Pure Mathematics 理论数学, 2013, 3, 300-304
http://dx.doi.org/10.12677/PM.2013.35046 Published Online September 2013 (http://www.hanspub.org/journal/pm.html)

The Remark about Fujita Exponent for a Pseudo-Parabolic Equation*

Binqiang Xie, Youdong Zeng

College of Mathematics and Computer Science, Fuzhou University, Fuzhou
Email: xbq211@163.com

Received: Jun. 9th, 2013; revised: Jun. 28th, 2013; accepted: Jul. 8th, 2013

Abstract: In this paper we consider nonnegative solutions to the Cauchy problem for the pseudo-parabolic equation $u_t - \Delta u_t = \Delta u + u^p$. It is well known that $p^* = 1 + \frac{2}{N}$ is the critical exponent of blow up. Namely, if $p < p^*$, then all the nontrivial solutions blow up in finite time (blow-up case), and if $p > p^*$, then there are nontrivial global solutions (global existence case). In this paper we show for the Cauchy problem, p^* belongs to the blow-up case. Because [6], there is something wrong in the proof for p^* belonging to the blow-up case, while [5] the method is too complicate. In the paper we give a new simpler proof for the critical exponent $p^* = 1 + \frac{2}{N}$ which belongs to the blow-up case, moreover we generalize classical solution to the general weak solution case.

Keywords: Pseudo-Parabolic; Cauchy Problem; Blow-Up; Fujita Exponent

伪抛物方程 Fujita 指标的注记*

解斌强，曾有栋

福州大学，数学与计算机科学学院，福州
Email: xbq211@163.com

收稿日期：2013 年 6 月 9 日；修回日期：2013 年 6 月 28 日；录用日期：2013 年 7 月 8 日

摘　要：本文考虑伪抛物方程 $u_t - \Delta u_t = \Delta u + u^p$ 的柯西问题的非负解。对于柯西问题，已经知道 $p^* = 1 + \frac{2}{N}$ 是爆破的临界指标；即当 $p < p^*$，所有的非负非平凡解在有限时刻爆破(爆破情况)，当 $p > p^*$ 时，存在着非平凡的全局解(全局存在情况)。由于文献[6]对于 p^* 是属于爆破的情况的证明有错，而文献[5]对于 p^* 是属于经典解的爆破的情况的证明较繁。本文是对于临界指标 $p^* = 1 + \frac{2}{N}$ 属于爆破的情况给出了一个新且简洁的证明方法且经典解推广到更为一般的弱解。

关键词：伪抛物；柯西问题；爆破；Fujita 指标

1. 引言

在本文中，我们将考虑的是下列伪抛物的柯西问题

*基金项目：福建省自然科学基金项目 Z0511015。

$$\begin{cases} u_t - \Delta u_t = \Delta u + u^p, x \in R^N, t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), x \in R^N \end{cases} \tag{1.1}$$

我们只考虑非负解的情况。如果$u_0(x) \in C^{2+\alpha}(R^N)$，那么至少对于充分小的$T > 0$问题(1.1)存在唯一的经典解。当$T = \infty$，即解$u$是全局的。否则，$u$在有限时刻爆破。后者就意味着，当$t \to T$时，$\sup_{x \in R^N} u(x,t) \to \infty$。

Fujita 在文献[1]($m = 1$)和 Galaktionov 等在文献[2]($m > 1$)中，证明对于下列初边值

$$\begin{cases} u_t = \Delta u^m + u^p, (x,t) \in \Omega \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x), x \in \Omega \\ u(x,t) = 0, (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T) \end{cases} \tag{1.2}$$

的临界指标结论。

a) 当$1 < p < m + \frac{2}{N}$，那么问题(1.2)的所有非负经典解在有限时刻爆破。

b) 当$p > m + \frac{2}{N}$，对于初值充分小，那么问题(1.2)存在全局非负经典解。

情况(a)称之为爆破情况，情况(b)称之为全局存在情况。那么$p_m^* = m + \frac{2}{N}$称之为临界指标。Hayakwa[3]和 Weissler[4]通过证明$p_1^* = m + \frac{2}{N}$是属于爆破的情况完成了 Fujita 的结论。特别是[4]经典解的结论推广到L^p空间弱解。

在文献[5]中，Yang Cao，Jingxue-Yin, Chunpeng Wang 研究了半线性的伪抛物方程的柯西问题：

$$\begin{cases} u_t - k\Delta u_t = \Delta u + u^p, x \in R^N, t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), x \in R^N \end{cases} \tag{1.3}$$

得到了相对应的结论：当$0 < p \le 1$时，所有的非负经典解是全局的；当$p > 1$时，至少存在一个初值使得非负经典解在有限时刻爆破。当$1 < p \le 1 + \frac{2}{N}$，所有的非平凡非负经典解在有限时刻爆破；当$p > 1 + \frac{2}{N}$时，至少存在一个非平凡的全局非负经典解。

由于文献[6]对于p^*是属于爆破的情况的证明有错，而文献[5]对于p^*是属于爆破的情况的证明较繁。本文的工作是对于临界指标$p^* = 1 + \frac{2}{N}$属于爆破的情况给出了一个不同于文献[5]的新且简洁的证明方法。在接下来的文章中，为了不失一般性，由比较原理，我们假设$u_0(x)$的定义域是属于R^N的一个紧子集中，即$u_0(x) \in C_0(R^N)$。

对于方程(1.3)的局部存在性，唯一性和比较原理都与文献[5]一样，这里就不再重复说明。

下面我们给出文章的主要结论：

定理 1：当$p^* = 1 + \frac{2}{N}$，问题(1.3)的所有非负非平凡解在有限时刻爆破。

2. 相关的定义及引理

首先我们先给出问题(1.3)弱解的定义。

定义 2.1：如果函数$u(x,t) \in R^N \times (0,T)$满足下列两个条件，则称之为方程(1.3)在$R^N \times (0,T)$的解：

a) $u(x,t) \ge 0$且$u(x,t) \in BC(R^N \times (0,T'))$，对于任意的$0 < T' < T$。

b) 存在一试验函数$\varphi(x) \in C_0^\infty(R^N)$并满足下列方程：

$$\begin{aligned}&\int_{R^N}u(x,t)\varphi\mathrm{d}x-\int_{R^N}u(x,0)\varphi\mathrm{d}x=\int_{R^N}u(x,t)\Delta\varphi\mathrm{d}x-\int_{R^N}u(x,0)\Delta\varphi\mathrm{d}x\\&-\left(\int_{\partial R^N}u(x,t)\partial_n\varphi\mathrm{d}s-\int_{\partial R^N}u(x,0)\partial_n\varphi\mathrm{d}s\right)+\int_0^t\int_{R^N}u\Delta\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\int_0^t\int_{\partial R^N}u\partial_n\varphi\mathrm{d}s\mathrm{d}t+\int_0^t\int_{R^N}u^p\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t\end{aligned}\tag{2.1}$$

假设存在一组$\{\lambda,\varphi(x)\}$，满足下列的条件：

$$\begin{aligned}&\lambda\ge 0,\varphi(x)\in C^2\left(R^N\right),\ \varphi(x)>0\text{ in }R^N,\ \int_{R^N}\varphi\mathrm{d}x=1\\&\partial_n\varphi\ge -c,\ \Delta\varphi(x)\ge-\lambda\varphi(x)\text{ in }R^N,\ \varphi(x)=0\text{ on }\partial R^N\end{aligned}\tag{2.2}$$

命题 2.2：令u是问题(1.3)的解，且初值$u_0(x)\in C_0\left(R^N\right)$，则$u(.,t)\in L^1\left(R^N\right)$对每一个时刻$t$，$0<t<T$

证明：用文献[7]方法易证。

定义$J(t)=\int_{R^N}u\varphi\mathrm{d}x$

命题 2.3：令u是问题(1.3)的解，如果初始值u_0够大使得满足

$$J(0)>\lambda^{1/(p-1)},\tag{2.3}$$

则u不能全局存在。

证明：选择(2.1)中的试验函数$\varphi(x)$满足(2.2)，则根据弱解的定义由：

$$\int_{R^N}u(x,t)\varphi\mathrm{d}x-\int_{R^N}u(x,0)\varphi\mathrm{d}x\ge\int_{R^N}u(x,t)\Delta\varphi\mathrm{d}x+\int_0^t\int_{R^N}u\Delta\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^t\int_{R^N}u^p\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

因此：

$$\int_{R^N}u(x,t)\varphi\mathrm{d}x-\int_{R^N}u(x,0)\varphi\mathrm{d}x\ge-\lambda\int_{R^N}u\varphi\mathrm{d}x-\lambda\int_0^t\int_{R^N}u\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^t\left(\int_{R^N}u\varphi\mathrm{d}x\right)^p\mathrm{d}t$$

令$J(t)=\int_{R^N}u\varphi\mathrm{d}x$

$$J(t)\ge\frac{J(0)}{1+\lambda}+\frac{1}{1+\lambda}\int_0^t\left(-\lambda J(t)+J^p(t)\right)\mathrm{d}t\equiv\alpha(t)\tag{2,4}$$

令$\Gamma(\xi)=\begin{cases}-\lambda\xi+\xi^p, & \xi\ge\left(\dfrac{\lambda}{p}\right)^{1/(p-1)}\\ -(p-1)\left(\dfrac{\lambda}{p}\right)^{p/(p-1)}, & 0\le\xi<\left(\dfrac{\lambda}{p}\right)^{1/(p-1)}\end{cases}$，由于当$\xi\ge\left(\dfrac{\lambda}{p}\right)^{1/(p-1)}$时，$\Gamma(\xi)>0$，由$J(t)$的连续性和(2.3)得到，如果选择$t_0$充分小，那么在$0\le t<t_0$，$J(t)>\lambda^{1/(p-1)}$。接下来将证明只要$J(t)$存在，都满足$J(t)>\lambda^{1/(p-1)}$。

假设存在$t\ge t_0$使得$J(t)\le\lambda^{1/(p-1)}$。令τ_0是满足条件的最小值.当$t=\tau_0$不等式(2.4)得到矛盾，因为$\int_0^{\tau_0}\Gamma(J(t))\mathrm{d}t>0$。上述的结果表明对于任意的$\tau$，$\alpha(\tau)\ge J(0)$。而且，由于在$\xi>\lambda^{1/(p-1)}$，$\Gamma(\xi)$是递增的，由(2.4)可知，$\Gamma(J(t))\ge\Gamma(\alpha(t))>0$。在不等式$\dfrac{\Gamma(J(t))}{\Gamma(\alpha(t))}\ge 1$的两边在$(0,t)$上积分，则有

$$t\le\int_{J(0)}^{\alpha(t)}\frac{\mathrm{d}\xi}{\Gamma(\xi)}\le\int_{J(0)}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\xi}{-\lambda\xi+\xi^p}<\infty,$$

则u不能全局存在。

引理 2.4：假设 u 是全局存在的，则有$I=\int_{R^N}u(x,t)\mathrm{e}^{-\varepsilon|x|^2}\mathrm{d}x\le C_0(N)\varepsilon^{-\frac{N}{2}+\frac{1}{p-1}}$，对于任意的$t\ge 0$，其中$C_0(N)=\pi^{\frac{N}{2}}(2N)^{\frac{1}{p-1}}$。

证明：选择试验函数$\varphi(x)=\pi^{-\frac{N}{2}}\varepsilon^{\frac{N}{2}}\mathrm{e}^{-\varepsilon|x|^2},\lambda=2N\varepsilon$，由命题 2.2 可知：

$$J\left(0\right)=\int_{R^N}u_{02N\varepsilon}\left(x\right)\pi^{-\frac{N}{2}}\varepsilon^{\frac{N}{2}}\mathrm{e}^{-\varepsilon|x|^2}\mathrm{d}x>\left(2N\varepsilon\right)^{\frac{1}{p-1}}$$

即：$J\left(0\right)=\int_{R^N}u_0\left(x\right)\mathrm{e}^{-\varepsilon|x|^2}\mathrm{d}x>\pi^{\frac{N}{2}}\varepsilon^{-\frac{N}{2}}\left(2N\varepsilon\right)^{\frac{1}{p-1}}=C_0\left(N\right)\varepsilon^{-\frac{N}{2}+\frac{1}{p-1}}$。

则每一个全局解满足相反的式子，即：$I=\int_{R^N}u\left(x,t\right)\mathrm{e}^{-\varepsilon|x|^2}\mathrm{d}x\le C_0\left(N\right)\varepsilon^{-\frac{N}{2}+\frac{1}{p-1}}$。

引理 2.5：假设 u 是全局的，那么

a) 当$1<p<1+\dfrac{2}{N}$，对于任意的$t\ge 0$，$\int_{R^N}u\left(x,t\right)\mathrm{d}x=0$，

b) 当 $p=1+\dfrac{2}{N}$，对于任意的$t\ge 0$，$\int_{R^N}u\left(x,t\right)\mathrm{d}x\le C_0\left(N\right)=\left(2N\pi\right)^{N/2}$。

证明：(a)由于$u\left(\cdot,t\right)\in L^1\left(R^N\right)$，此时$-\dfrac{2}{N}+\dfrac{1}{p-1}>0$，由 Lebesgue 控制收敛定理得到：

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{R^N}u\left(x,t\right)\mathrm{e}^{-\varepsilon|x|^2}\mathrm{d}x=\int_{R^N}u\left(x,t\right)\mathrm{d}x\le 0,$$

因此$\int_{R^N}u\left(x,t\right)\mathrm{d}x=0$。

(b) 此时$-\dfrac{2}{N}+\dfrac{1}{p-1}=0$，由引理 2.3 直接得$\int_{R^N}u\left(x,t\right)\mathrm{d}x\le C_0\left(N\right)=\left(2N\pi\right)^{\frac{N}{2}}$。

引理 2.6：假设 u 是全局的，如果 $p=p^*$，那么有$\int_0^t\int_{R^N}u^p\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le\left(2N\pi\right)^{\frac{N}{2}}$。

证明：由于$u\left(\cdot,t\right)\in L^1\left(R^N\right)$，此时取试验函数$\varphi$为在$R^N$中一紧集取值为一，在为紧集外取值为 0 的函数，那么则有下面等式成立

$$\int_{R^N}u\left(x,\tau\right)\mathrm{d}x-\int_{R^N}u\left(x,0\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\tau}\int_{R^N}u^p\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

再由引理 2.4 即得结论。

引理 2.7：假设$u_0\left(x\right)$不恒等于 0，假设 v 是下列方程的解：

$$\begin{cases}v_t=\Delta v_t+\Delta v\\ v\left(x,0\right)=u_0\left(x\right)\end{cases}$$

则对于任意的t_0，存在着$C\left(t_0\right)>0$，在$R^N\times\left[t_0,\infty\right)$有$v\left(x,t\right)\ge C\left(t_0\right)E_1\left(x,2/t,1\right)$。

证明：为了不失一般性，假设$u_0\left(0\right)>0$。那么存在一个充分小的$\delta>0$使得在$B_\delta=\left\{x;|x|<\delta\right\}$中，$u_0\left(x\right)\ge a>0$。

$$v\left(x,t\right)=\vartheta\left(t\right)u_0=\mathrm{e}^{-t}\hat{f}_{\xi\to x}\mathrm{e}^{\frac{t}{1+|\xi|^2}}\hat{u}_0\left(\xi\right)\ge\vartheta_0\left(t\right)u_0=\frac{1}{\left(4\pi t\right)^{\frac{2}{N}}}\int_{R^N}\mathrm{e}^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}u_0\left(y\right)\mathrm{d}y\ge\left(4\pi t\right)^{-\frac{2}{N}}\mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{2t}}\int_{R^N}\mathrm{e}^{-\frac{|y|^2}{2t}}u_0\left(y\right)\mathrm{d}y$$

其中$\vartheta_0\left(t\right)$是热传导方程的半群算子。

取$C_0=2^{-\frac{N}{2}}a\int_{B_\delta}\mathrm{e}^{-\frac{|y|^2}{2t_0}}\mathrm{d}y>0$，$E_1\left(s\right)=\left(4\pi\right)^{-\frac{2}{N}}\mathrm{e}^{-\frac{s^2}{4}}$，因此结论成立。

3. 定理的证明

证明：由引理 2.7 得到的解 v 是问题(1)的下解，所以在$R^N\times\left[t_0,\infty\right)$有$v\le u$。

假设结论不成立，即当 $p=p^*$，u 是全局存在的。

由引理 2.5 和 2.6 的结论，我们可以得出矛盾。

$$\left(2N\pi\right)^{N/2} \ge \int_{t_0}^{T}\int_{R^N}\left\{C\left(t_0\right)E_1\left(x,2/t,1\right)\right\}^p \mathrm{d}x\mathrm{d}t = C\left(t_0\right)^p\int_{t_0}^{T}\left(2\pi t\right)^{-Np/2}\left(2t\right)^{N/2}\mathrm{d}t\int_{R^N}\mathrm{e}^{-p|z|^2}\mathrm{d}z$$

$p=1+\dfrac{2}{N} \Rightarrow -N\dfrac{p}{2}+\dfrac{N}{2}=-1$ 当 $T\to\infty$，右边将趋于无穷大，与左边矛盾，定理得正。

参考文献 (References)

[1] H. Fujita. On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t=\Delta u+u^{1+\alpha}$. Journal of the Faculty of Science of the University of Toky, 1966, 13(2): 109-124.

[2] V. A. Galaktionov, S. P. Kurdyumov, A. P. Mikhailov and A. A. Samarskii. Unbounded solutions of the Cauchy problem for the parabolic equation $u_t=\nabla(u^\alpha\nabla u)+u^\beta$. Soviet Physics Doklady, 1980, 25(5): 458-459.

[3] K. Hayakawa. On nonexistence of global solutions of some semilinear parabolic equations. Japan Academy Proceedings, 1973, 49(7): 503-505.

[4] F. B. Weissler. Existence and nonexistence of global solutions in exterior domains. Israel Journal of Mathematics, 1981, 38(1-2): 29-40.

[5] Y. Cao, J. X. Yin and C. P. Wang. Cauchy problem of semilinear pseudo-parabolic equations. Journal of Differential Equations, 2009, 246(12): 4568-4590.

[6] El. Kaikina, P. I. Naumkin and I. A. Shishmarev. The Cauchy problem for an equation of Sobolev type with power non-linearity. Izvestiya Mathematics, 2005, 69(1): 61-114.

[7] K. Mochizuki, R. Suzuki. Critical Exponent and critical blow-up for quasilinear parabolic equations, Israel Journal of Mathematics, 1997, 98(1): 141-156.

