup\bar{B}_1$，

由 $\bar{x}_1,x_2$ 的取法可知，在 $(\bar{x}_1,x_2)$ 内不存在使 $g(x)$ 导数为零的点。(容易验证 $(\bar{x}_1,x_2)$ 为不动点的存在唯一区间)。

记 $C_2=A-(a,x_2)$，

若 C_2 为空集或 $g(x_j)g(b)>0$，对 $\forall x_j\in C_2$，C_2 不为空集，则由引理 1.4 可知在 (x_2,b) 中不存在不动点。故只有 $(\bar{x}_0,x_1)$，$(\bar{x}_1,x_2)$ 为不动点的存在唯一区间。因此在 $[a,b]$ 上存在两个不动点。

若 C_2 不为空集且 $g(x_j)g(b)>0,\text{对}\forall x_j\in C_2$ (存在 x_j，不是任意)，按上述过程依次取

$$B_i=\{x\,|\,(f(x_{i-1})-x_{i-1})(f(x)-x)<0,x\in B\text{且}x>x_{i-1}\}，\text{取 } x_i=\inf B_i，$$

$$\bar{B}_{i-1}=\{x\,|\,(f(x_i)-x_i)(f(x)-x)>0,x\in B\text{且}x_{i-1}\le x<x_i\}，\ \bar{x}_{i-1}=\sup\bar{B}_{i-1}，$$

记 $C_i=A-(a,x_i)$，$i\in N^*$。

由引理 1.2，$f(x)$ 在 $(\bar{x}_{i-1},x_i)$，$i\in N^*$ 上有唯一不动点。因为 $f(x)$ 有有限个不动点，故 $\exists k\in N_+$，使得 C_k 为空集或 $g(x_j)g(b)>0,x_j\in C_k\neq\Phi$ (任意 x_j)，而 $C_i=\Phi,i>k,i\in N^*$。故只有在 $(\bar{x}_{i-1},x_i)$ $i=1,2,3,\cdots,k$ 存在唯一的不动点。由引理 1.4 知在 $(\bar{x}_{i-1},x_i)$ $i=1,2,3,\cdots,k$，及 $(a,\bar{x}_0)$，(x_k,b) 上不存在不动点。(每个区间为不动点的存在唯一区间，所以在每个区间上存在唯一不动点)，从而 $f(x)$ 存在 k 个不动点。显然，在每个区间 $(\bar{x}_{i-1},x_i)$ $i=1,2,3,\cdots,k$ 满足引理 1.3 的条件。故可用迭代格式

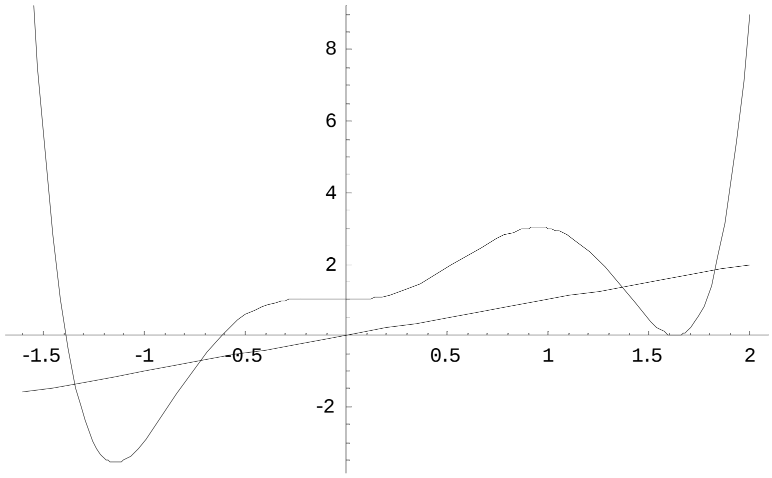
$$x_{n+1}=(1-t_n)x_n+t_nf(x_n)，\quad x_{n+1}=(1-t_n)x_n+t_nG(x_n)$$

将 k 个不动点一一的迭代出。

3. 相关应用

例：求 $f(x)=2x\^6-3x\^5-5x\^4+6x\^3+2x\^2+1$ 在 R 上的不动点。

解：由 $f(x)$ 的图像可知，求 $f(x)$ 在 R 上的不动点，即求 $f(x)$ 在 $[-1.6,2]$ 上的不动点。



显然 $f(x)\in C^2$，$f(-1.6)=13.7877$，$f(2)=9$，$f'(x)=4x+18x\^2-20x\^3-15x\^4+12x\^5$，令 $f(x)=1$ 解得 $x_1=-1.12653,\ x_2=-0.318094,\ x_3=0.158713,\ x_4=0.890493,\ x_5=1.64542$，

$A=\{-1.12653,-0.318094,0.158713,0.890493,1.64542\}$

$B=\{-1.6,2,-1.12653,-0.318094,0.158713,0.890493,1.64542\}$

显然 $f(x_i)\neq x_i$，所以 $f(x)$ 满足定理条件，则有上述定理的区间分法得到四个区间，

$B_1=\{x\mid (f(-1.6)-(-1.6))(f(x)-x)<0, x\in B \text{且} x>-1.6\}$，

取 $x_1=\inf B_1=-1.12653$，$\bar{B}_0=\{x\mid (f(-1.6)-(-1.6))(f(x)-x)>0, x\in B \text{且} -1.6\le x<x_1\}$，

取 $\bar{x}_0=\sup\bar{B}_0=-1.6$，所以第一个区间为 $(-1.6,-1.12653)$。进而第二区间 $(-1.12653,-0.318094)$ 第三区间 $(0.890493,1.64542)$ 第四个区间 $(1.64542,2)$。又因为在每一个区间上不动点是唯一的，所以存在四个不动点。

以下为使用迭代法求不动点的过程

程序如下：

```
Iterate[f_, x0_, n_Integer] :=
    Module[{t = {}, i, temp = x0},
        AppendTo[t, temp];
  For[i = 1, i <= n, i++, temp = (1 - 1/i)*temp + (1/i) f[temp];
        AppendTo[t, temp]]
            t
  ]
f[x_]: = mF(x)+ x
Iterate[f, k1, k2]
```

现对第一个区间 $(-1.6,-1.12653)$ 应用引理 1.3 中的公式进行迭代，步骤如下：

第一步：打开软件 Mathematica4，出现一个空白窗口，将上述程序复制粘贴到该空白窗口内；

第二步：依次输入参数值 k1，m，k2，即将程序中的参数 k1 改为−1.3，m 改为 0.05，k2 改为 1000；另由于 $f(-1.6)>-1.6$，$f(-1.12653)<-1.12653$，故可构造

$$F(x)=2x^6-3x^5-5x^4+6x^3+2x^2-x+1,$$

第三步：将程序中的 $F(x)$改为以下函数表达式：

$$\left(2x\wedge 6-3x\wedge 5-5x\wedge 4+6x\wedge 3+2x\wedge 2-x+1\right)$$

第四步：将光标置于该程序末尾，然后键盘操作：按下 Shift 键，同时按下 Enter 键；

则程序窗口内出现迭代数据行，最后几行重复出现的数据即为迭代结果；本次迭代的迭代结果为−1.34327

对第 2 个区间 $(-1.12653,-0.318094)$ 应用引理 1.3 中的公式进行迭代，选取初值 k1 = −1.0，m = 0.5，k2 = 1000

由于 $f(-1.12653)<-1.12653$， $f(-0.318094)>-0.318094$，因此构造

$$F(x)=-\left(2x^6-3x^5-5x^4+6x^3+2x^2+1\right)+x$$

迭代结果为−0.724959

对第 3 个区间 $(0.890493,1.64542)$ 应用引理 1.3 中的公式进行迭代，选取初值 k1 = 1，m = 0.2，k2 = 500。由于 $f(0.890493)>0.890493$， $f(1.64542)<1.64542$，因此构造

$$F(x)=2x^6-3x^5-5x^4+6x^3+2x^2-x+1$$

迭代结果为 1.36299

对第 4 个区间 $(1.64542,2)$ 应用引理 1.3 中的公式进行迭代，选取初值 k1 = 1.7，m = 0.5，k2 = 1000。由于 $f(1.64542)>1.64542$， $f(2)<2$ 因此构造

$$F(x)=-\left(2x^6-3x^5-5x^4+6x^3+2x^2+1\right)+x$$

迭代结果为 1.82498。

参考文献 (References)

[1] 华东师范大学数学系. 数学分析(上、下)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001.
[2] 郭大均. 非线性泛函分析(第 2 版)[M]. 济南: 山东科学技术出版社, 2001.

